JUAN
CORRALES
MARTIN

CALCULO INDUSTRIAL DE MAQUINAS ELECTRICAS

TOMO I

© J. Corrales, 1976
U.P.B.
Reservados todos los derechos

ISBN: 84-600-6751-3 (obra completa)
ISBN: 84-600-6752-1 (tomo I)
Depósito Legal B. 40.399-1975
Impreso en España
Printed in Spain
Publicaciones Reunidas, S.A.
Alfonso XII, s/n. Badalona-(Barcelona)

FACULTAD NACIONAL POLITECNICA
UNIVERSIDAD POLITECNICA NACIONAL

PRÓLOGO E INTRODUCCIÓN

La construcción de maquinaria eléctrica en cualquier país, siquiera se halle medianamente industrializado, constituye una de las partidas económicas más importantes, quizá individualmente la mayor, dentro del campo de la electricidad. Imagínese que el enorme incremento anual de la potencia instalada en Centrales, implica el proveer alrededor de una potencia quíntuple entre máquinas y transformadores. En efecto: aquella potencia hay que generarla, elevarla casi toda ella a tensión superior para el transporte, reducirla después a tensión media para la distribución primaria, bajar de nuevo su nivel hasta el de los centros de consumo y finalmente utilizarla. Es cierto que una parte se cede directamente en pérdidas de transporte y otra en procesos electroquímicos o electrometalúrgicos; pero todo ello, incluso contando con la fracción que va a parar a calefacción y alumbrado, apenas si altera esencialmente el multiplicador teniendo en cuenta que viene fácilmente compensado por otras transformaciones adicionales, de interconexión, y por equipos de renovación y reserva.

Todas estas máquinas y transformadores asociados con la generación, transporte, distribución y consumo de la energía eléctrica hay que construirlos y previamente *calcularlos*. Sin embargo, pese a la importancia económica de la industria y a la variedad y exigencias que presentan tales construcciones, es sorprendente que, al menos por lo que sepamos, no exista hasta hoy, en lengua española, ni una sola obra original o traducida consagrada especialmente al cálculo de tales máquinas y transformadores. No obstante, en nuestras Escuelas Técnicas Superiores ya se implantó, atinadamente, aunque no antes de 1957 (1), el estudio de esta disciplina como asignatura independiente, en Ingenieros Industriales, y en el plan de 1964 se ha extendido su estudio a las Escuelas de grado medio en la especialidad de Ingenieros Técnicos de Máquinas Eléctricas.

(1) En estricta justicia debemos decir que la asignatura de "Cálculo de Máquinas Eléctricas" ya figuraba y con una dedicación mucho más amplia que la actual en los programas del desaparecido "Instituto de Electricidad y Mecánica Aplicadas" de Barcelona, que funcionó bajo los auspicios de profesores como Terradas, Planell, Lassaleta, Torroja,... y otros nombres tan ilustres y de cuyas aulas guarda el autor un recuerdo imperecedero.

Por todo ello, el autor, dedicada su vida profesional a la fabricación de máquinas eléctricas, conjuntamente con la enseñanza de esta disciplina en una y otra Escuela antes mencionadas, se ha decidido a escribir la obra que aquí se ofrece a los que en la industria, en las aulas o en el laboratorio han de enfrentarse con los múltiples problemas que plantea el cálculo de dichas máquinas.

La naturaleza del tema, esencialmente pragmático, no permite distinguir entre la Escuela y la realidad (si es que puede distinguirse alguna vez cuando se trata de obras de ingeniería) por lo cual el libro, que responde a la experiencia en los dos ámbitos, lleva el título de «industrial», sinónimo en este caso de «didáctico» puesto que se trata, repetimos, de una actividad técnica: tanto monta, monta tanto.

Para afianzar más este carácter industrial de la obra, sin perjuicio de que pueda servir al mejor dominio de los conocimientos desarrollados, se ha procurado distinguir lo más netamente posible la exposición de ideas fundamentales, planteamientos, procesos y resultados, de aquello otro que constituye el instrumento auxiliar puramente matemático, de tal modo que, en ningún caso, la frondosidad inevitable de los desarrollos de este género enmascare la verdadera finalidad del estudio. Se ha extremado todo lo posible el separar unos y otros conceptos y se recurre continuamente al cambio de tipografía dejando en letra más pequeña lo que no es tan esencial a nuestros fines (salvo los Ejemplos, impresos también, por razones editoriales, en el mismo tipo de letra más reducido).

Con esto, ya lo intuimos, se incurre en el peligro de que el ansia de brevedad induzca a algún lector apresurado a retener de la obra poco más que el formulario y los ejercicios. No lo aconsejamos; pero la distinción entre lo que es sustancial y lo que es complementario ayuda siempre a no divagar y evita el extraviarse por caminos sin salida.

Además de que la premura de que hablábamos no siempre es caprichosa; se impone en las aulas mismas, con tiempos escasos por la parquedad del número de horas lectivas, y se impone en la industria como secuela de la productividad; pero bueno será disponer de un fondo sobre cada tema para ampliar conocimientos en los períodos de calma... si alguna vez se presentan.

Esto quiere decir que el libro está previsto para que su estudio pueda enfocarse de muy distintas maneras y con amplitud y profundidad muy elásticos. Por otra parte, el bagaje matemático que se exige no excede del nivel básico que se alcanza en cualquier grado de la ingeniería.

Dentro de la obra, especialmente en su segunda parte, nos hemos esforzado por relacionar todas las características de las máquinas con sólo tres parámetros fundamentales: la inducción en el entrehierro, la densidad de corriente y la carga lineal específica, y con dos dimensiones también básicas: el diámetro y la longitud del inducido. Esto da unas posibilidades de orientación y juicio previo sobre la marcha de cálculo, ya, de por sí, laborioso; y ello, asociado al método de valorar constantemente los resultados en cifras relativas,

ISE
ISE
Dep
Imp
Prir
Pul
Alfo

para todo lo cual hemos tenido que introducir gran número de nuevas fórmulas, hace que a lo largo de todo el proceso se mantenga una conexión anticipada con el fruto que se trata de obtener, es decir, con las características propuestas de la máquina. De este modo, los reajustes son también valorados con efectos previsibles y por métodos fáciles para predecir su influencia final sobre otros aspectos que no convendría modificar. El abundante número de ejemplos reales tratados contribuye a aclarar las ideas.

Toda la primera parte de la obra está dedicada al estudio de los temas fundamentales comunes a las varias clases de máquinas, a fin de evitar redundancias y fijar los principios dominantes. En la segunda parte se analizan las peculiaridades que reviste cada uno de los tipos sustanciales y se reúnen en conjunto los métodos y fórmulas aplicables.

No debe perderse de vista un hecho fundamental y es que, como se ha dicho muy bien, el cálculo de máquinas eléctricas, pese a lo trabajada que ha sido su racionalización, *no es todavía una ciencia exacta* y requiere aún la experiencia y el «ojo clínico» del constructor para llegar a resultados óptimos, aunque sean tantas las recomendaciones basadas en construcciones anteriores, que se ofrecen —en este libro también— para acertar sin perder mucho tiempo.

Por una parte, el exceso de variables que intervienen, frente al número limitado de condiciones técnicas que hay que satisfacer, hacen del conjunto lo que en términos matemáticos llamaríamos un sistema indeterminado con infinito número de soluciones. Por otra parte, no todas las condiciones y leyes son fáciles de formular algebraicamente, unas por naturaleza; (comportamiento de los aislantes) otras, por dificultad (menos grave) de expresión analítica, dada su estructura (saturación), o su complejidad (ciertas dispersiones, reactancias transitorias). Y aún queda, si llegara a plantearse todo el sistema de ecuaciones simultáneas que caracterizaría a una máquina eléctrica, el problema de resolverlo, humanamente imposible (pero no, por medios electrónicos).

Véase, pues, que el tema no está ni mucho menos, agotado; al contrario, podemos decir que nos encontramos sobre una buena base de lanzamiento. Cabe orientarse en el sentido de restringir la indeterminación introduciendo en el cálculo nuevas condiciones (no, caprichosas o meramente exhibicionistas como a veces se hallan en ciertas especificaciones técnicas) sino *de tipo económico* (constructivas y de explotación) en el terreno de las optimaciones; el campo de investigación por este camino apenas se ha iniciado. (1)

La formulación analítica de las leyes empíricas que se utilizan en el cálculo será también labor «rentable» así como el precisar mejor otras, basadas en hipótesis mal confirmadas, en simplificaciones hoy necesarias o en experiencias insuficientes.

---

(1) Señalemos que un ensayo completamente informal realizado por el autor con un grupo vocacional de alumnos de esta asignatura en la E.T.S. de I.I. de Barcelona (curso 1967-68) pudo confirmarnos que, trabajando en equipo, la empresa se encuentra incluso al alcance de nuestros estudiantes bien preparados.

La sistematización de todo el proceso, una vez incorporadas las nuevas condiciones y completados los algoritmos, permitiría acercarse por síntesis a la solución ideal y de enorme trascendencia económica: la de construir máquinas eléctricas, en las cuales se hallan implicadas inversiones tan fuertes, con las mejores características técnicas y a los costes de producción y de explotación lo más reducido posibles.

Nos alegraría que este libro contribuyera a despertar tales inquietudes en la generación que hoy trabaja y en las que cada día se incorporan al común afán que anima a toda la Electrotecnia.

En fin: es propósito del autor, como el de todos los autores, el que su libro valga para algo. El campo de que trata, justifica sobradamente la aparición de esta obra y de muchas más porque aquí no nos cabe la ambición de colmar la consabida laguna ya que la literatura técnica española, en este dominio, tiene enfrente, ya hoy, la tarea de ir rellenando a prisa toda una especie de mar sin fondo.

J. CORRALES

UNIVERSIDAD ... BIBLIOTECA NACIONAL

FUNDAMENTOS DEL CÁLCULO

17948

1.01 — EL CIRCUITO ELÉCTRICO

1.01.01. Generalidades. Constantes de las máquinas eléctricas

Ninguna de las características calificada como «constante» en el conjunto de valores técnicos propios de las máquinas eléctricas, merece rigurosamente este nombre. Todas y cada una de ellas varían de un modo inevitable, y casi siempre inconveniente, en función de alguna otra magnitud: temperatura, saturación, frecuencia, etc., cuya influencia, ya que no es posible eliminar, es preciso conocer, para prever sus efectos. De tal modo, el apelativo de *constante* parece obedecer más bien a un deseo que a la realidad; no obstante, siguiendo la costumbre, conservaremos esta denominación y, en muchos problemas, la supondremos justificada durante el planteamiento y desarrollo, procurando introducir al final las correcciones que acerquen la solución a la verdad de los hechos.

Entre estas constantes físicas nos interesan particularmente para el cálculo de máquinas eléctricas.

a) Las que caracterizan al *circuito eléctrico*, es decir: la *resistividad* o su inversa la *conductividad* del conductor, que influyen sobre las caídas óhmicas de tensión y las pérdidas por efecto Joule.

b) Las del *circuito magnético: permeabilidad* y *pérdidas específicas del hierro*. La primera afecta a la excitación necesaria para mantener el flujo y la segunda, como tales pérdidas, entran en el cálculo del rendimiento.

c) Las constantes ligadas al *circuito dieléctrico*, o sea el *poder inductor específico*, la *rigidez dieléctrica* y el *ángulo de pérdidas*, todo lo cual afecta, según los casos, exclusivamente al aislamiento de los conductores o bien forma parte del sistema conductivo provocando fenómenos de excitación y de caídas de tensión opuestas a las de inductancia; y, en último caso, origina también pérdidas suplementarias.

d) Las que intervienen en el «*circuito térmico*», a saber: *conductividad térmica* y *coeficientes de radiación y de convección*. Influyen directamente sobre el calentamiento de las máquinas eléctricas promovido por las pér-

didas; el *calor específico* es decisivo, en este aspecto, durante los períodos transitorios y el *coeficiente de dilatación térmica* hay que tenerlo en cuenta en muchas ocasiones, sobre todo desde el punto de vista constructivo.

e) Constantes mecánicas. Las características mecánicas de los materiales intervienen en el cálculo estructural de las máquinas eléctricas como en cualquier otra construcción sometida a esfuerzos de montaje o de servicio. Entre estas características, bien conocidas, suelen ser las más importantes los coeficientes de ruptura bajo diversas clases de solicitaciones: tracción, compresión, flexión, torsión, cortadura, resiliencia y fatiga; límites de proporcionalidad y de elasticidad y módulo de elasticidad.

f) Otras constantes físicas y químicas. No vamos a enumerar todas las propiedades de los materiales de índole muy variada que hay que tener en cuenta ocasionalmente en el cálculo de máquinas eléctricas ya que forman parte del acervo donde se surte de datos la ingeniería de cualquier modalidad activa. Nos limitaremos a hacer uso de ellos cuando sea preciso dándolos por conocidos, puesto que, de otro modo, la obra habría de transformarse en una verdadera enciclopedia.

1.01.02. Constantes del circuito eléctrico. Resistencia

La resistencia eléctrica R de un conductor constituye, como sabemos, un índice de la oposición que ofrece al paso de la corriente eléctrica y se define como la relación entre el voltaje constante U aplicado en sus extremos y la corriente permanente I que circula por él, o sea, como coeficiente de proporcionalidad entre ambas magnitudes

$$R = \frac{U}{I}$$

Esta relación, para cualquier conductor determinado, suele ser bastante constante, es decir, independiente de U y de I.

Con U en voltios (V) e I en amperios (A), R viene dado en ohmios (Ω) (voltios/amperio).

La inversa de la resistencia R es la conductancia.

$$G = \frac{I}{U}$$

Si se expresa R en ohmios, G viene dada en siemens (amperios/voltio) Sabido es que los anglosajones suelen emplear el nombre de «mho» formado por las mismas letras de la palabra ohm en orden inverso.

Las resistencias introducidas en los circuitos se combinan según las leyes

BIBLIOTECA
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

bien conocidas, que no vamos a repetir, de los montajes en serie, paralelo, mixtos, etc.

1.01.03. Resistividad volumétrica ϱ

La resistencia, en conductores de sección uniforme relativamente pequeña con respecto a su longitud es, por experiencia, proporcional a esta longitud l e inversamente proporcional a la sección s; el coeficiente de proporcionalidad que representaremos por ϱ es lo que se denomina *resistividad volumétrica* o simplemente *resistividad* del material, en las condiciones dadas.

$$R = \varrho \frac{l}{s} \qquad [1.01.03\ a]$$

La resistividad volumétrica no es, pues, más que la resistencia eléctrica que presenta en dichas condiciones el conductor considerado, de unidad de longitud y unidad de sección. Según las unidades que se elijan para la resistencia y para las dimensiones del conductor mismo, así resultará el valor de ϱ.

Digamos ya, desde ahora que para mayor comodidad y acierto en las operaciones aritméticas conviene manejar cifras de un orden absoluto moderado (entre 1 y 100, siempre que sea posible), fáciles de combinar mentalmente al hacer uso de la regla de cálculo, evitándose los grandes números y los valores de elevado orden decimal. El cálculo de máquinas eléctricas, de carácter industrial por naturaleza, y que requiere efectuar operaciones aritméticas en cantidad a veces abrumadora, no puede prescindir de tal exigencia por lo cual acude frecuentemente a expresar las magnitudes en ciertas unidades que no se ajustan a determinados sistemas científicamente ortodoxos porque conducirían a cifras incómodas dentro del ámbito de las características de tales máquinas.

Un paso más por este camino nos llevará, con innegables ventajas prácticas de esfuerzo mínimo y de enjuiciamiento constante sobre la marcha del cálculo, al método que vamos a seguir preferentemente, buscando la expresión de los *valores relativos* para cada magnitud, lo que equivale a tomar por módulo de la misma un valor característico distinto de la unidad y propio de cada máquina, el cual coincidirá generalmente con los datos nominales de placa u otros propuestos si fueran más representativos, pero siempre específicos de la máquina en cuestión; por ejemplo: la tensión en vacío, la potencia aparente, el par electromagnético, etc.

Volviendo a la resistividad, dos son las unidades en que suele expresarse comunmente: en «ohmios milímetro cuadrado por metro» y en «microhmios centímetro cuadrado por centímetro». Esto equivale a tomar, respectivamente, por unidades de resistencia R, el ohmio y el microhmio; por unidad de longitud l el metro y el centímetro y por unidad de sección s el milímetro cuadrado y el centímetro cuadrado. Así, de [a],

$$\boxed{R\,(\Omega) = \frac{\varrho \dfrac{(\Omega \cdot \mathrm{mm}^2)}{\mathrm{m}}\, l\,(\mathrm{m})}{s\,(\mathrm{mm}^2)}} \qquad [1.01.03\ b]$$

se deduce que ϱ es igual a la resistencia en Ω de un hilo de 1 m de longitud y 1 mm² de sección; y en el otro caso,

$$R\,(\Omega) = \frac{\varrho \dfrac{(\mu\Omega \cdot \mathrm{cm}^2)}{\mathrm{cm}}\, l\,(\mathrm{m})}{100\ s\,(\mathrm{mm}^2)}, \qquad [1.01.03\ c]$$

ϱ es la resistencia en $\mu\Omega$ de un cubo de 1 cm de arista.

Entre ambas resistividades existe la relación

$$\varrho\left(\frac{\mu\Omega \cdot \mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}}\right) = \varrho\,\frac{(\Omega \times 16^6)\ (\mathrm{mm}^2\ 10^{-2})}{(\mathrm{m} \times 10^2)} = \varrho\left(\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}\right) \times 100 \qquad [1.01.03\ d]$$

con lo cual se pasa fácilmente de la expresión [b] a la [c].

Por ejemplo: la resistividad del cobre patrón internacional a 20 °C es de 0'017241 $\dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$ ó 1'7241 $\dfrac{\mu\Omega \cdot \mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}}$

Esta mezcla de unidades (m, cm, mm, Ω, $\mu\Omega$) dentro de una misma fórmula es frecuente en las aplicaciones industriales, y aunque ello repugne al espíritu científico, responde a la conveniencia de manejar siempre cifras de un orden numérico cómodo.

1.01.04. Ejemplo

La resistencia óhmica del circuito inductor de un alternador de 140 kVA 10 polos, conectados en serie, cuya espira media es de 75 cm, devanado con 240 espiras por bobina, en cobre de 9 mm² de sección y resistividad (a la temperatura de servicio de 120 °C) de 2,46 $\dfrac{\mu\Omega \cdot \mathrm{cm}^2}{\mathrm{cm}}$ valdrá, [1.01.02. c],

$$R = \varrho\,\frac{l}{100\ s} = 2{,}46\,\frac{10 \cdot 240 \cdot 0{,}75}{100 \cdot 9} = 4{,}92\ (\Omega).$$

Si la corriente de excitación necesaria a P.C. es de 22 A la excitatriz deberá poder dar como mínimo dicha intensidad y una tensión de

$$U = 4{,}92 \cdot 22 = 108\ (\mathrm{V})$$

y su potencia en servicio,

$$p = U\,I = 0{,}108 \cdot 22 = 2{,}38\ (\mathrm{kW})$$

2,5 kW en cifras redondas.

FACULTAD DE CIENCIAS ... UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

1.01.05. Conductividad χ

Es la inversa de la resistividad

$$\chi = \frac{1}{\varrho} = \frac{l}{Rs} \qquad [1.01.05\ a]$$

A la unidad de resistividad ϱ $\left(1\,\dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}\right)$ le corresponde $\left(1\,\dfrac{\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2}\right)$ como unidad de conductividad y es la que se emplea normalmente para esta magnitud. (Los anglosajones expresarán, naturalmente la conductividad, en su propia terminología, en $\dfrac{\mathrm{mhos} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2}$). El orden de magnitud para los conductores usuales es de varias decenas: la conductividad del cobre patrón a 20 °C valdrá, siendo su resistividad, según hemos dicho, de 0,017241 $\dfrac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}$

$$\chi = \frac{1}{0{,}017241} = 58\left(\frac{\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2}\right)$$

Es muy práctico a veces escribir el valor de la resistividad como expresión inversa de la conductividad. Así, para el cobre citado, a 20 °C

$$\varrho = \frac{1}{58}\left(\frac{\Omega \cdot \mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}}\right)$$

ya que, como veremos, las Normas suelen graduar la calificación industrial de los materiales conductores por su resistividad escalonando los divisores de 1 en 1 (58, 57, 56..., por ejemplo).

Comercialmente la conductividad se expresa en % de la del cobre patrón, a 20°C (Ver párrafo 1.01.13).

1.01.06. Materiales conductores para las máquinas eléctricas

La resistividad (o la conductividad) constituye la propiedad más característica de un conductor desde el punto de vista eléctrico y su valor depende, sobre todo, de la naturaleza, pureza y tratamiento térmico del material y de la temperatura de funcionamiento.

El valor de ϱ influye técnicamente sobre las caídas de tensión y sobre las pérdidas y, por esto último, sobre el calentamiento de la máquina y el rendimiento económico de las mismas.

En la construcción de máquinas eléctricas se emplean con fines conductores casi exclusivamente dos materiales: el cobre y el aluminio, especialmente el cobre por ser entre los materiales industriales el de más alta conductividad. La plata, todavía más conductora $\left(\varrho = 1{,}63\,\frac{\mu\Omega \cdot cm^2}{cm}\right)$ queda excluída a causa de su precio. El aluminio, cuya resistividad volumétrica viene a ser, en igualdad de condiciones, un 61 % superior a la del cobre, se emplea a veces en ciertos devanados de transformadores o bobinas polares de máquinas rotativas, para aprovechar las ventajas de su menor peso; y, sobre todo, fundido, a presión, en los rotores de corto circuito de los motores de inducción pequeños (devanados de aluminio inyectado) donde además de ofrecer un sistema de construcción sólido y económico, que el cobre no admite por su dificultad de colada, proporciona más seguridad durante los períodos transitorios de sobrecarga (en los arranques, por ejemplo), teniendo en cuenta la capacidad térmica y la ausencia de soldaduras.

Para mantener una conductividad adecuada, el grado de pureza de estos materiales ha de ser elevadísimo, del 99,9 % como mínimo, valores que solamente se alcanzan con la refinación por electrolisis. Los procesos de laminación y estirado endurecen el material y aumentan su resistividad, debiendo procederse a un recocido ulterior. El cobre duro sólo se emplea en las máquinas para ciertas conexiones sometidas a esfuerzos mecánicos, y como delgas de colector o en las jaulas de los rotores de corto circuito. Si el hilo, o barra, no está muy bien recocido las dificultades para formar y montar las bobinas aumentan extraordinariamente, debiendo advertirse que el material se endurece muy de prisa con la manipulación y plegados sucesivos.

He aquí algunos valores de ϱ y χ para el cobre y el aluminio electrotécnicos y materiales para rotores de jaula. Como complemento se indican también los de la plata.

		ϱ a 20 °C $\left(\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}\right)$	χ a 20 °C $\left(\frac{S \cdot m}{mm^2}\right)$
Cobre patrón internacional		$0{,}017241 = \frac{1}{58}$	58
» electrolítico recocido	(VDE)	$0{,}01755 = \frac{1}{57}$	57
» electrolítico comercial		$0{,}01785 = \frac{1}{56}$	56
» electrolítico duro	(VDE)	$0.01785 = \frac{1}{56}$	56
Aluminio recocido	(VDE)	$0{,}02778 = \frac{1}{36}$	36

Aluminio duro	(VDE)	$0{,}02825 = \frac{1}{35{,}4}$		35,4
» inyec. para rotores, aprox.		$0{,}0303 = \frac{1}{33}$		33
		$(0{,}0358) = \left(\frac{1}{28}\right.$	en caliente $\left.\right)$	(28, en cal.)
Plata		$0{,}0163 = \frac{1}{61{,}4}$		61,4
Latón 1/3		$0{,}0666 = \frac{1}{15}$		15
Bronce fosforoso		$0{,}111 = \frac{1}{9}$		9

La conductividad del aluminio recocido, a 20 °C, es sólo el 62 % de la del cobre patrón o su resistividad 1,61 veces la de este último.

1.01.07. Influencia de la temperatura

Al aumentar la temperatura, la resistividad del cobre y la del aluminio como la de casi todos los metales, aumenta. La del hierro laminado o fundido, que se emplean mucho como reostatos de arranque, aumenta aún en mayor proporción que la de aquellos conductores fundamentales. Se consiguen ciertas aleaciones a base de cobre y níquel, con la adición o sin ella de otras sustancias (manganeso por ejemplo), cuya resistividad es prácticamente independiente de la temperatura (nombres comerciales: manganina, advance constantan, copel) y se usan en reostatos de laboratorio y aparatos de medida. El carbono y sus derivados, grafito, electrografito, que constituyen materiales de contacto y para escobillas presentan el fenómeno inverso, y lo mismo casi todos los productos semiconductores y aislantes en estado seco: su resistividad disminuye al aumentar la temperatura; de entre ellos se destacan algunas substancias cerámicas [1] cuya propiedad en este orden se utiliza a veces para compensar el incremento de resistencia de ciertos bobinados de cobre.

Dada la influencia que ejerce la temperatura θ, según veremos enseguida, sobre los valores de ϱ y χ, se acostumbra hacer constar aquella mediante un subíndice añadido al símbolo correspondiente: ϱ_{20} χ_{75}..., etc., y en general ϱ_θ, χ_θ..., etc.

1.01.08. Constante de temperatura c

Se ha comprobado experimentalmente que el incremento de *resistividad* que experimenta una muestra de cobre o de aluminio electrotécnico por cada

(1) Se las designa con el nombre genérico de «resistencias NTC» (negative temperature coefficient).

grado de aumento de su temperatura es una *constante* c del material, independiente de la calidad de la muestra, de la resistividad inicial de la misma y de la temperatura previa. Esta constante vale para el cobre en términos de su resistividad volumétrica (según las Normas VDE)

$$c = 68 \cdot 10^{-6} \frac{\left(\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}\right)}{°C}$$

lo cual quiere decir que la resistencia de un hilo de cobre de 1 m de longitud y 1 mm² de sección constantes, para cualquier calidad electrotécnica y a cualquier temperatura, aumenta de 68 μΩ por cada °C.

La expresión matemática de la ley enunciada es la siguiente

$$\varrho_{\theta'} = \varrho_{\theta} + c(\theta' - \theta) \qquad [1.01.08\ a]$$

donde ϱ_θ y $\varrho_{\theta'}$ indican las resistividades respectivas a las temperaturas θ y θ' °C. La representación gráfica de $\varrho = f(\theta)$ es lineal (fig. 1.01.08 a)

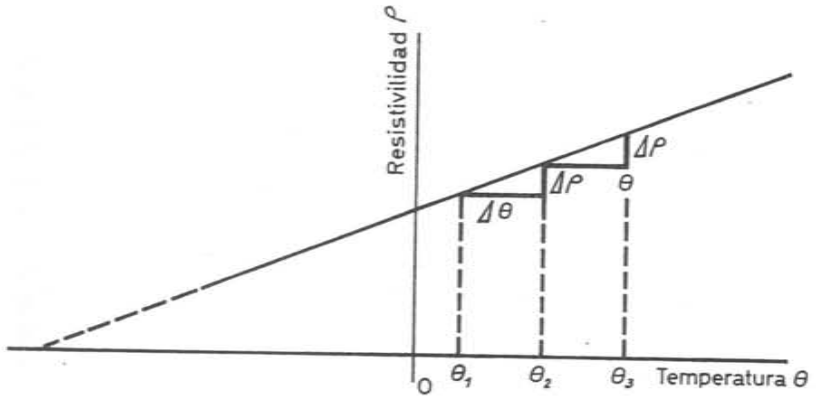


Fig. 1.01.08 a. Variación lineal de la resistividad con la temperatura (Ritmo de crecimiento constante. Coeficiente de variación inversamente proporcional a ϱ).

1.01.09. **Coeficiente de temperatura** $\alpha_{\rho\theta}$ (abreviado, C.d.t.)

Si al variar la temperatura de un conductor desde θ a θ' °C su resistividad aumenta, según lo que acabamos de decir, desde ϱ_θ a $\varrho_{\theta'}$ el *coeficiente de temperatura medio* a partir de θ °C, $\alpha_{\rho\theta}$ se define como la variación c de resistividad por grado centigrado, referida al valor inicial de ϱ, es decir, a ϱ_θ

$$\alpha_{\rho\theta} = \frac{c}{\varrho_\theta} = \frac{\left(\frac{\varrho_{\theta'} - \varrho_\theta}{\theta' - \theta}\right)}{\varrho_\theta} \qquad [1.01.09\ a]$$

Al ser c independiente de la calidad de la muestra (de ϱ_θ) el coeficiente de temperatura resulta en cambio *inversamente proporcional a la resistividad inicial* ϱ_θ *o directamente proporcional a su conductividad de partida* χ_θ *e independiente de la temperatura final* θ' (1).

$$\alpha_{\rho\theta} = \frac{c}{\varrho_\theta} = c\chi_\theta \qquad [1.01.09\ b]$$

1.01.10. **La resistividad en función del C.d.t.**

De la fórmula [1.01.08 a]

$$\varrho_{\theta'} = \varrho_\theta + c(\theta' - \theta)$$

se deduce, [1.01.09 b],

$$\boxed{\varrho_{\theta'}} = \varrho_\theta \left[1 + \frac{c}{\varrho_\theta}(\theta' - \theta)\right] = \boxed{\varrho_\theta[1 + \alpha_{\rho\theta}(\theta' - \theta)]} \qquad [1.01.10\ a]$$

fórmula fundamental de múltiples aplicaciones. Tomando como base las características del material a 20 °C que es la temperatura de referencia para la normalización de las propiedades conductivas,

$$\varrho_{\theta'} = \varrho_{20}[1 + \alpha_{\rho 20}(\theta' - 20)]$$

$$\varrho_\theta = \varrho_{20}[1 + \alpha_{\rho 20}(\theta - 20)]$$

$$\frac{\varrho_{\theta'}}{\varrho_\theta} = \frac{\left(\frac{1}{\alpha_{\rho 20}} - 20\right) + \theta'}{\left(\frac{1}{\alpha_{\rho 20}} - 20\right) + \theta} \qquad [1.01.10\ b]$$

Designando por $\overset{*}{\chi}_{20}$. la conductividad relativa del cobre con respecto a la del patrón internacional, tomadas ambas a 20 °C, es decir (párr, 1.01.06),

$$\boxed{\overset{*}{\chi}_{20\cdot} = \frac{\chi_{20}}{58}} \qquad [1.01.10\ c]$$

resulta, [1.01.09 b],

$$\alpha_{\rho 20} = c\chi_{20} = 68 \cdot 10^{-6} \cdot 58 \cdot \overset{*}{\chi}_{20} = \frac{\overset{*}{\chi}_{20\cdot}}{253{,}55}$$

(1) Sobre las características peculiares de ésta y otras leyes físicas de crecimiento véase la obra del autor «Teoría, Cálculo y Construcción de Transformadores» — 5.ª edic. Edit. Labor.

y sustituyendo en [b]

$$\frac{\varrho_\theta'}{\varrho_\theta} = \frac{\left(\frac{253{,}55}{\overset{*}{\chi}_{20}} - 20\right) + \theta'}{\left(\frac{253{,}55}{\overset{*}{\chi}_{20}} - 20\right) + \theta.} = \frac{\alpha_{\rho\theta}}{\alpha_{\varrho\theta}} \qquad [1.01.10\ d]$$

lo que da para el cobre patrón mismo ($\overset{*}{\chi}_{20} = 1$)

$$\boxed{\frac{\varrho_\theta'}{\varrho_\theta} = \frac{233{,}5 + \theta'}{233{,}5 + \theta}} \qquad [1.01.10\ e]$$

Para cualquier otro cobre electrotécnico comercial, es $\overset{*}{\chi}_{20} \leq 1$, pero siempre muy próximo a la unidad y el sumando constante del numerador y denominador excederá ligeramente de la cifra 233,55.

1.01.11. Variabilidad del C.d.t.

La relación fundamental que lo define es la [1.01.09 a] antes señalada

$$\alpha_{\rho\theta} = \frac{c}{\varrho_\theta}$$

Trataremos de poner $\alpha_{\varrho\theta}$ directamente en función de la conductividad relativa $\overset{*}{\chi}_{20}$ de la muestra y de la temperatura θ.

Para la temperatura ambiente normal de 20 °C, $\alpha_{\rho 20} = \frac{c}{\varrho_{20}}$; por tanto, [1.01.10.a]

$$\frac{\alpha_{\rho\theta}}{\alpha_{\rho 20}} = \frac{\varrho_{20}}{\varrho_\theta} = \frac{1}{1 + \alpha_{\rho 20}(\theta - 20)}; \qquad \alpha_{\varrho\theta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_{\rho 20}} - 20\right) + \theta}$$

pero, según [1.01.10 c a e], y si además hacemos $\overset{*}{\chi}_{20} = 1$ (Cu patrón),

$$\boxed{\alpha_{\rho\theta}} = \frac{1}{\left(\frac{253{,}55}{\overset{*}{\chi}_{20}} - 20\right) + \theta} \approx \frac{1}{233{,}55 + \theta} = \boxed{\frac{1}{T_{\rho 0} + \theta}} = \frac{1}{T_\rho} \qquad [1.01.11\ a]$$

siendo $T_{\rho 0} = 233{,}55$ °C.

Para una temperatura $-T_{\rho 0}$ la resistividad, teóricamente, se anula. En efecto:

$$\varrho_\theta' = \varrho_\theta[1 + \alpha_{\rho\theta}(\theta' - \theta)] = \varrho_\theta\left[1 + \frac{1}{T_{\rho 0} + \theta}(-T_{\rho 0} - \theta)\right] = 0$$

1.01.12. Variación de la resistencia con la temperatura. Coeficiente aparente de temperatura

La expresión de la resistencia en cualquier condición es, en unidades apropiadas,

$$R = \varrho\frac{l}{s}$$

y variaría en la misma relación que ϱ si l y s permaneciesen constantes o variasen proporcionalmente con la temperatura. Las dilataciones térmicas, longitudinal y transversal, del conductor modifican la relación $\frac{l}{s}$ alterando también por este lado el valor de R. Si designamos por β_0 el coeficiente de dilatación lineal a cero °C tendremos evidentemente

$$\frac{R_{\theta'}}{R_\theta} = \frac{\varrho_{\theta'}}{\varrho_\theta}\frac{l_{\theta'}}{l_\theta}\frac{s_\theta}{s_{\theta'}} = \frac{\varrho_{\theta'}}{\varrho_\theta}\frac{1 + \beta_0\theta'}{1 + \beta_0\theta}\frac{(1 + \beta_0\theta)^2}{(1 + \beta_0\theta')^2} = \frac{\varrho_{\theta'}}{\varrho_\theta}\frac{1 + \beta_0\theta}{1 + \beta_0\theta'}$$

Dada la magnitud de β_0 ($17 \cdot 10^{-6}\frac{\text{m}}{\text{m.}^\circ\text{C}}$ para el Cu) podemos escribir

$$\frac{R_{\theta'}}{R_\theta} = \frac{\varrho_{\theta'}}{\varrho_\theta}[1 - \beta_0(\theta' - \theta)]$$

$$\frac{R_{\theta'}}{R_0} = [1 + \alpha_{\rho\theta}(\theta' - \theta)]\ [1 - \beta_0(\theta' - \theta] \approx [1 + (\alpha_{\theta\rho} - \beta_0)\ (\theta' - \theta)]$$

Si adoptamos un coeficiente aparente de temperatura

$$\alpha_\theta = \alpha_{\rho\theta} - \beta_0.$$

tendremos la expresión formal, idéntica a la de las resistividades, [1.01.10 a],

$$\boxed{\frac{R_{\theta'}}{R_\theta} = 1 + \alpha_\theta(\theta' - \theta)} \qquad [1.01.12\ a]$$

y también, referidas a cero grados centigrados,

$$R_{\theta'} = R_0[1 + \alpha_0\theta']$$

$$R_\theta = R_0[1 + \alpha_0\theta]$$

de donde

$$\boxed{\frac{R_{\theta'}}{R_\theta}} = \frac{1 + \alpha_0\theta'}{1 + \alpha_0\theta} = \frac{\frac{1}{\alpha_0} + \theta'}{\frac{1}{\alpha_0} + \theta} \boxed{= \frac{T_0 + \theta'}{T_0 + \theta} = \frac{T'}{T}}; \qquad [1.01.12\ b]$$

y para $T_0 = \frac{1}{\alpha_0}$ tendremos

$$T_0 = \frac{1}{\alpha_0} = \frac{1}{\alpha_{c0} - \beta_0} \approx \frac{1}{\frac{1}{233{,}55} - 17 \cdot 10^{-6}} = 234{,}5°,$$

Las Normas alemanas fijan el valor de $T_0 = 235°$; las suizas y americanas el de 234,5°.

(Para el cobre comercial debiera tomarse alrededor de $T_0 = 243°$; véase obra citada del autor).

Estas ecuaciones sirven igualmente para deducir el calentamiento de un conductor por la medición de sus resistencias en frío y en caliente.

$$\theta' - \theta = \frac{\frac{R_{\theta'}}{R} - 1}{\alpha_\theta} \approx \left(\frac{R_{\theta'}}{R_\theta} - 1\right)(235 + \theta)\ (°C)\ \text{para el Cu.}$$

Cuando se trata de medir por este método, que es el más recomendado, el calentamiento de los devanados sobre el ambiente, como los ensayos suelen durar varias horas y la temperatura alrededor de la máquina puede, entre tanto, haber cambiado, hay que deducir del incremento así obtenido la variación de dicha temperatura.

Si al comenzar la prueba el ambiente estaba a θ_1 °C y al terminar la misma a θ_2 °C, el verdadero incremento de temperatura del bobinado de cobre habrá sido

$$\Delta\theta = \theta' - \theta = \left(\frac{R_{\theta'}}{R_\theta} - 1\right)(235 + \theta) - (\theta_2 - \theta_1)\quad (°C) \qquad [1.01.12.c]$$

Esta es la fórmula adoptada para el cobre por casi todas las Normas nacionales e internacionales. Con $\theta = 20$ °C y $\frac{R_{\theta'}}{R_\theta} = 1{,}3$, es decir, un incremento de resistencia del 30 %, el aumento de temperatura, aparte la corrección del ambiente, sería de 76,5 °C lo que viene a corresponder al aislamiento clase B para el cual se admiten hasta 80 °C de $\Delta\theta$. En este orden de ideas aproximado cabe indicar que el incremento de resistencia, de frío a caliente, que acostumbra medirse en máquinas normales, oscila entre un 25 y un 30 % cifras nada despreciables que deben tenerse en cuenta al calcular dichas máquinas para distintas condiciones de funcionamiento (arranque en frío, pérdidas a P.C. en caliente).

Notemos que la ecuación [c] conduce a resultados algo optimistas cuando se aplica al cobre electrotécnico comercial para el cual la cifra 235 debería sustituirse por la de 243 como hemos dicho.

1.01.13. Medición de la conductividad relativa

Esta característica es la que sirve de base en las transacciones comerciales de los materiales conductores porque define la calidad electrotécnica del material y suele expresarse, como ya lo hemos hecho anteriormente, en valores relativos de la del cobre patrón, reducidas una y otra a la temperatura normal (20 °C)

$$\overset{*}{\chi}_{20} = \frac{\chi_{20}}{58}$$

Para determinarla basta medir la resistencia R_θ (Ω) de una muestra del material a cualquier temperatura θ y tomar las dimensiones l (m) y s (mm²) de la muestra, o bien, mejor aún, la longitud l(m) y el peso G (g).

El valor de $\overset{*}{\chi}_{20}$ viene dado entonces para el cobre por

$$\overset{*}{\chi}_{20} = \frac{0{,}017241}{\frac{R_\theta s}{l} + 68 \cdot 10^{-6}(20 - \theta)}$$

ó

$$\overset{*}{\chi}_{20} = \frac{0{,}153280}{\frac{R_\theta G}{l^2} + 605 \cdot 10^{-6}(20 - \theta)}$$

Nos limitaremos a deducir la primera ecuación. Tomando los valores intrínsecos ϱ_θ y $\alpha_{\rho\theta}$

$$\overset{*}{\chi}_{20} = \frac{\chi_{20}}{58} = \frac{0{,}017241}{\varrho_{20}} = \frac{0{,}017241}{\varrho_\theta[1 + \alpha_{\rho\theta}(20 - \theta)]} = \frac{0{,}017241}{\varrho_\theta + (\varrho_\theta \alpha_{\rho\theta})(20 - \theta)}$$

$$= \frac{0{,}017241}{\frac{R_\theta s}{l} + 68 \cdot 10^{-6}\ (20 - \theta)}$$

1.01.14. La resistividad relativa en el cálculo de máquinas

Para el estudio general de la Electrotecnia y para las transacciones comerciales sobre los conductores resulta adecuado referir las conductividades a la temperatura de 20 °C y expresarlas en valores relativos de la del cobre

patrón como hasta aquí se ha hecho. Las máquinas eléctricas, sin embargo, trabajan normalmente con los devanados a temperaturas que alcanzan por lo general incrementos de 60 °C e incluso, modernamente, hasta 135 °C, sobre un ambiente de 40 °C, temperaturas desde luego, muy por encima de los 20 °C. Solamente al iniciarse la puesta en marcha de un motor puede ser interesante considerar un valor tan bajo de θ. Por otra parte aunque la técnica electroquímica actual produce fácilmente muy buenas calidades de cobre, no es prudente contar con las propiedades del cobre patrón internacional.

De un modo general, las Normas nacionales fijan como temperatura de referencia para las características garantizadas de las máquinas, en particular cuando se trata de valorar las pérdidas, un nivel intermedio, de 75 °C, lo que tiene en cuenta que las máquinas no suelen trabajar continuamente a P.C.

Resulta entonces práctico calcular de un modo uniforme las resistencias de los bobinados a la temperatura de 75 °C y aconsejable basarse en un cobre de conductividad a 20 °C $\chi_{20} = 56\ \frac{S \cdot m}{mm^2}$ al cual le corresponde un valor relativo $\overset{*}{\chi}_{20} = \frac{56}{58} = 0{,}965$ de la del cobre patrón. La resistividad aparente de aquel conductor a 75 °C vale, (párr. 1.01.12)

$$\varrho_{75} = \frac{1}{56}\,\frac{235+75}{235+20} = 0{,}0217\ \left(\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}\right)$$

y la conductividad

$$\chi_{75} = \frac{1}{\varrho_{75}} = \frac{1}{0{,}0217} = 46{,}1\ \left(\frac{S \cdot m}{mm^2}\right).$$

Las características que interese calcularlas para otras temperaturas (par y corriente de arranque de un motor, a 20 °C; corriente de excitación de una máquina de continua o de un alternador a la temperatura de servicio de 115 °C, por ejemplo; pérdidas en los devanados a dicha temperatura para hallar este mismo calentamiento, etc.), se determinan aplicando a la resistencia de 75 °C un *coeficiente adecuado de corrección por temperatura*

Este coeficiente k_θ para el cobre vendrá dado, evidentemente, por

$$\boxed{k_\theta} = \frac{235+\theta}{235+75} = \boxed{\frac{235+\theta}{310}} \qquad [1.01.14\ a]$$

de tal modo que

$$\boxed{\varrho_\theta} = k_\theta\ \varrho_{75} = \boxed{k_\theta \cdot 0{,}0217}\ \left(\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}\right) \qquad [1.01.14.b]$$

Véase ejemplo 1.01.16

1.01.15. Pérdidas específicas en los bobinados p_i

Como consecuencia de la resistencia que ofrecen al paso de la corriente eléctrica, aparecen las pérdidas, bien conocidas, por efecto Joule.

$$p_J = R\ I^2 \qquad (W)$$

Para el cálculo de máquinas es más conveniente introducir el concepto de *pérdidas específicas* p_j, por unidad de peso G del material, en $\frac{W}{kg}$

De este modo se aplica la fórmula

$$p_J = p_i\ G \qquad (W)$$

Las pérdidas específicas p_i vienen dadas a su vez por

$$p_i = \frac{1000\ \varrho}{\gamma}\ \Delta^2\ \left(\frac{W}{kg}\right) \qquad [1.01.15\ a]$$

siendo, Δ la densidad de corriente en $\frac{A}{mm^2}$, ϱ la resistividad en $\frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$ y γ el peso específico del conductor en $\frac{kg}{dm^3}$ o $\frac{g}{cm^3}$.

Así,

$$\boxed{p_J = p_i\ G = \left(\frac{1000\ \varrho}{\gamma}\ \Delta^2\right) G} \quad (W) \qquad [1.01.15.b]$$

En efecto: Empleando las unidades indicadas y siendo l la longitud del conductor en m y s su sección en mm²

$$p_J = R\ I^2 = \varrho\ \frac{l}{s}\ \Delta^2 s^2 = \varrho\ l\ s\ \Delta^2 \quad (W)$$

pero

$$G = \frac{l\ s}{1000}\ \gamma \quad (kg)$$

luego,

$$p_J = \left(\frac{1000\ \varrho}{\gamma}\ \Delta^2\right) G \qquad (W)$$

Las pérdidas por efecto Joule p_J son proporcionales al *peso del conductor y al cuadrado de la densidad de corriente.*

Si para bajar la densidad Δ y con ella, por ejemplo, el calentamiento, aumentamos la sección s, el peso aumenta proporcionalmente a la sección misma y las pérdidas disminuyen sólo en razón inversa de ésta.

Cargando un conductor a razón de 1 A/mm² pierde, por kg, $\frac{1000\varrho}{\gamma}$ (W).

Para el cobre de conductividad, a 20 °C, $\chi_{20} = 56 \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$, se tienen a 75 °C, $\varrho_{75} = 0{,}0217 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ y circulando 1 $\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$, las pérdidas por kg ascienden a

$$\frac{1000 \cdot 0{,}0217}{8{,}9} 1^2 = 2{,}44 \text{ W}$$

aproximadamente $2{,}5 \frac{\text{W}}{\text{kg} \cdot \left(\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}\right)^2}$

De tal modo, con dicho cobre 56 y a la temperatura indicada de 75 °C las pérdidas por efecto Joule vienen dadas por

$$p_J = 2{,}44 \ \Delta^2 G. \quad \text{(W)}$$

A cualquier otra temperatura θ siendo p_J proporcional a la resistividad ϱ bastará aplicar el mismo coeficiente de corrección por temperatura k_θ antes definido

$$p_j = 2{,}44 \ k_\theta \ \Delta^2 \left(\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right) \qquad [1.01.15 \text{ c}]$$

$$\boxed{p_J = 2{,}44 \ k_\theta \ \Delta^2 \ G} \text{ (W)} \qquad [1.01.15 \text{ d}]$$

(Δ en A/mm², G en kg.)

1.01.16. Ejemplo

Calcular las resistividades, conductividades, pérdidas específicas y coeficientes de corrección a partir de la temperatura de 75 °C para el cobre de $\chi_{20} = 56 \frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$, trabajando a la temperatura ambiente normal y a las que autorizan las normas VDE para cada clase de aislamiento.

Estas temperaturas son las que se recogen en la siguiente tabla.

TABLA 1.01.16a Temperaturas admisibles según la clase de aislamiento (VDE)

1	2	3	4	5
Clase de aislamiento	Temperatura ambiente máxima °C	Aumento medio de temperatura sobre el ambiente °C	Temperatura media admisible en servicio °C	Temperatura admisible en el punto más caliente °C
Y	40	45	85	90
A	40	60	100	105
A_0 (en aceite)	40	65	105	—
E	40	75	115	120
B	40	80	120	130
F	40	100	140	155
H	40	125	165	180

Las cifras de la columna 4 se obtienen sumando las de las columnas 2 y 3.

Las de la columna 5 exceden a las de la 4 entre 5 y 15 °C.

Los datos más interesantes para el cálculo son los de las columnas 3 y 4 donde se especifican los valores *medios* a que pueden llegar, como límite las temperaturas de los bobinados en servicio.

La columna 3 sirve de referencia para el ensayo de las máquinas. Si el cálculo del calentamiento se ha efectuado a base de las temperaturas indicadas en la columna 4, los valores de la columna 3 quedan plenamente asegurados mientras la temperatura ambiente no rebase las cifras de la columna 2; durante el ensayo aquélla suele ser alrededor de 20 °C en lugar de 40 °C y con ello las pérdidas en los devanados y el incremento de temperatura resultan ligeramente inferiores aunque los coeficientes de disipación del calor también descienden algo con la temperatura.

Los datos de la columna 5 han de cuidarse al proyectar constructivamente la máquina evitando focos locales de calentamiento mal ventilados.

Aplicando la fórmula [1.01.14.a]

$$k_\theta = \frac{235 + \theta}{310}$$

después de sustituir θ por la temperatura propuesta, tenemos:

con $\theta = 20$ °C, $k_\theta = 0{,}82$; para $\theta = 75$ °C, es naturalmente $k_\theta = 1$ y con los valores de θ tomados de la columna 4 (tabla a) se obtienen los correspondientes de k_θ que aparecen en la tabla siguiente b, 4.° columna.

Calcularemos como complemento los valores absolutos de las resistividades y conductividades a estas temperaturas. Como, para el Cu 56,

$$\varrho_{75} = 0{,}0217 \left(\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}\right), \ \varrho_\theta = k_\theta \varrho_{75} \text{ y } \chi_\theta = \frac{1}{\varrho_\theta} \left(\frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}\right),$$

se desprenden fácilmente las cifras dadas en las columnas 5 y 6 de esta última tabla.

Cuanto al coeficiente de pérdidas específicas, [1.01.15 a],

$$\frac{1000\ \varrho_\theta}{\gamma} = \frac{1000}{8{,}9}\varrho_\theta = 112{,}5\ \varrho_\theta \quad \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm^2}}\right)}$$

resulta, para $\theta = 75$ °C, $112{,}5 \cdot 0{,}0217 = 2{,}44$.

Para las restantes temperaturas, basta multiplicar este valor por el mismo coeficiente k_θ, obteniéndose así las cifras de la columna 7.

TABLA 1.01.16b Características del *Cu* 56 a las temperaturas admitidas según los aislantes

1	2	3	4	5	6	7
Clase de aislamiento	Incremento de temperatura media admisible °C	Temperatura media límite θ °C	$k_\theta = \frac{235+\theta}{310}$	$\varrho_\theta = k_\theta \cdot \varrho_{75}$ $\left(\frac{\Omega\ \mathrm{mm^2}}{\mathrm{m}}\right)$	$\chi_\theta = \frac{1}{\varrho_\theta}$ $\left(\frac{\mathrm{s \cdot m}}{\mathrm{mm^2}}\right)$	$\frac{1000\varrho_\theta}{\gamma}$ $\frac{\Omega}{\mathrm{kg}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{mm^2}}\right)^2}$
—	—	20	0,82	0,0179	56	2,01
—	—	75	1,00	0,0217	46	2,44
Y	45	85	1,03	0,0224	44,6	2,48
A	60	100	1,08	0,0234	42,6	2,64
A_0	65	105	1,10	0,0238	42,0	2,68
E	75	115	1,13	0,0245	40,8	2,75
B	80	120	1,14	0,0248	40,2	2,80
F	100	140	1,21	0,0262	38,1	2,95
H	125	165	1,29	0,0280	35,7	3,15

Puede verse cómo a la temperatura de trabajo correspondiente a los más modernos aislantes, a base de siliconas, que llegan a alcanzar los 165 °C, la conductividad del cobre desciende hasta valores de 35,7 $\left(\frac{\mathrm{s \cdot m}}{\mathrm{mm^2}}\right)$, similares a los del aluminio a 20 °C (33 a 28; párr. 1.01.06).

En los motores corrientes con aislamiento clase *E*, la resistencia de los devanados en servicio viene a ser $\frac{1{,}13}{0{,}82}$, aproximadamente 36 % más alta que en el momento del arranque. Todo ello justifica sobradamente las correcciones a efectuar por este concepto en el cálculo de las distintas características de las máquinas, correcciones que a veces indebidamente se pasan por alto.

1.01.17. Caída óhmica relativa de tensión $\overset{*}{u}_R$ y pérdidas relativas $\overset{*}{u}_J$ en los bobinados

Si la tensión inducida en un bobinado es U voltios, la corriente que circula por él I amperios y su resistencia R ohmios, la caída óhmica vale

$$u_R = R\ I \qquad \text{(V)}$$

y en valor relativo (%) de la tensión inducida

$$\overset{*}{u}_R = \frac{u_R}{U}\,100\ .\ (\%\ \text{de}\ U) \qquad [1.01.17\ \text{a}]$$

La potencia perdida, a su vez

$$p_J = R\ I^2$$

y en valor relativo de la potencia engendrada en el bobinado $P = UI$

$$\overset{*}{p}_J = \frac{RI^2}{UI}\,100 = \frac{RI}{U}\,100 = \overset{*}{u}_R\,(\%\ \text{de}\ P\ \text{o de}\ U). \qquad [1.01.17\ \text{b}]$$

La caída óhmica referida a la tensión en bornes y las pérdidas por efecto Joule *referidas a la potencia en bornes de cualquier bobinado son numéricamente iguales.*

El principio es válido para corriente continua o alterna lo mismo si se trata de uno que de varios devanados idénticos o distintos; válido, en consecuencia, para el arrollamiento inducido de cualquier máquina tomando como UI la potencia en bornes del mismo (potencia aparente en corriente alterna).

Las resistencias R, caída u_R y pérdidas p_J pueden incluir, o no, partes del circuito ajenas al bobinado propiamente dicho, es decir, a los conductores donde se engendra la tensión U y la potencia UI; yendo más lejos todavía, estas magnitudes de referencia cabe hacerlas corresponder a otro devanado, a otra máquina o ser absolutamente arbitrarias. La ecuación

$$\overset{*}{p}_J = \overset{*}{u}_R$$

se cumplirá siempre.

Aplicando el principio al cálculo de máquinas eléctricas nos facilitará, como hemos de ver más tarde, un proceso muy homogéneo, permitiéndonos referir todas las magnitudes de esta índole a la potencia o a la tensión en bornes de la máquina.

Así, la caída óhmica en las escobillas de un generador si representa el 2 % de la tensión en bornes, equivale a una pérdida del 2 % respecto a la potencia útil: el deslizamiento del 5 % en un motor asincrónico indica a su vez una caída y unas pérdidas por efecto Joule en el circuito rotórico del 5 % de la potencia transmitida a través del entrehierro, etc.

1.01.18. Resistencia de contacto. Escobillas

Las resistencias de contacto que intervienen en el cálculo de las máquinas eléctricas son las de deslizamiento entre colectores lisos (anillos rozantes), o segmentados (conmutadores) y sus escobillas. La naturaleza de estas resistencias de contacto es muy particular ya que el valor de las mismas además de variar con el calentamiento según leyes imprecisas y coeficiente de temperatura *negativo*, depende de la densidad de corriente en el contacto y, por supuesto, de la clase o calidad de los materiales en presencia, sobre todo del material de la escobilla. Los colectores de delgas son siempre de cobre electrolítico duro y los aros deslizantes, de bronce o latón fundidos o de hierro laminado o forjado.

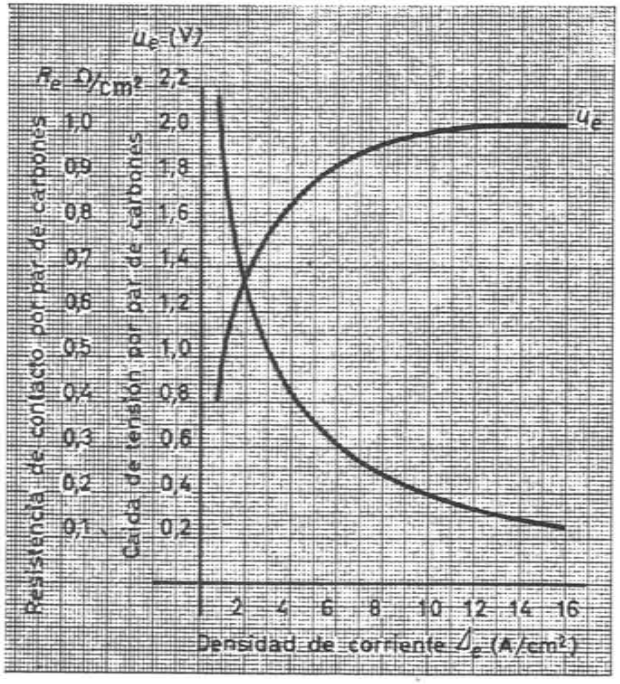


Fig. 1.01.18 a. Características de un tipo de escobillas, por par de carbones. Caída de tensión y resistencia de contacto en función de la densidad de corriente.

Las escobillas se clasifican esencialmente en dos grandes grupos, con los calificativos abreviados de «metálicas» y «de carbón» respectivamente. En realidad, las denominadas metálicas son siempre mixtas, de cobre y grafito, y las de carbón no contienen agregados metálicos pero el estado y tratamiento del carbono las confiere propiedades distintas según los tipos. Las variedades comerciales de escobillas son abundantísimas. La característica de caída de tensión, incluso a temperatura constante en el contacto escobilla-colector, es función de la densidad de corriente y no resulta lineal como correspondería a una resistencia independiente de la intensidad, sino de tendencia más bien asintótica (género de las curvas de saturación), fig. 1.01.18a, de tal modo que a partir de una cierta densidad $\Delta_e \left(\frac{A}{cm^2}\right)$ la caída de tensión permanece casi constante. Definiendo la resistencia por la ley de Ohm, se tiene entonces

$$R_e = \frac{u_e}{I} \approx \frac{\text{cte.}}{I};$$

ello equivale a decir que a partir de un cierto límite, la resistencia de contacto varía casi en razón inversa de la corriente. Este valor asintótico u_e de la caída de tensión es el índice corriente que define el tipo de escobilla y se da en «voltios por par de carbones», uno de entrada y otro de salida, ya que la magnitud suele ser distinta según que la corriente vaya de la escobilla al colector o del colector a la escobilla: Así, hay escobillas desde 0,5 a 3 V por par de carbones. El valor más corriente se centra alrededor de los 2 V y en el cálculo se acostumbra tomar uniformemente esta cifra: 2V por par de escobillas para los colectores de delgas y 1 V, también por par, para los de anillos. Las de mayor caída de tensión se denominan en la tecnología de taller «duras», y «blandas» las de caída inferior, sin correlación precisa con estos mismos conceptos mecánicos. Las escobillas duras favorecen, como veremos, la conmutación y las blandas admiten densidades de corriente más elevadas.

La tabla 1.01.18a muestra resumidas las propiedades y usos de algunos tipos clásicos de escobillas, basándose en los catálogos «Morgan Crucible Co». Los fabricantes proporcionan cuadros de equivalencia entre sus propios tipos y los de otras marcas, completos con toda la gama de escobillas normales y para usos especiales o en condiciones específicas.

Los valores a tener en cuenta sobre cada calidad de escobillas con vistas a su elección son:

a) Caída de tensión (c.d.t.) por par de carbones, $2u_e$(V). Valor típico, 2

b) densidad de corriente permanente admisible en el contacto Δ_e (A/mm²). Valores típicos: 7,5, para colectores, y 15, para anillos rozantes.

c) coeficiente de rozamiento $\mu_e \left(\frac{kg}{kg}\right)$. Valor típico, 0,2

d) presión admisible $f_e \left(\frac{g}{cm^2}\right)$. Valor típico, 150

e) velocidad tangencial admisible $v_K \left(\frac{m}{s}\right)$. Valor típico, 25.

Tabla 1.01.18 b — Información sobre escobillas. (Morgan Crucible Co.)

Naturaleza	Composición	Propiedades	Aplicaciones	Tipo	Desig. nación	Datos técnicos aprox. $2u_e$ por par (V)	A_s(A/cm²) Col. delg.	A_s(A/cm²) Anill.	f_s (g/cm²)	η_e	v_E máx. (m/s)
Carbón Battersea	Carbón - Cont. med. de grafito	Medianamente duras	Máq. 220 V	A	A	2,1	7	—		0,21	
		Algo más duras	Tracción		A-2	2,1	7	—		0,22	
	Carbón -Gran proporción de grafito	Blandas	Máq. baja tensión	B	B	1,8	8,5	11	150	0,19	20
		Algo mordientes	Micas no rebajadas		B-3	1,9	9,5	11		0,20	
		Grafito duro	General		B-6	2,0	8,0	10		0,20	
	Carbón - Escasa proporción de grafito	Duras	Máq. < 500 V — Contactores y controlers	C	C	2,0				0,28	
		Duras	Máq. < 500 V		C-2	2-2				0,27	
		Muy duras	Máq. alta tensión - Micas no rebajadas		C-4	2,3	6,5	—	200	0,28	15
		Mordientes			C-6	2,4				0,28	
		Muy mordientes	Máq. alta tensión - Micas salientes		C-8	2,5				0,28	
Morganita	A base de plombagina natural	Silenciosas - Dilatación elevada - Alta resistividad transversal - Sensibles a la presión	Micas rebaj. Escob (+) y (−) coinc. Máq. < 100 V		1	1,9				0,11	
			Micas rebaj. Escob (+) y (−) coinc. Máq. < 100 V		2	1,8	9,5		200	0,11	50
			Bajas perd. mec. Máq. conmut. dif. - Mont. unidir.		3	1,8				0,15	
Morganita duras	Grafíticas	Poca inercia - Dilat. normal	Con anillos de acero o fundición	HM	HM	2,1				0,15	
			Turbogeneradores		HM-3	1,9	10	11,5	150	0,14	50
			Turbogeneradores - Muy corrientes		HM-6	1,6				0,15	
Electro-grafíticas	»	Refractarias Blandas	Máq. baja tensión - Contactores y controlers	EG	EG	1,6	10	11,5		0,20	
		Refractarias Ligeramente duras	Máq. normales		EG-2	1,6	10	11,5	150	0,21	25
		Refractarias Duras	Mot. tracción - Micas rebajadas		EG-3	1,8	8,5	10		0,22	
Mixtas	Graf. y cobre	Baja caída de tensión	Máquinas de muy baja tensión y anillos	CM	CM	0,5	15,4	23,5		0,25	20
	Graf. y bronce				CM-1	—	14	20		0,21	25
	Graf. normal				CM-3	0,07	12,5	15,5	180	0,23	30
	Muy grafit.				CM-6	0,9	11	14		0,20	25
					CM-9	1,4	8	11		0,28	30

BIBLIOTECA
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

1.01.19. Coeficientes de pérdidas eléctricas en las escobillas

La c.d.t. por par de escobillas $2\,u_e$ que define básicamente la calidad constituye un índice de pérdidas en las mismas.

La caída con que suele contarse en los colectores, independientemente de la potencia, es prácticamente $2u_e \approx 2$V/par de carbones para los de delgas y $2u_e = 1$ V/par de carbones para los de anillos.

Si la máquina es de corriente continua el conjunto de todas las escobillas, cualquiera que sea el tipo de devanado, constituye una vía única con entrada a través de la mitad de ellas y salida a través de la otra mitad. Las pérdidas por efecto Joule vendrán dadas siempre por

$$\boxed{p_{eJ} = 2u_e\, I} \quad \text{(W)} \qquad [1.01.19a]$$

$2u_e$ = Caída de tensión por par de escobillas en V
I = Corriente total de la máquina en A

La potencia en bornes de la misma vale a su vez

$$P = U\, I$$

U = Tensión en bornes en V

de donde, las pérdidas relativas en % de la potencia en bornes (potencia útil si se trata de una dinamo, y absorbida si se trata de un motor)

$$\boxed{\overset{*}{p}_{eJ}} = \frac{2\,u_e\, I}{U\, I}\,100 = \boxed{\frac{2\,u_e}{U}\,100} \quad (\%\ \text{de}\ P) \qquad [1.01.19b]$$

independientemente de la potencia de la máquina. En valor relativo, las pérdidas por efecto Joule en los contactos del colector son iguales a la c.d.t. relativa por par de escobillas. Cuando la máquina es de baja tensión (electrolisis, soldadura, etc.), estas pérdidas adquieren una importancia relativa considerable.

En una dinamo de 6 V, aunque se empleen escobillas de 0,75 V por par de carbones, el efecto Joule de contacto consume $\frac{0{,}75}{6}\,100 = 12{,}5$ % de la potencia útil. En cambio, para un motor de tracción a 500 V, las escobillas de 3 V por par de carbones no absorben más que $\frac{3}{500}\,100 = 0{,}6$ % de la potencia en bornes.

Para los motores asincrónicos de escobillas fijas (motores de grúa con maniobra en carga) vale la misma fórmula [b]tomando en vez de $2u_e$ solamente u_e = c.d.t. por escobilla y U = tensión en reposo entre activo y neutro del devanado rotórico, aunque éste vaya conectado en triángulo. Las pérdidas quedan así referidas a la potencia nominal del arrollamiento secundario (potencia electromagnética o «potencia en el entrehierro» de la máquina). En los motores con aparato levanta-escobillas no ha lugar a considerar estas pérdidas.

Como valores medios absolutos cabe adoptar los siguientes

Máquinas de continua: $p_{eJ} = 2\,I$ (W) $2\,u_e = 2$V/por par
Motores de anillos rozantes y escobillas fijas $p_{eJ} = 1{,}5\,I$ (rotórica) (W)
; $2\,u_e = 1$V/por par

Motores trifásicos de colector de tres filas $p_{eJ} = 3{,}75\,I$ (W); $2\,u_e = 2{,}5$ V/par
Motores trifásicos de colector de seis filas $p_{eJ} = 4{,}5\,I$ (W); $2\,u_e = 1{,}5$ par
Anillos rozantes de alternadores $p_{eJ} = I$ (excit.) (W); $2\,u_e = 1{,}0$ par

Para los anillos de excitación de los alternadores, la fórmula [b] es aplicable con $2\,u_e$ = caída de tensión por par de contactos, referidas las pérdidas a la potencia de excitación y tomando U igual a la tensión aplicada en los anillos.

Las pérdidas por rozamiento de las escobillas se estudian en el párrafo 1.10.57 y, combinadas con las anteriores, en el párr. 1.10.58.

1.02 EL CIRCUITO DIELÉCTRICO

1.02.01 Generalidades

El estudio de las propiedades dieléctricas de los materiales aislantes en general constituye una rama especial de la Electrotecnia (1) y su extensión no permite abarcarla, ni aún resumida, en un simple capítulo. Hemos de ceñirnos a señalar los principios que afectan de una manera directa al cálculo de las máquinas eléctricas.

Digamos de paso que las dimensiones del aislamiento en estas últimas vienen determinadas en muchas ocasiones más por razones mecánicas o constructivas que dieléctricas propiamente dichas, lo que conduce a veces a un coeficiente de seguridad muy elevado desde este último punto de vista.

Así, por ejemplo, el aislamiento clase A de ranuras en una dinamo de corriente continua de 220 V no debe ser inferior a 0,5 mm de prespan y tela aceitada, para evitar que se deteriore durante el bobinado en curso de fabricación. La tensión de perforación de este grueso aislante vendría a ser unos 4 a 5 kV y, por tanto, el coeficiente de seguridad en servicio por lo que se refiere a la tensión disruptiva, valdría alrededor de 20.

En cambio, cuando se trata de transformadores de alta tensión (son corrientes ya los de 380 kV y se inician actualmente los de 750 kV), el coeficiente de seguridad para la rigidiez dieléctrica hay que reducirlo a los límites justos que requiere una buena construcción (a veces, poco por encima del voltaje de prueba aunque casi más del doble del nominal) sin prodigar por este motivo el material, y entonces resulta mecánicamente sobrado.

Los procesos de fabricación y de impregnación tienen una importancia considerable, difícil de cifrar en los cálculos, por todo lo cual la solución correcta sobre el dimensionado de las distancias o gruesos de aislamiento conserva todavía un carácter bastante empírico, siendo notable la dispersión de los valores que se encuentran en construcciones similares de distintas procedencias.

Hechas estas salvedades pasemos al estudio de las propiedades que más nos interesan.

1.02.02 Rigidez dieléctrica E_Δ

Se puede definir en términos generales como la tensión disruptiva o de perforación U_Δ del material o del medio aislante por unidad de espesor τ del mismo

(1) Véase, por ejemplo, ROTH: «Técnica de la Alta Tensión», Ed. Labor.

$$E_\Delta = \frac{U_\Delta}{\tau}\left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right) \qquad [1.02.02.a]$$

Esta definición tan simple que identifica a E_Δ con el campo eléctrico disruptivo *medio* se complica al intentar traducirla en cifras, por cuanto, para una misma muestra de material aislante, el valor de E_Δ puede resultar muy distinto según los factores que concurran en el ensayo, ya que depende de numerosas circunstancias, de acuerdo con ciertas leyes de difícil o imposible expresión analítica. Entre dichas circunstancias mencionaremos.

a) *el carácter de la tensión aplicada*, alterna, continua u onda de choque, y su polaridad. En el primer caso, hay que precisar bien si se trata del valor máximo de U_Δ o del valor eficaz; la relación entre ambos depende de la forma de onda por lo cual ésta es, a su vez, un nuevo factor a considerar. Los datos de ensayo con corriente alterna deben basarse siempre en una onda de forma senoidal.

Para muchas sustancias, mientras no pese excesivamente la influencia térmica de la que luego hablaremos, el valor determinante de la rigidez dieléctrica es el de cresta y con frecuencias industriales de 50 ó 60 Hz la tensión

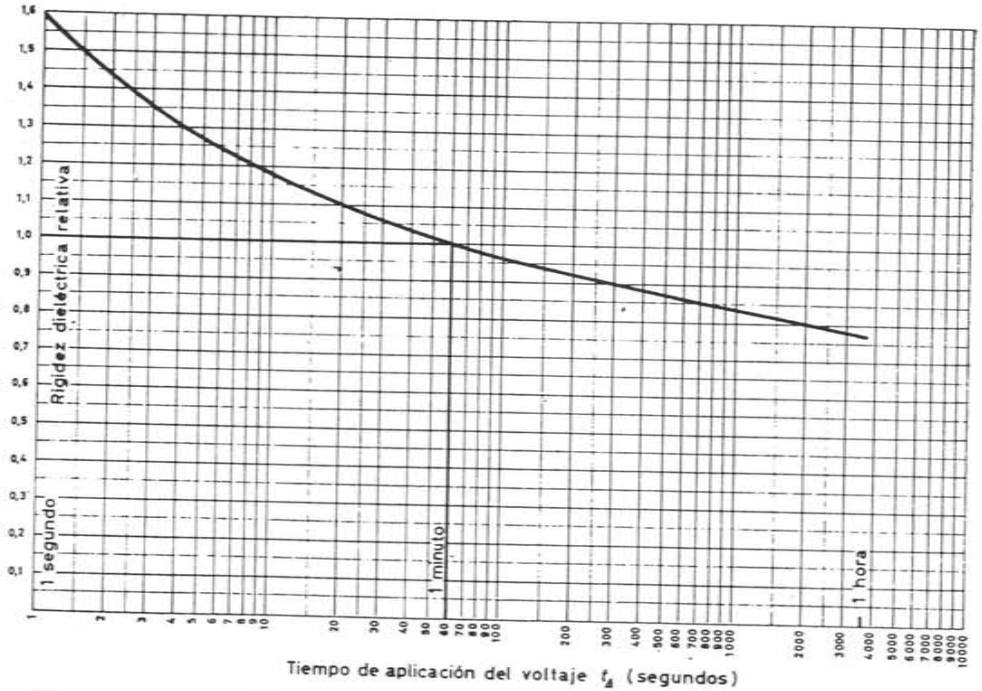


Fig. 1.02.02 a. *Coeficiente de tensión disruptiva* en función del tiempo de aplicación del voltaje. Aislamiento *de papel y algodón en aceite* (Recubrimiento de conductores, s/KEHSE).

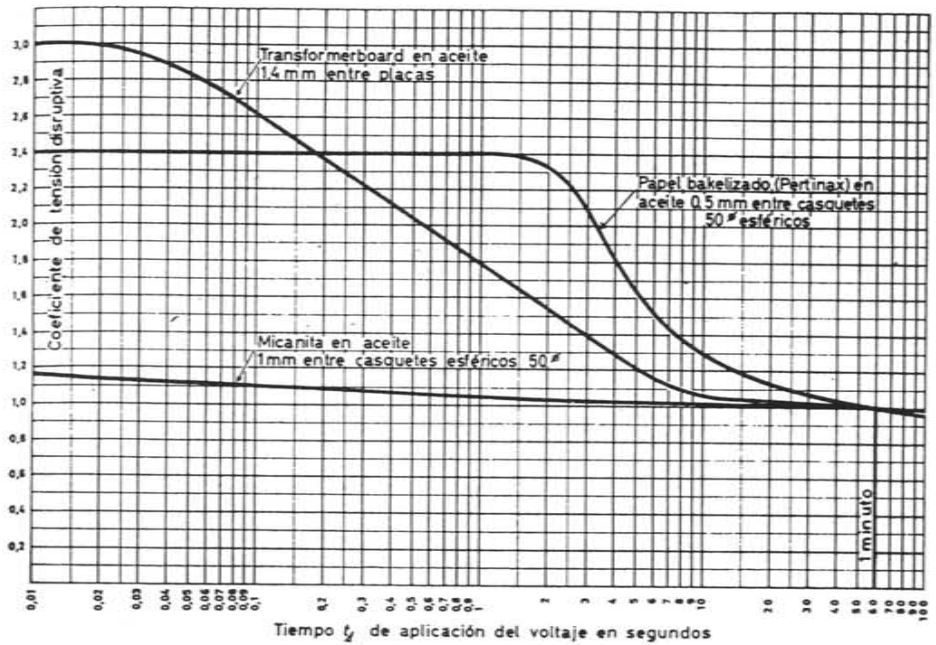


Fig. 1.02.02 b Coeficiente de tensión disruptiva de los *separadores* en función del tiempo de aplicación del voltaje. (seg. BELLASCHI y TEAGUE).

de ruptura expresada en aquella cifra coincide bastante con la de corriente continua. Para los flúidos, gases y líquidos, la concordancia suele ser perfecta; así la tensión disruptiva del aire (atmósfera normal) entre esferas de 50 mm de diámetro, separadas a 1 cm es de 22 kV eficaces en corriente alterna y $22\sqrt{2} = 31$ kV en continua.

b) *la duración de aplicación del voltaje.* Cuanto más corta es la duración del ensayo, tanto más elevada es la tensión que puede resistir un dieléctrico. A frecuencia industrial, el tiempo normal de aplicación del voltaje en las pruebas es de *1 minuto*; en el ensayo de los transformadores con sobretensión propia inducida, a frecuencia superior a la nominal, el tiempo de aplicación se fija en 10 minutos como base, reduciéndolo en razón inversa de la frecuencia de ensayo con respecto a la nominal, (lo que da para un transformador de 50 Hz probado a 100 Hz, 5 minutos, y 2,5 minutos probado a 200 Hz).

Para los aislantes de papel y algodón o prespan sumergidos en aceite, la rigidez dieléctrica en 1 segundo es del orden del 50 % superior, y en una hora 25 % inferior a la rigidez dieléctrica correspondiente a 1 minuto (fig. 1.02.02a); con ondas de choque cuya duración es de microsegundos el valor disruptivo de cresta llega a triplicarse; los productos de mica son mucho menos sensibles a estos efectos (fig. 1.02.02b) y el aire, apenas. El aceite, con tiempos infe-

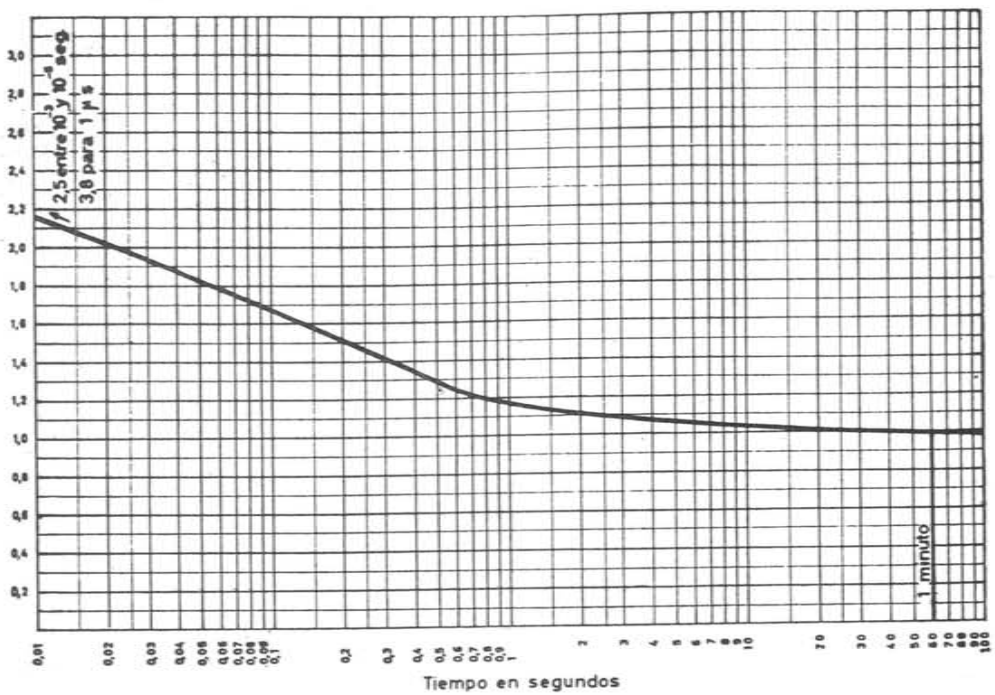


Fig. 1.02.02 c. Coeficiente de tensión disruptiva del *aceite* en función del tiempo de aplicación del voltaje. 12,7 mm entre placas (BELLASCHI y TEAGUE).

riores a 1 segundo experimenta un aumento continuo de rigidez dieléctrica (fig. 1.02.02c); y en mayor proporción que otras sustancias, bajo las ondas de choque.

MONTSINGER propuso la hipótesis de que el voltaje de ruptura se componía de dos fracciones, cuya suma a frecuencia dada, permanece constante; una de aquellas, independiente del tiempo de aplicación t y la otra, inversamente proporcional a la raíz cuarta del tiempo. Tomando, pues como base la tensión disruptiva en un minuto a 60 Hz $U_{\Delta 0}$ el voltaje $U_{\Delta t}$ para cualquier otro intervalo de t minutos y frecuencia f hasta unos 400 Hz, vendría dado por

$$U_{\Delta t} = \left(a\ U_{\Delta 0} + \frac{(1 - a)\ U_{\Delta 0}}{\sqrt[n]{t}} \right) \frac{1{,}75}{f^n} \qquad [1.02.02\ b]$$

o sea, en valores relativos,

$$\frac{U_{\Delta t}}{U_{\Delta 0}} = \left(a + \frac{1 - a}{\sqrt[n]{t}} \right) \frac{1{,}75}{f^n} \qquad [1.01.02\ c]$$

siendo $a < 1$ y n constantes, distintas para cada sustancia, dependientes también de las condiciones de ensayo.

En los materiales sólidos se da $a = 0{,}637$ y $n = 0{,}137$; 1,75 es precisamente igual a $60^{0{,}137}$. Con prespan en aceite, la influencia de f sería insignificante desapareciendo el factor $\frac{1{,}75}{f^n}$; a depende de la clase de material. Para combinaciones de aceite y aislantes sólidos en serie donde la capa de aquél no exceda del grueso de estos últimos, volvería a ser válida la fórmula (1.02.02 b). De todos modos, la generalización de estas fórmulas es siempre muy arriesgada.

c) *la forma de los electrodos.* Como la ruptura dieléctrica proviene de la intensidad del campo eléctrico, el valor del campo medio de ruptura es sólo un índice de la rigidez media. El esfuerzo real máximo viene determinado por la distribución de las líneas de fuerza. De aquí la influencia de la forma de los electrodos de prueba o de los elementos constructivos de la máquina entre las cuales exista una d.d.p. Todas las aristas y vértices activos son peligrosos y como la presencia de los mismos no siempre puede evitarse y otras veces aparecen, imprevisiblemente, debido a la alineación electrostática de partículas o fibras flotantes en el medio ambiente, es necesario tomar, por lo general, como base para el dimensionado de las distancias en aceite o al aire los *resultados de ensayo entre puntas o entre punta y placa* y no entre electrodos planos o esféricos.

d) *el grueso del aislamiento.* A medida que el grueso aumenta, sube la tensión disruptiva pero en menor proporción que aquél, o sea que la rigidez dieléctrica media, definida como voltaje de ruptura por unidad de espesor, disminuye. En efecto: al aumentar la separación de los electrodos, la configuración del espectro de campo eléctrico se altera tendiendo a concentrarse las líneas de fuerza, a manera de filamentos elásticos sobre una menor sección transversal, lo cual significa tendencia a aumentar la intensidad del campo y contrarresta, en parte, el descenso de flujo electrostático derivado del alejamiento de los electrodos. De este modo, la relación de la intensidad de campo máxima a la intensidad media crece al aumentar el grueso del aislante y desciende así el valor medio aparente del campo disruptivo.

Sin embargo, disminuyendo el grueso por bajo de ciertos límites la homogeneidad de la sustancia puede quedar alterada por la presencia de canales más débiles o vías locales de descarga que faciliten la ruptura dieléctrica, lo cual se aprecia con claridad en varias de las curvas que daremos en seguida.

La relación entre el voltaje disruptivo en 1 minuto y el grueso de aislante o distancia entre electrodos, para dieléctricos sólidos, a igualdad de las demás condiciones, es proporcional según FISCHER-HINNEN a la potencia 2/3 del grueso τ de aislamiento

$$U_\Delta = K \sqrt[3]{\tau^2} \quad \text{(kV)} \qquad [1.02.02\ d]$$

con τ en mm; los valores de K se dan en la tabla 1.02.02 a. Son al mismo tiempo la intensidad de campo en kV eficaces/mm para el grueso τ de 1 mm. Esta fórmula, como todas las similares, debe comprobarse en cada caso particular antes de aceptarla incondicionalmente.

TABLA 1.02.02 a — Valores del coeficiente K en la fórmula de FISCHER-HINNEN [1.02.02 d]

Dieléctrico	Temperat. °C	K	Válida para gruesos τ (mm)
Papel de cables en aceite	20	21	hasta 20
	90	14,8	
Tela aceitada	20	23,2	» 3
Micafolio a la goma laca	20	25,3	» 4
	90	21,1	
Micafolio al compound	20	25,3	» 4
	90	20	
Prespan y transformerboard en aceite	20	33,7	» 8
	90	29,5	
Placas de papel bakelizado	20	25,3	» 15
	90	16,8	
Tubos de papel bakelizado	20	25,3	hasta 4
	90	23,2	
	20	31,7	de 5 a 15
	90	27,4	
Porcelana dura, extra	20	25,3	de 5 a 30
	90	14,8	
Masas fenólicas (bakelita) con cargas orgánicas	20	14,8	hasta 5
Idem con cargas inorgánicas	20	7,4	» 5

e) *la temperatura.* La rigidez dieléctrica de casi todos los materiales aislantes bien secos disminuye al aumentar la temperatura. Si contienen humedad, el efecto de secado que se deriva del calentamiento puede enmascarar los hechos. La ley de variación de E_d con la temperatura suele ser de difícil expresión analítica; en términos generales, al pasar de 20 a 100 °C la rigidez de los aislamientos industriales se reduce en un 15 a 20 %.

f) *otros factores.* La *frecuencia* también influye aunque, dentro de los límites industriales de la misma, pueden despreciarse sus efectos.

Las *pérdidas dieléctricas* y, por tanto, el ángulo de pérdidas, intervienen indirectamente debido al calentamiento que provocan. En condiciones determinadas puede llegarse a la ruptura dieléctrica por puro efecto térmico de las pérdidas, según veremos más adelante.

La *constante dieléctrica* de la que trataremos a continuación es muy importante ya que determina la repartición del campo entre los varios componentes de un sistema de aislamientos en serie y afecta a las pérdidas específicas por unidad de volumen como luego veremos.

1.02.03. Datos prácticos

Son innumerables las variedades de productos aislantes que se encuentran en el mercado; y las calidades, según la procedencia. He aquí a continuación un resumen genérico de los más interesantes para la construcción de máquinas eléctricas con la expresión de las tensiones disruptivas y de la rigidez dieléctrica en cada caso, siempre en *valores eficaces a frecuencia industrial* a menos que se indique otra cosa. Los catálogos de las firmas fabricantes de estos productos contienen documentación detallada en cada caso particular y son siempre de gran interés para el constructor.

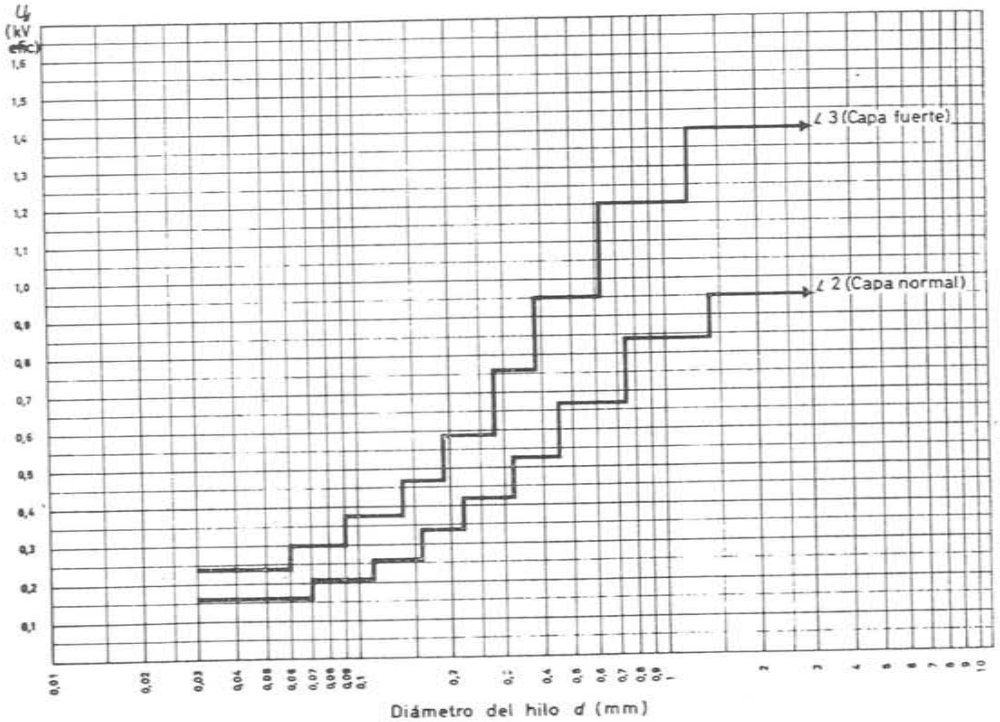
Tabla 1.02.03 a. Incremento de diámetro (Δd) de los hilos esmaltados con capa de acetal-polivinilo (seg. Aismalibar) y de los hilos recubiertos de algodón, seda, vidrio y amianto (Breitonbach).

	Esmaltados capa normal			Esmaltados capa fuerte		AA	SS	V	Am
d	Δd mín.	Δd normal	Δd máx.	Δd mín.	Δd máx.	Δd	Δd	Δd	Δd
0,04	0,0025	0,007	0,0115	0,009	0,0140		0,07		
0,05	»	»	»	0,010	0,0150		»		
0,06	0,0035	0,008	0,0125	0,011	0,0160		»		
0,07	0,0045	0,009	0,0145	0,012	0,0175		»		
0,08	0,0055	0,011	»	0,013	0,0180		»		
0,09	0,0065	0,012	0,0165	0,014	0,0205		»		
0,10	0,0070	0,014	0,0190	0,015	0,0220		»		
0,11	0,0090	»	0,020	0,016	0,0235		»		
0,12	»	0,015	»	0,017	0,0250		»		
0,13	0,010	»	0,021	0,018	0,0275		»		
0,14	»	0,016	»	0,019	0,0280		»		
0,15	»	»	0,023	0,020	0,0295		»		
0,16	»	0,017	0,024	0,022	0,0300		»		
0,17	»	0,018	0,025	»	0,0315		»		
9,18	»	»	0,026	0,024	0,0320		»		
0,19	»	0,019	0,027	0,026	0,0345		»	—	
0,20	»	0,020	0,030	0,028	0,0350	0,15	»	0,165	
0,21	»	0,021	0,031	0,029	0,0365	»	»	»	
0,22	0,012	0,022	0,032	0,030	0,0380	»	»	»	
0,23	0,013	0,023	0,033	»	0,0395	»	»	»	
0,24	0,014	0,024	0,034	0,032	0,0410	»	»	»	
0,25	0,015	0,025	0,035	»	0,0425	»	»	»	
0,26	0,016	0,026	0,036	0,034	0,0440	»	»	»	
0,27	0,017	0,027	0,037	0,035	0,0455	»	»	»	
0,28	0,018	0,028	0,038	0,036	0,0470	»	»	»	
0,29	»	0,029	0,039	0,038	0,0490	»	»	»	
0,30	»	0,030	0,043	0,040	0,0510	»	»	»	
0,35	0,020	0,035	0,048	0,045	0,0595	»	0,08	—	
0,40	»	0,035	0,054	0,055	0,0680	»	»	0,175	
0,45	0,025	0,043	0,060	0,058	0,0765	»	»	»	
0,50	0,030	0,048	0,065	0,060	0,0850	0,2	0,20	»	0,3
0,55	»	0,060	0,069	0,070	0,093	»	»	»	»
0,60	0,033	»	0,077	»	0,102	»	»	»	»
0,65	»	»	0,078	0,075	0,110	»	»	»	»
0,70	»	0,065	0,088	»	0,119	»	»	»	»
0,75	»	0,070	0,098	0,080	0,125	»	»	—	»
0,80	0,042	»	»	0,085	»	»	»	0,185	»
0,85	»	»	»	0,090	»	»	»	»	»
0,90	0,047	0,075	0,103	0,095	»	»	»	0,195	»
0,95	0,050	0,080	0,108	»	»	»	»	»	»
1,00	»	»	»	»	»	0,3	»	0,21	»
1,1	»	0,085	0,115	0,100	»	»	»	»	»
1,2	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1,3	»	»	»	»	»	»	»	»	»
1,4	»	»	»	»	»	»	»	0,22	»

Tabla 1.02.03 a *(continuación)*

	Esmaltados capa normal			Esmaltados capa fuerte		AA	SS	V	Am
d	Δd mín.	Δd normal	Δd máx.	Δd mín.	Δd máx.	Δd	Δd	Δd	Δd
1,5	0,050	0,085	0,115	0,100	0,125	0,3		0,22	0,3
1,6	»	0,090	0,120			»		»	»
1,7	»	»	»			»		»	»
1,8	»	»	0,125			»		0,23	»
1,9	»	»	»			»		»	»
2,0	»	»	»			»		»	»
2,1	»	»	»			»		»	0,35
2,2	»	»	»			»		»	»
2,3	»	»	0,130			»		»	»
2,4	»	»	»			»		»	»
2,5	»	»	»			»		0,24	»
2,6	»	»	»			»		»	»
2,7	»	»	»			»		»	»
2,8	»	»	»			»		»	»
2,9	»	»	»			»		»	»
3,0	»	»	»			»		»	»

Trenza de algodón $\Delta d + 0{,}4$ Trenza de vidrio $\Delta d + 0{,}35$



1.02.03 a. Tensión de perforación mínima en la granalla, de los hilos esmaltados acetal-polivinilo, seg. Normas VDE. Las tensiones disruptivas de los hilos comerciales con capas similares alcanzan valores muy superiores (del triple al cuádruple).

a) Aislamiento de conductores. La tensión disruptiva entre conductores esmaltados grasos o sintéticos es muy alta si se considera el ligerísimo espesor de la película aislante. Los esmaltes sintéticos presentan además una gran resistencia mecánica a la erosión y perfecta plasticidad para la manipulación de los conductores; resisten al aceite caliente y ocupan mínimo espacio, todo lo cual los ha hecho casi insustituibles en los bobinados de máquinas corrientes y transformadores pequeños o de distribución. Es quizás el tipo de recubrimiento más aplicado. En el mercado suelen encontrarse los hilos esmaltados con capa normal (L-2) y con capa fuerte (L-3). El incremento de diámetro debido al esmalte puede verse en la tabla (1.02.03 a) donde se incluyen también para su comparación los revestimientos de doble capa de algodón (AA), doble capa de seda (SS), seda de vidrio (V) y amianto (Am). Para los hilos de 1 mm de diámetro estos incrementos vienen a ser, en cifras redondas, de 0,1 mm empleando esmalte o doble capa de seda; 0,2 mm con seda de vidrio y 0,3 con doble capa de algodón o una de amianto. Las tensiones disruptivas exigidas por las normas nacionales para los hilos esmaltados varían de 300 a 2 800 V, entre conductores, según el diámetro del hilo y consiguiente grueso de la película (fig. 1.02.03 a) pero la industria consigue valores de 1 500 a 8 000 V respectivamente (fig. 1.02.03 b). El diámetro del conductor como electrodo influye también en los resultados (fig. 1.02.03c). Con fibras textiles de vidrio o de amianto, secas, sin impregnar, no suele pasarse de 100 V de tensión disruptiva entre conductores aún con aislamiento de varias capas, por lo cual la impregnación o inmersión en aceite es indispen-

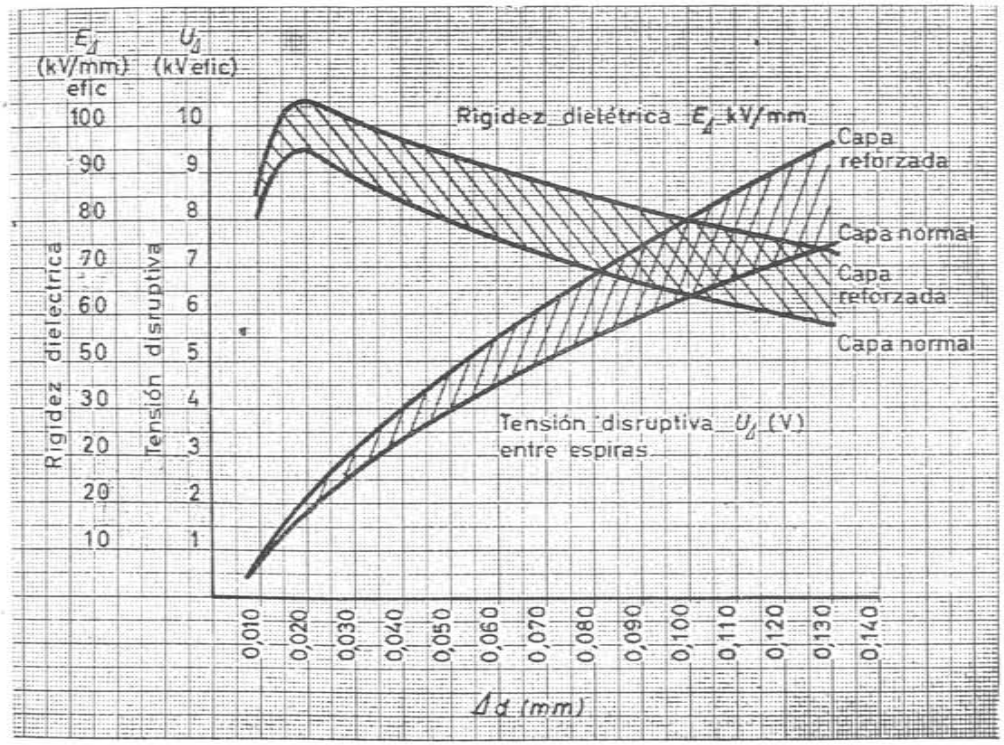


Fig. 1.02.03 b. Rigidez dieléctrica del acetal-polivinilo para hilos, medida entre conductores (a base del catálogo AISMALIBAR).

BIBLIOTECA
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

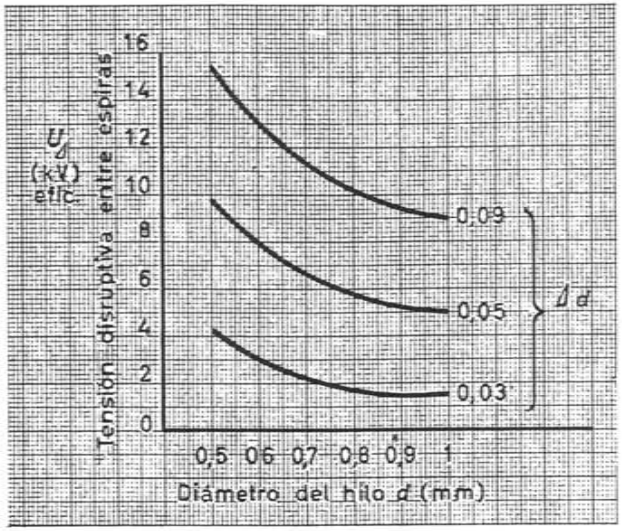
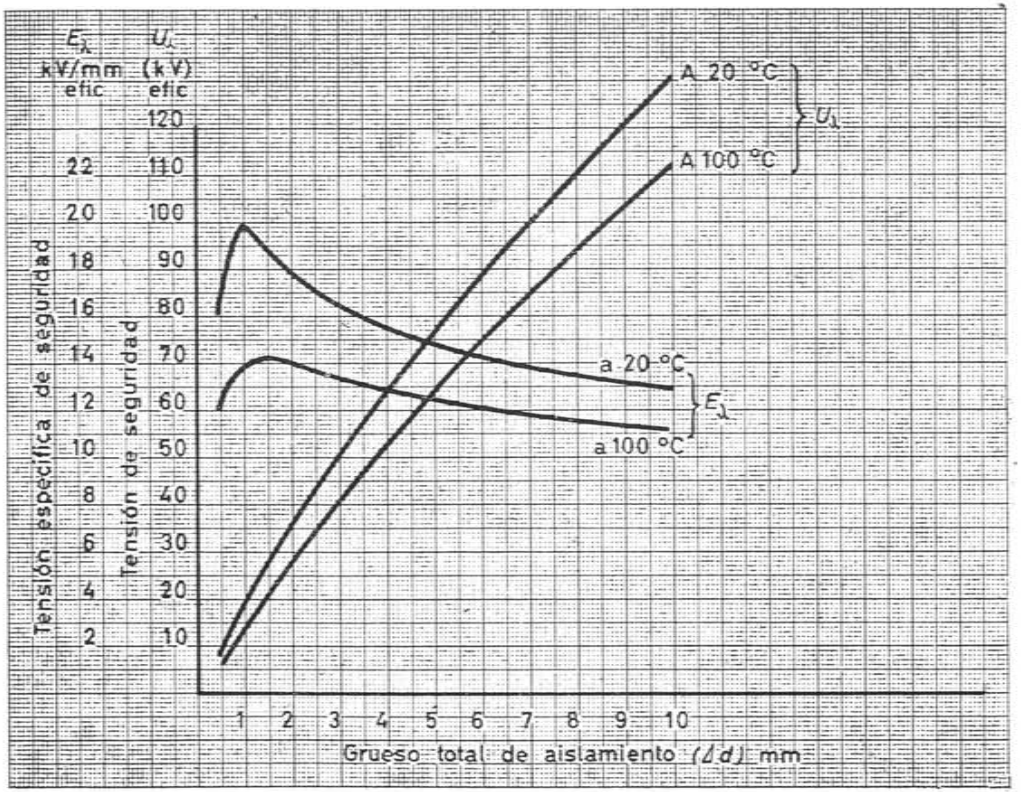


Fig. 1.02.03 c. Variación de la tensión disruptiva de la capa de esmalte (acetal-polivinilo) con el diámetro del conductor (AISMALIBAR).

Fig. 1.02.03 d. Tensiones límite no disruptivas durante 1 minuto, entre espiras, para los conductores aislados con papel; bobinas impregnadas y sumergidas en aceite (seg KEHSE). (Para bobinas al aire y sin impregnar las tensiones se reducen a los 2/3).



sable, elevándose entonces dichas tensiones en un 50 a 100 %. Mejor es el comportamiento de los hilos aislados con papel, sobre todo sumergidos en aceite. Para los transformadores, se emplean recubrimientos que van desde 2 capas, en BT, hasta 20 ó 30 capas en los de tensión muy elevada. El incremento de diámetro con 2 capas viene a ser igual que para el algodón o algo menos (0,2 a 0,3 mm), y los voltajes disruptivos entre conductores, de 4 a 6 kV, sin impregnar, y de 5 a 6 en aceite.

La rigidez dieléctrica E_Δ de estos recubrimientos, oscila por lo general, entre valores tan altos como 50 a 100 kV/mm para los esmaltes (fig. 1.02.03 b), unos 20 kV/mm para 2 capas de papel seco y 20 a 40 % más en aceite. Las restantes fibras quedan entre 2 y 3 kV/mm, sin impregnar, y unos 5 kV/mm sumergidas en aceite.

La fig. (1.02.03 d) muestra varias curvas de «tensiones límites no disruptivas» U_λ y E_λ, entre conductores, en función del aumento de espesor total de los mismos (es decir, en función del doble grueso de aislante) con recubrimiento de papel impregnado, y en aceite. Las cifras varían entre 12 y 20 kV/mm de campo medio no disruptivo.

b) Aislamiento de barras. Las barras de las máquinas de AT no se aislan como las de BT con recubrimientos de esmalte o hilados sino con manguitos formados por cintas de micanita, micafolio, samicanitas, telas barnizadas (tipo Excelsior) e impregnación ulterior en goma laca o compounds. Las cintas y telas barnizadas ofrecen muy buenas características dieléctricas. La rigidez, en los gruesos sencillos, de 0,1 a 0,2 mm, va de 70 a 50 kV/mm respectivamente si están bien secas; en estado de humedad natural desciende hasta unos 40 kV/mm. La cinta de vidrio con silicona, da entre 40 y 50 kV/mm (fig. 1.02.03 e). La fig. (1.02.03 f) muestra la rigidez dieléctrica de la tela aceitada en varias capas, al aire; se halla comprendida entre 35 y 15 kV/mm para 0,3 y 3 mm respectivamente.

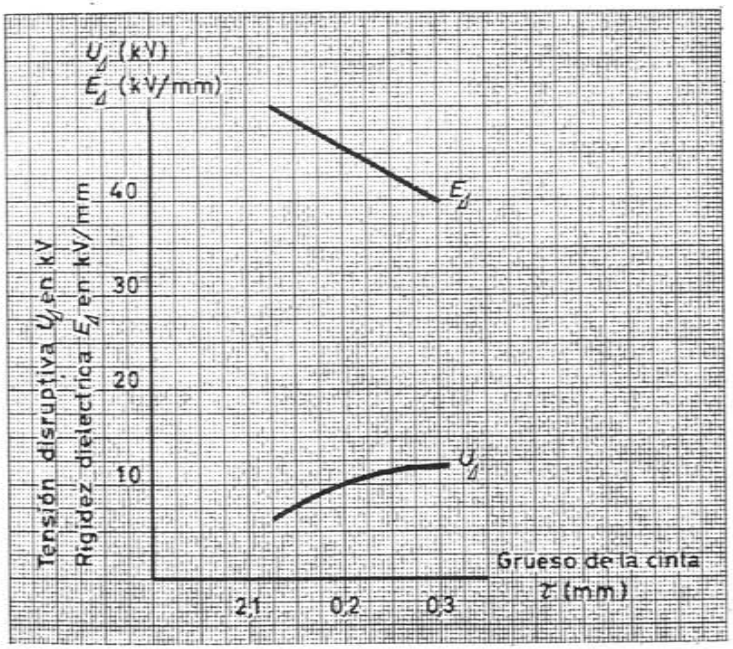


Fig. 1.02.03 e. Rigidez dieléctrica de la cinta de vidrio con siliconas (NATVAR).

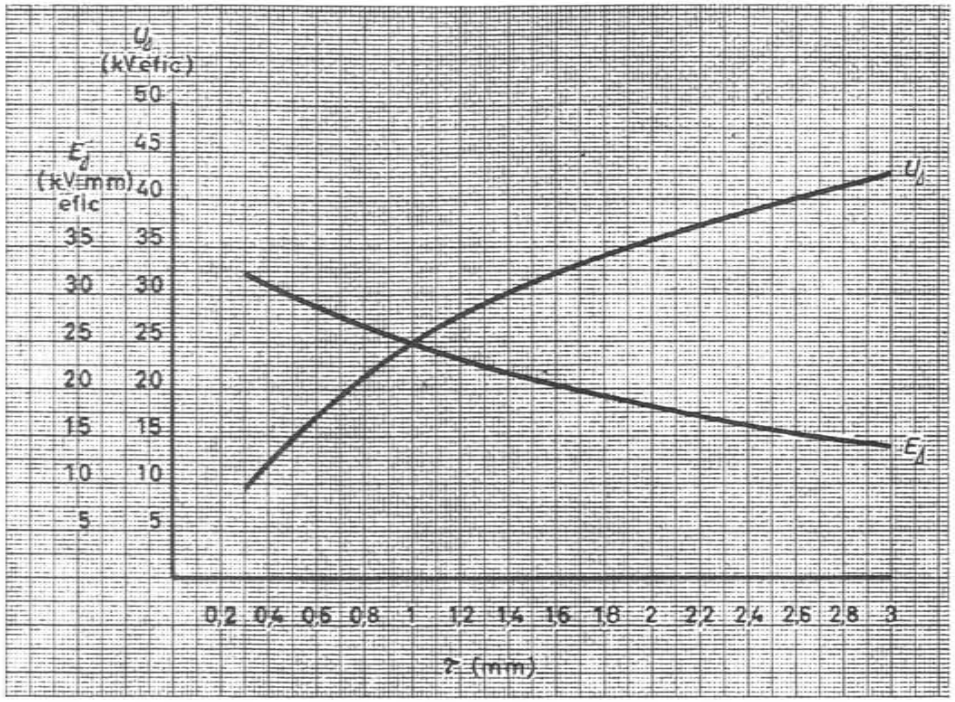


Fig. 1.02.03 f. Rigidez dieléctrica de los recubrimientos de tela aceitada, entre placas, en 1 minuto a 25° C (PEEK).

La micanita moldeable formando también gruesos apreciables da unos valores algo más altos, entre 23 y 38 kV/mm, fig. (1.02.03 g) y el micafolio flexible aún menos: de 17 a 25 kV/mm, fig. (1.02.03 h). El tipo con aglomerante de compound, apto para fuertes espesores en máquinas de alta tensión, ofrece valores entre 15 y 25 kV/mm con gruesos de 5 a 1 mm respectivamente (fig. 1.02.03 i).

c) Aislamiento de ranuras. El aislamiento de ranuras se forma a base de los mismos productos que el de las barras y en las máquinas de baja tensión entran el prespan, leatheroid y, sobre todo, hoy día, los papeles y cartones con películas adheridas de productos sintéticos (poliésteres y triacetatos). Los combinados de poliéster muestran no sólo unas propiedades dieléctricas excelentes sino que, además, la resistencia mecánica al rasgado es inmejorable, lo cual los hace insustituibles para las ranuras de máquinas pequeñas y medianas bobinadas con hilo, donde al introducir éstos se deteriora con facilidad el forro de las mismas hecho a base de cualquier otro material. El prespan, leatheroid y cartones similares, dentro de los espesores corrientes en el aislamiento de ranuras para baja tensión, vienen a ofrecer una rigidez dieléctrica, secos, alrededor de 10 kV/mm.

Las láminas combinadas de prespan y poliester o triacetato, aunque la película de este género no sobrepasa algunas centésimas de mm, alcanzan valores de 30 a 45 kV/mm.

El leatheroid duro se usa sobre todo para cuñas de cierre pero nunca donde pueda entrar en contacto con el aceite.

La tabla (1.02.03 b) proporciona datos sobre estos materiales.

d) Barreras y separadores. Generalmente de prespan, o papel bakelizado en placas y tubos. El prespan se comporta muy bien en aceite; al aire, ofrece una rigidez dieléctrica de 10 o más kV/mm; y el doble, sumergido en aceite de transformadores. La rigidez dieléctrica de los tubos y placas de papel bakelizado al aire es algo superior a la del prespan (aprox. 50 %), y del orden de la de este último en aceite. Las figs. (1.02.03 j) y (1.02.03 k) muestran las curvas disruptivas del prespan en aceite de transformador y la (1.02.03 l) la del papel bakelizado al aire. Las figs. (1.02.03 m) y (1.02.03 n) hacen referencia a las tensiones no disruptivas de este último, en aceite.

Para apoyo y soporte de bobinados y conexiones se usa también la madera tratada con aceite o barnices sintéticos (por lo general, de bakelita), siempre trabajando dieléctricamente en sentido perpendicular a la fibra como debe hacerse con todos los materiales estratificados. Simplemente impregnada de aceite, su rigidez dieléctrica es moderada (entre 1,5 y 2 kV/mm), pero la bakelización y procesos similares eleva este valor hasta el de los separadores normales de prespan o papel bakelizado.

En la tabla (1.02.03 b) se encuentran también datos sobre este material.

e) Otros accesorios aislantes. La porcelana muestra unas características dieléctricas muy buenas y resiste a los agentes atmosféricos siendo casi insustituible para los atravesadores y bornes, sobre todo de intemperie. Llega a 30... 35 kV/mm de rigidez dieléctrica aunque para expesores muy gruesos en piezas acabadas desciende hasta 1/8 de estos valores. La fig. (1.02.03 o) muestra la característica disruptiva de una cierta muestra y la fig. (1.02.03 p) la de los aisladores completos. Los compounds de asfalto son muy importantes como material de relleno e impregnación de aislamientos de

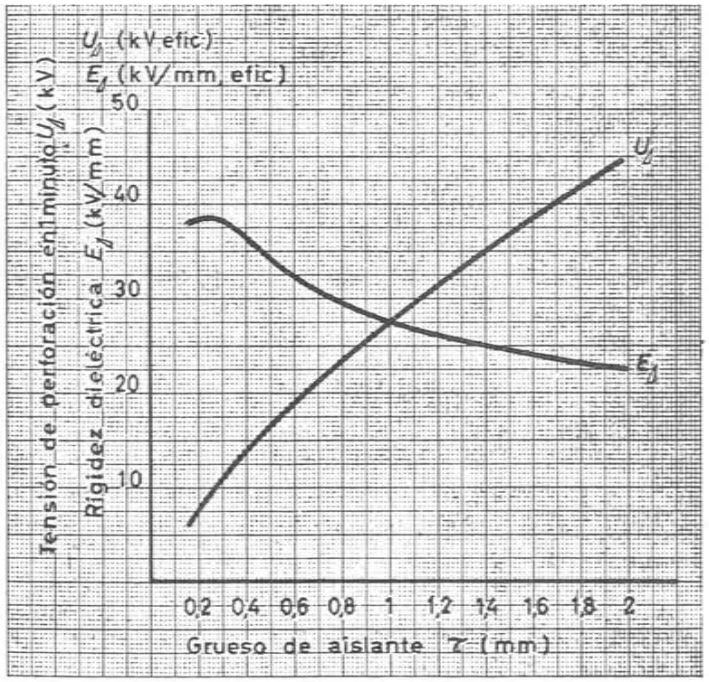


Fig. 1.02.03 g. Rigidez dieléctrica de la micanita moldeable según el grueso (AISMALIBAR).

Tabla 1.02.03 b. — Rigidez dieléctrica de los materiales aislantes.

Partida	Material	Clase	Notas	Fuente	Temp. θ (°C)	Tiempo t_A	Grueso τ (mm)	Tensión disrupt. U_A (kV)	Rigidez dieléctr. E_A (kV/mm)	Uso principal
1	Esmalte acetal-polivinilo, al aire	E	Entre hilos retorcidos	Aismal.	15 a 30		0,05 / 0,1 / 0,14 Δd	4 — 4,7 / 6,5 — 8 / 7,7 — 9,8	80 — 95 / 65 — 80 / 55 — 70	Recubrimiento de conductores
2	Hilo algodón sin impregnar, (2 capas) / al aire (2 capas) / (3 capas)	O	Espesor sencillo	Liwsch. / Kehse / Liwsch.			0,2 Δr / 0,14 Δr / 0,3 Δr	0,55 — 0,65 / 0,53 / 0,7 — 0,9	2,7 — 3,2 / 3,8 / 2,3 — 3	
3	Hilo algodón impregnado, al aire (2 capas)	A	Espesor sencillo	Kehse			0,14 Δr	0,68	4,9	
4	Papel de pescado, sin impregnar, al aire	O		NEMA			0,1	0,79	7	
	Papel sin impregnar, al aire (2 capas)		Espesor sencillo	Kehse			0,25 / 0,105 Δr	2,95 / 2,12	11,8 / 20,2	
6	Papel impregnado, al aire (2 capas)	A	Espesor sencillo	Kehse			0,105 Δr	2,55	24,3	
	» Kraft impregnado, al aire			Westing.		*	0,2	8,5	42	
7	Papel sin impregnar, en aceite	A_D	Entre esferas 25 ϕ	Roth	20	1 min.	0,1	6	60	
			Choque 1/50, hojas				5	110	22	
							0,1	20	200	
8	Papel impregnado y en aceite	A_0	Entre esferas 25 ϕ	Kehse		1 min.	0,05	2,5	50	
							0,1	6	60	
9	Bobinas de transf. impregnadas (papel y algodón) y en aceite	A_0	Entre espiras (doble pared)	Kehse	20	1 min.	0,5 / 8 Δd	8 (1) / 110 (1)	16 (1) / 13,7 (1)	
10	Hilo y trenza de vidrio impregnadas, al aire	B / F	Espesor sencillo	Breitenb			0,0825 / 0,125	0,7 / 0,8	8,5 / 6,4	
11	Tela de vidrio impregnada con isocianato, al aire	F	(Isoglas). Espesor sencillo	Natvar			0,075 / 0,375	5,2 / 15	70 / 40	
	Tela de vidrio impregnada con siliconas, al aire	H	Espesor sencillo	Natvar			0,125 / 0,3	6,2 / 12	50 / 40	
12	Capa de amianto, al aire	B	Espesor sencillo	Breitenb.	20 / 100		0,3 / 0,5 / 0,3 / 0,5	0,73 / 0,83 / 0,6 / 0,7	2,4 / 1,7 / 2 / 1,4	

(1) Tensiones de *prueba admisibles*. A 80-100 °C, el 85%. Al aire, el 66%

Partida	Material	Clase	Notas	Fuente	Temp. θ (°C)	Tiempo t_A	Grueso τ (mm)	Tensión disrupt. U_A (kV)	Rigidez dieléctr. E_A (kV/mm)	Uso principal
13	Cintas de tela barnizadas, al aire	A	Natural	NEMA		Incremento rápido de tensión.	< 0,225		35,4	Recubrimiento de conductores y encintado de bobinas
			Estirada 0,93-1,7 kg/cm				0,225 - 0,25		39,4	
							> 0,25		43,3	
							< 0,225			
							> 0,25			
							0,225 - 0,25			
							> 0,25			
	Cintas de tela impregnadas, al aire	A	Electrodos planos 10 cm ϕ	Peek	25°C	Incr. rap. 1 min. Perm.	1 × 0,3 = 0,3	15,7 / 9,7 / 9	52 / 32 / 30	
						Incr. ráp. 1 min. Perm.	5 × 0,3 = 1,5	54 / 31,5 / 29	36 / 21 / 19	
						Incr. rap. 1 min. Perm.	10 × 0,3 = 3	81 / 42,8 / 36	27 / 14,3 / 12	
	Cinta de tela aceitada amarilla, al aire	A	Natural	Roth		Increm. rápid. de tensión	1 min	0,07	3,5 — 5	50 — 71
			Secada					0,11	4,8	44
			Natural					0,11	8	72
			Secada					0,15	6	40
	Cinta de tela aceitada Excelsior, al aire	A	Natural	Roth				0,15	8,4	56
			Secada					0,22	10,7	49
								0,22	11,6	53
14	Cinta de micafolio, al aire	B		Aismal.		1 min.	0,1	3	30	
		B		Liwsch.			0,2	1 — 3,5	5 — 17,5	
							0,3	2 — 5	6,7 — 16,7	
15		B		Aismal.		1 min.	0,2	3,5	17,5	
	Cinta de micatela, al aire	B		Liwsch.			0,2	1	5	
							0,5	3 — 6	6 — 12	
16	Micanita moldeable (n.° 135) al aire	B		Aismal.		1 min.	0,15	5,7	38	Manguitos de ranura
	Micanita, al aire	B		Liwchs.			2	45	22,5	
	Micafolio, al aire	B		St. H. f. EE.			1	30 — 35	30 — 35	
									16 — 35	
	Micafolio flexible (n.° 155), al aire	B		Aismal.		1 min.	0,2	4	20	
							0,8	15	8,7	

Tabla 1.01.03 b *(continuación)*

Partida	Material	Clase	Notas	Fuente	Temp. ϑ (°C)	Tiempo t_Δ	Grueso r (mm)	Tensión disrupt. U_Δ (kV)	Rigidez dieléctr. E_Δ (kV/mm)	Uso principal
17	Micafolio compound Micafil, en aceite		Entre núcleo cilíndrico y lámina	Roth	20	1 min.	1	26	26	Manguitos de ranura
							5	75	15	
						Instantánea	1	30	30	
							5	100	20	
18	Prespan, al aire	O		Liwsch.			1	10	10	Forro de ranuras
				St. H. f. EE.			0,18	2,3	11,8	
							12,5	49	3,9	
	Prespan duro	O		Guarro			1 — 5		> 10	
	Prespan clases 3 y 4 al aire	O		Whitley	90	1 min.	0,5	7,5	15	
							5	45	9	
19	Leatheroid, al aire	O		Liwsch.			1	10	10	
20	Pap. Kraft + poliéster (Ranurex 1035-A)	Al aire	Tensión instantánea	Aismal.		*	0,15	7	47	
	Prespan + poliéster (» 1045-A)						0,25	10,5	42	
	Prespan + triacetato (» 1041-A)						0,25	9	36	
21	Papel bakelizado en placas (Celisol I), al aire	A		Aismal.	20	1 min.	1	18	18	
							3	40	13,3	
22	Tela bakelizada, al aire	A		St. H. f. EE.		Instant.			6 — 24	
23	Prespan, en aceite	A_o	Entre esferas 25 ϕ	Roth	20	Imin.	1	30	30	Barreras y separadores
							5	100	20	
					90		1	26	28	
							5	88	17,6	
					—	Choq.	1	120	120	
							5	250	50	
	Prespan duro, en aceite	A_o		Guarro			1 — 5		> 30	
	Prespan standard, en aceite	A_o	Entre esferas 25 ϕ	Weidm.		1 min.	1	30	30	
							5	100	20	
	Prespan clases 3 y 4, en aceite	A_o		Whitley	90	1 min.	0,5	18,5	37	
							5	67	13,4	
24	Papel bakelizado en tubos, en aceite	A_o	Entre esferas 25 ϕ	Roth	20	Instantáneo	1	30 — 60	30 — 60	
							5	140 — 180	28 — 36	
						1 min.	1	20 — 30	20 — 30	
							5	95 — 115	19 — 23	
					90		1	18 — 27	18 — 27	
							5	80 — 115	14 — 23	

24	Papel bakelizado en tubos, (Celisol 312 y 312 H), en aceite	A_o	Entre láminas	Aismal.	—	Ch 1/50	3	255	85	Barreras y separadores (continuación)
		A_o			20	5 min.	1	12 (1)	12 (1)	
							3	30 (1)	10 (1)	
					90		1	10 (1)	10 (1)	
							3	24 (1)	8 (1)	
25	Papel bakelizado en placas (Celisol I) en aceite	A_o		Aismal.	20	5 min.	1	30 (1)	30 (1)	
							3	56 (1)	19,7 (1)	
					90		1	17 (1)	17 (1)	
							3	34 (1)	11,3 (1)	
26	Haya tratada y en aceite	A_o	Perpendicular a la fibra	Roth		1 min.	100	160 — 180	1,6 — 1,8	
	impregnada con aceite de linaza						100	160 — 180	1,6 — 1,8	
	» » » mineral						1	35	35	
	estratificada con bakelita						5	60	12	
27	Aceite mineral		Entre puntas	Peek			10	37	3,7	Aceites
				BBC	14		100	140	1,4	
							400	460	1,15	
			Entre esferas 62,5 ϕ	Peek			10	105	10,5	
				BBC	14		100	270	2,7	
							400	480	1,2	
	Aceite mineral, para transformadores		Entre esferas 50 ϕ En serv. Nuevo	VDE				50	20	
							2,5	20	8	
								30	12	
								35	14	
28	Clorodifenil (Pyralene 1467)		Entre esferas 50 ϕ	E.Q. Flix			2,5	50	20	
29	Aire		Entre esferas 50 ϕ	Peek			2	8	4	Aire
			» » 1000 ϕ				10	32	3,2	
							100	275	2,75	
							1000	1400	1,40	
			» puntas				2	2,6	1,3	
							100	75	0,75	
							1000	550	0,55	
30	Porcelana			Roth			3	90 — 105	30 — 35	Varios
	Asfalto			CES/FK 15					32	

(1) Tensiones de *prueba admisibles*: A 80 — 100 °C, el 85%; Al aire, el 66%

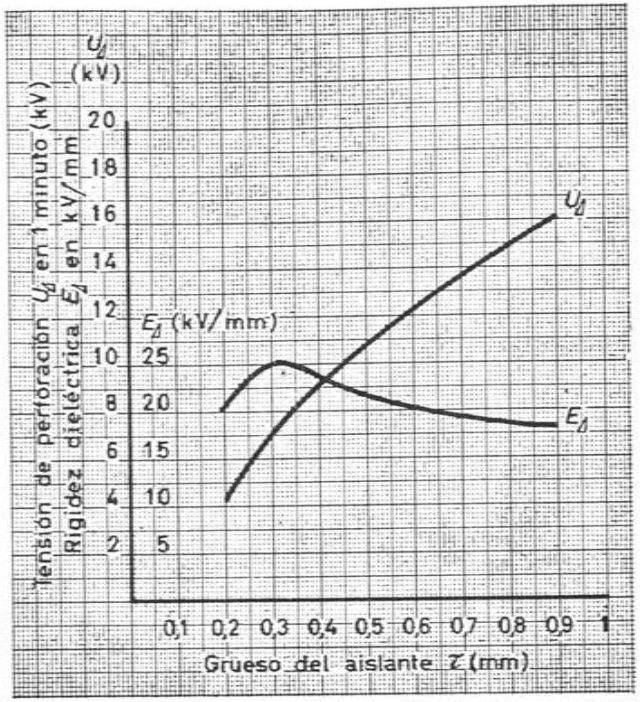


Fig. 1.02.03 h. Rigidez dieléctrica del micafolio flexible 155 (AISMALIBAR).

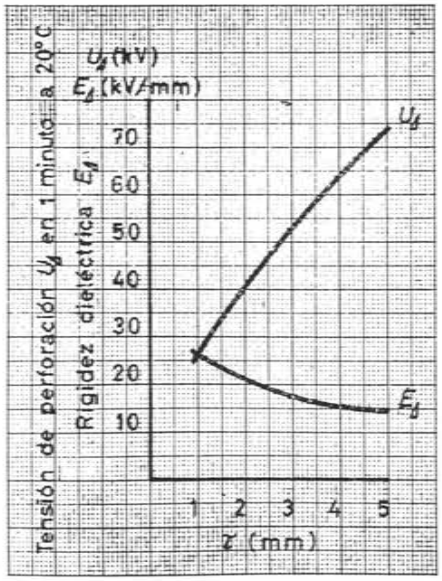


Fig. 1.02.03 i. Rigidez dieléctrica del micafolio al compound en aceite, a 20° entre cilindro y lámina (MICAFIL).

ranura. Su rigidez dieléctrica es de las más elevadas, del orden de la que ofrece la porcelana.

f) Aceite mineral y difeniles clorados. Constituyen el medio aislante y de refrigeración donde van sumergidas las bobinas de los transformadores. Los aceites de hidrocarburos son inflamables; en cambio, los líquidos clorados, no. La densidad de estos últimos se aproxima al doble de la de aquéllos, por lo cual resultan transformadores

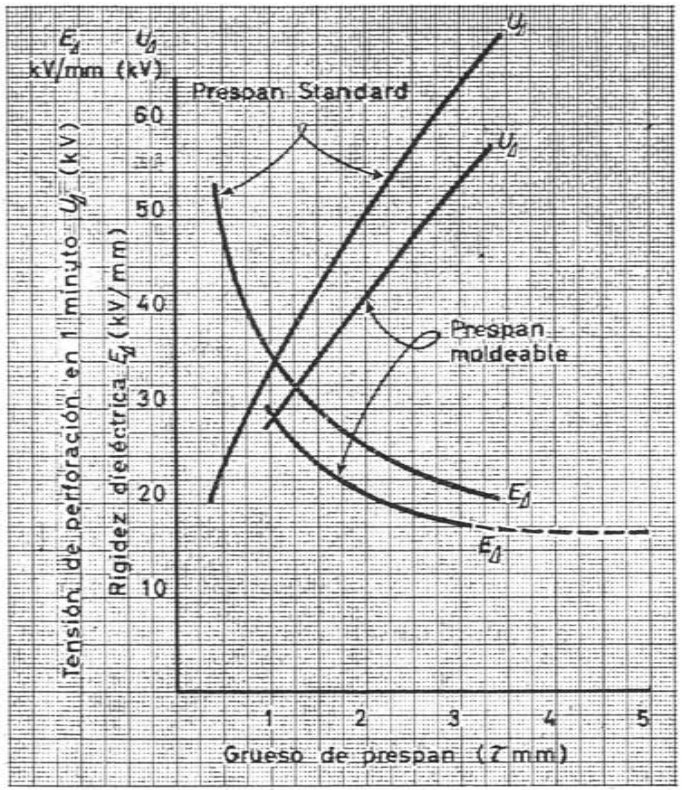


Fig. 1.02.03 j. Rigidez dieléctrica de prespan (transformerboard) en aceite (WEIDMANN)

más pesados, y de precio superior. La rigidez dieléctrica es similar para unos y otros, y se halla muy afectada por el más ligero contenido de humedad. Perfectamente secos, sobrepasan los 20 kV/mm entre esferas de 50 mm a 2,5 mm de distancia. Conviene contar con la tensión disruptiva entre puntas, y para separaciones ya que el orden de 100 mm el valor desciende a 1,4 kV/mm y a 1,1 para 400 mm de separación con aceites nuevos. En el proyecto se parte de 1 kV/mm como rigidez dieléctrica segura, al fijar las distancias a masa, o entre partes activas.

La fig. (1.02.03 q) muestra las curvas normales de tensiones disruptivas entre esferas y entre puntas para el aceite y las (1.02.03 r y s) las correspondientes a las ondas de choque, mucho más elevadas (compárese con la curva de puntos, entre esferas a frecuencia industrial).

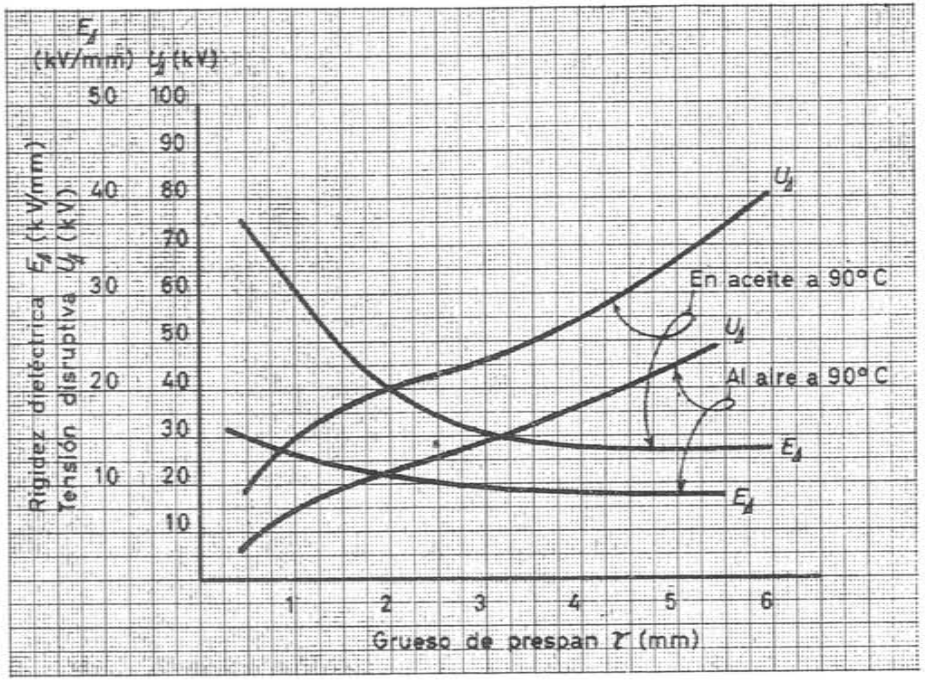


Fig. 1.02.03 k. Rigidez dieléctrica del Prespan clases 3 y 4 en función del grueso s/WHITELEY (ROTH).

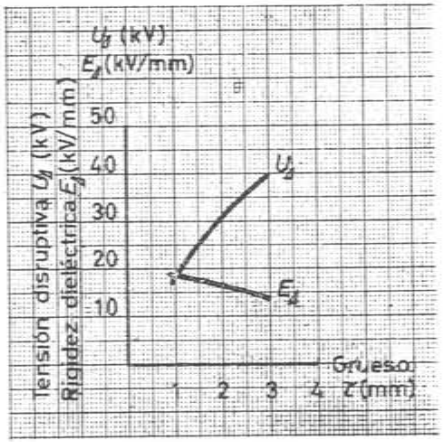


Fig. 1.02.03 l. Rigidez dieléctrica de las placas de Celisol I al aire (AISMALIBAR).

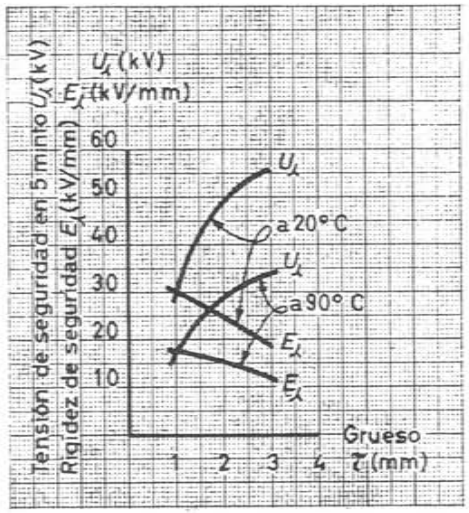


Fig. 1.02.03 m. Tensión de seguridad en 5 minutos de las placas de Celisol I en aceite (AISMALIBAR).

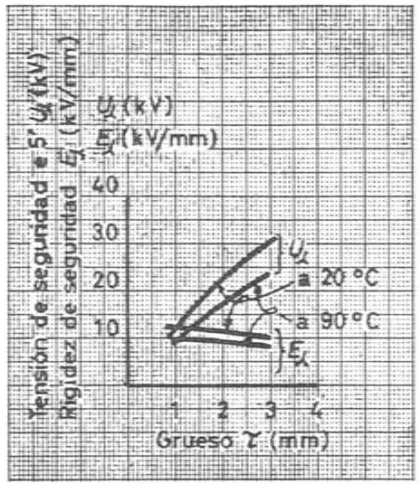


Fig. 1.02.03 n. Tensión de seguridad en 5 minutos de los tubos de Celisol I en aceite (AISMALIBAR).

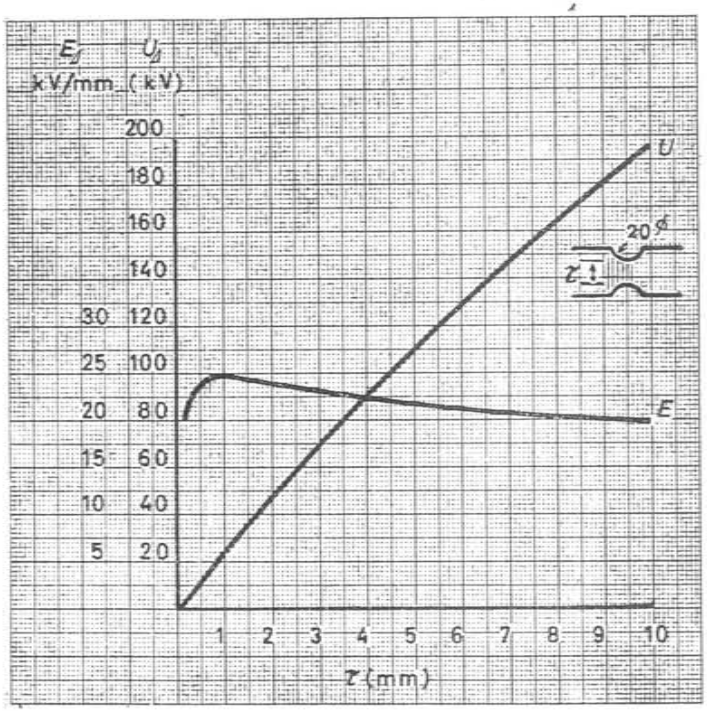


Fig. 1.02.03 o. Rigidiez dieléctrica de la porcelana entre esferas incrustadas de 20 mm Φ. Aumento de tensión a razón de 5 kv/min (HERMSDORF).

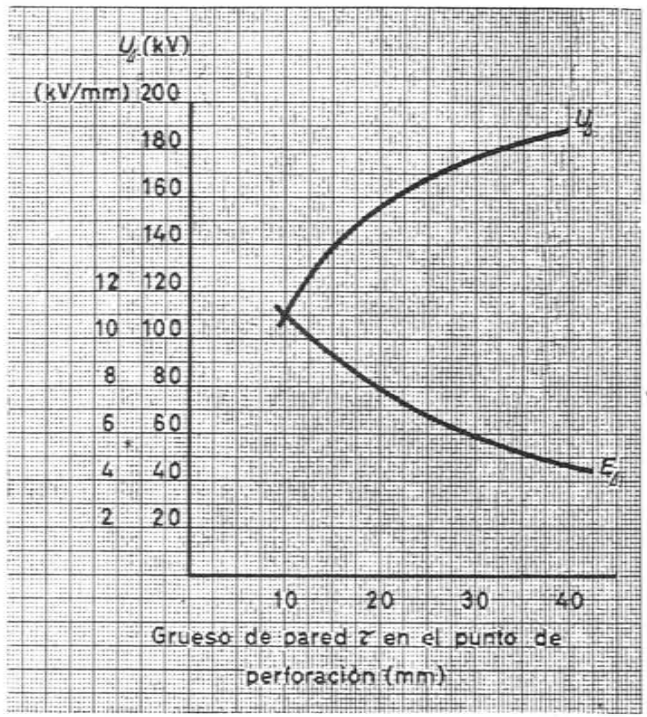


Fig. 1.02.03 p. Ensayos de rigidez dieléctrica en aisladores de porcelana. Incremento de tensión a razón de 5 kv/min. (HERMSDORF).

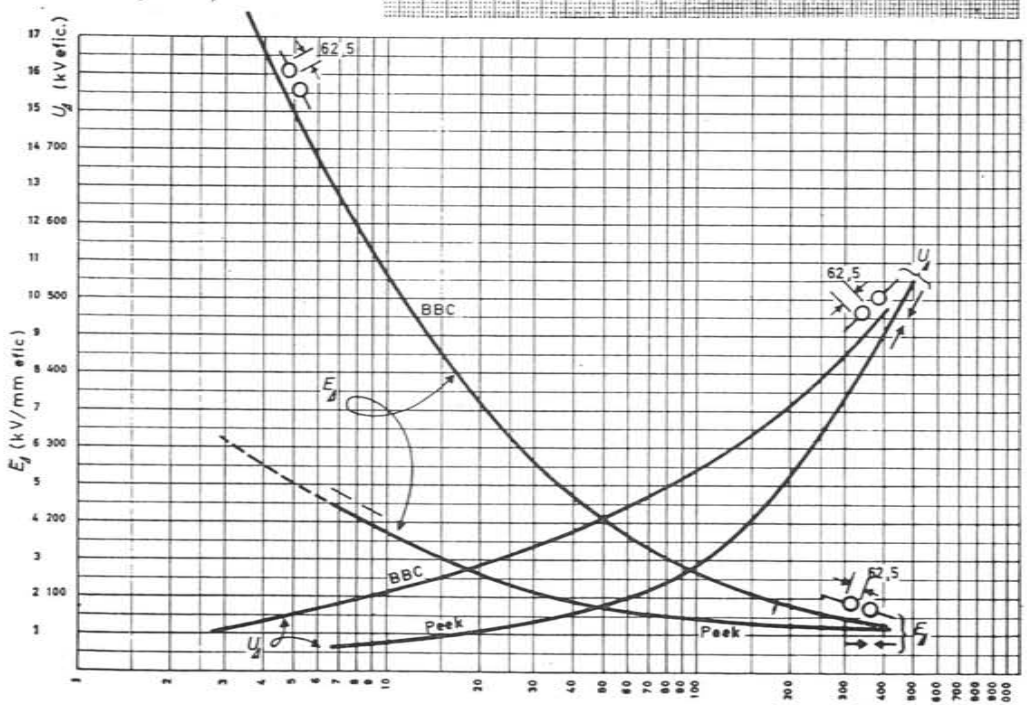


Fig. 1.02.03 q. Rigidez dieléctrica del aceite nuevo entre puntas y entre esferas de 62,5 mm. (PEEK y BBC).

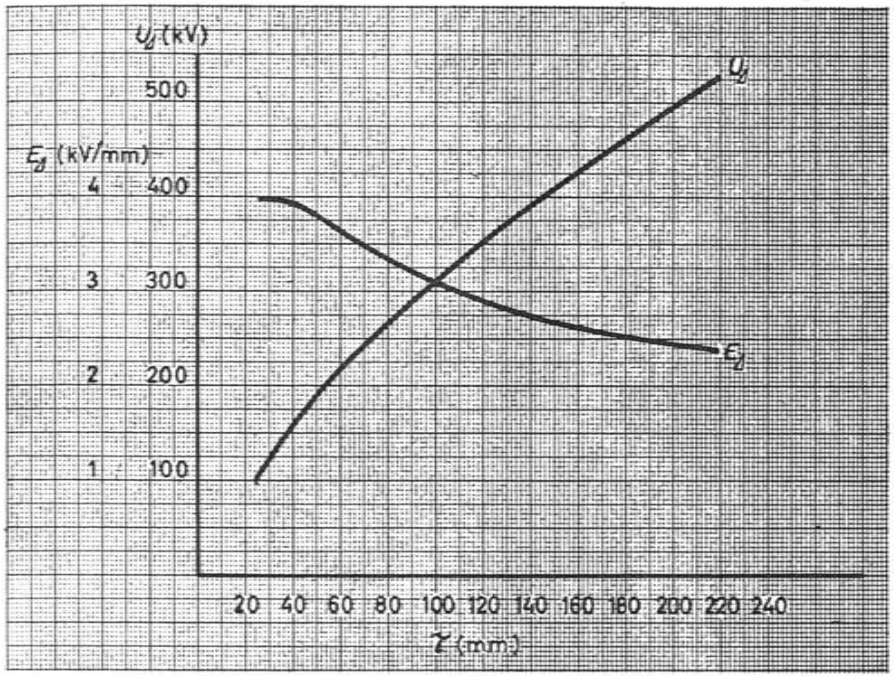


Fig. 1.02.03 r. Rigidez dieléctrica del aceite a las ondas de choque, 1/50 entre puntas (Interpolac. de DAVIS, STANDING y BOWDLER).

g) Aire. El valor característico de la rigidez dieléctrica es el de 2,2 kV eficaces/mm, o $2{,}2\sqrt{2} = 3{,}1$ kV/mm de cresta entre esferas de 50 mm separadas a 1 cm de distancia (3,2 kV/mm según las normas VDE), a la presión normal y temperatura de 20 °C. En condiciones atmosféricas distintas varía en razón directa a la densidad relativa $\overset{*}{\gamma}$ del aire dada por

$$\overset{*}{\gamma} = \frac{b}{760}\,\frac{273 + 20}{273 + \theta}$$

siendo b la presión barométrica en Torr (mm de columna de mercurio) y θ la temperatura de ensayo en °C.

La corrección influye en las distancias disruptivas a prever para las máquinas y transformadores que han de ir instalados en cotas elevadas, como sucede en muchas centrales hidroeléctricas de montaña. La fig. (1.02.03 t) da la variación de presión barométrica con la altura sobre el nivel del mar.

Así por ejemplo, a 2 000 m de altitud ($b \approx 600$ Torr) y con 30 °C de temperatura ambiente, habrá que multiplicar los valores de la rigidez dieléctrica del aire por

$$\overset{*}{\gamma} = \frac{600}{760}\,\frac{273 + 20}{273 + 30} = 0{,}825 \qquad [1.02.02.\ e]$$

es decir, que experimentan una reducción, apreciable, del 17,5 %.

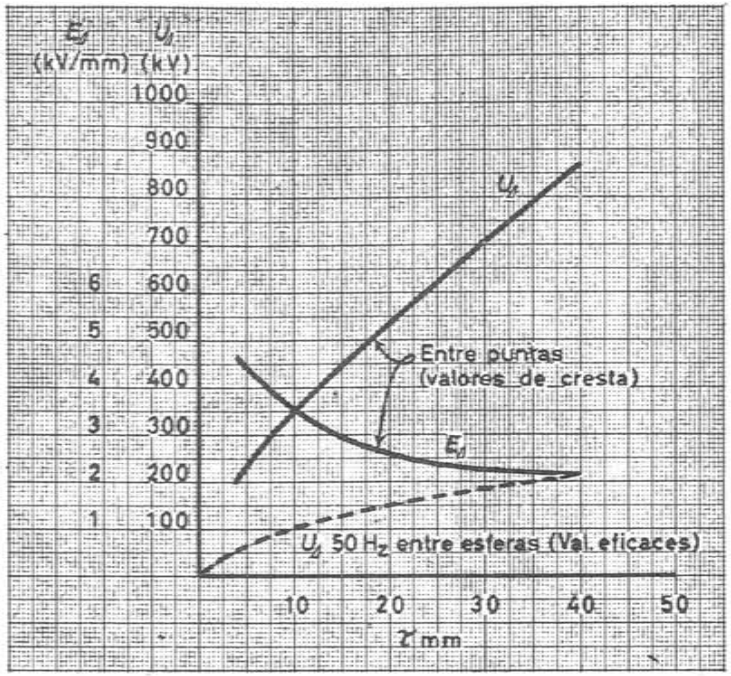


Fig. 1.02.03 s. Rigidez dieléctrica del aceite a las ondas de choque 1/50 entre puntas. (Interpol de DAVIS, STANDING y BOWDLER).

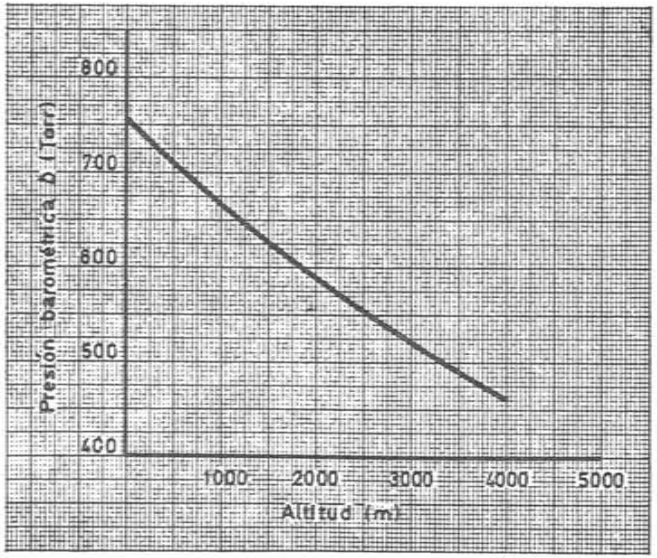


Fig. 1.02.03 t. Variación de la presión barométrica con la altura sobre el nivel del mar.

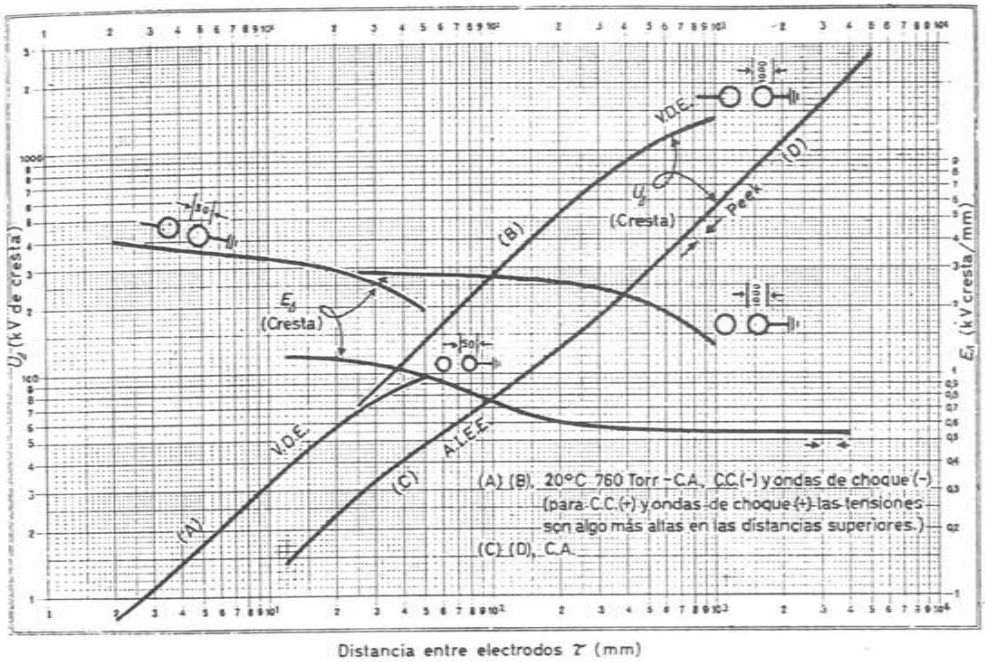


Fig. 1.02.03 u. Rigidez dieléctrica del *aire* (voltajes de cresta). (Entre punta y plano, un 20 % menor que entre puntas).

Entre puntas y a partir de una separación de 20 cm, la rigidez se halla entre 0,4 y 0,5 kV de cresta por mm. (0,28 y 0,35 kV eficaces/mm).

La frecuencia o duración del ensayo influye muy poco sobre estos valores y las mismas curvas de rigidez dieléctrica (fig. 1.02.03 u) sirven prácticamente para tensión continua, alterna de frecuencia industrial y ondas de choque (tomando, naturalmente, los valores de cresta).

La tabla (1.02.03 b) contiene, finalmente, abundantes datos sobre la rigidez dieléctrica de los materiales aislantes que se emplean en la construcción de máquinas rotativas y transformadores.

1.02.04. **Rigidez dieléctrica superficial** E_σ

Se refiere a la tensión disruptiva U_σ a lo largo de las superficies o líneas de fuga (descargas rampantes), por unidad de distancia entre los electrodos. Suele darse en kV/mm y, precisamente, en valores eficaces, salvo otra indicación expresa. Estos valores, que dependen de la naturaleza y estado de la superficie son muy distintos según que la misma se halle expuesta al aire más o menos húmedo o sumergida en aceite. De todos modos, el voltaje disruptivo

a lo largo de un camino superficial alcanza valores muy inferiores (1/2 a 1/3) de los que se consiguen a través de la masa misma de aire o de aceite, sobre todo para grandes distancias. Por eso es indispensable aumentar las líneas de fugas mediante escalonados, valonas salientes, campanas, etc.

La fig. (1.02.04 a) muestra dos curvas comparativas de la rigidez dieléctrica entre placas al aire con la interposición de un cilindro liso de porcelana y sin éste. A partir de los 10 cm de distancia la tensión disruptiva desciende en el primer caso a 0,6 kV/mm mientras que para el aire sólo, viene a ser tres veces mayor. La fig. (1.02.04 b) muestra la curva de descarga superficial para un borne liso de papel bakelizado tipo condensador. A partir de 1 m de distancia entre electrodos no se consigue que la tensión disruptiva

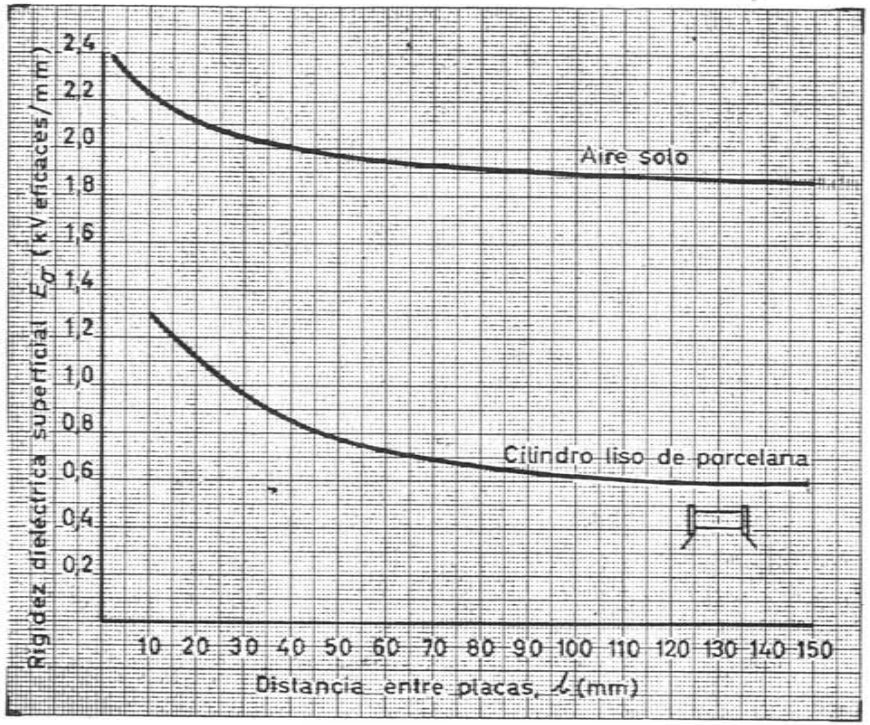


Fig. 1.02.04 a. Rigidez dieléctrica superficial de un cilindro de porcelana liso entre placas al aire, a 50 Hz (SCHVAIGER).

aumente. Por debajo de esta distancia la rigidez superficial se mantiene bastante constante, pero en poco más de 0,35 kV/mm. Incluso con electrodos redondeados, la rigidez dieléctrica se aproxima a la del aire entre puntas; la fig. (1.02.04 c) que concuerda bastante con la (1.02.04 b) indica, además, los valores de la tensión disruptiva entre puntas, con cifras próximas a los 0,35 kVeficaces/mm.

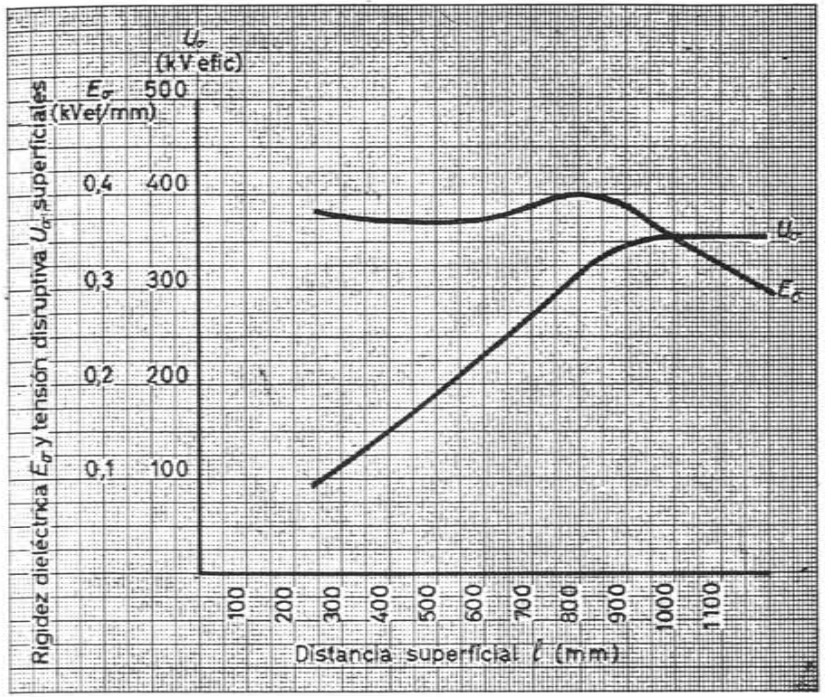


Fig. 1.02.04 b. Rigidez dieléctrica superficial de un borne liso de papel bakelizado tipo condensador (MICAFIL).

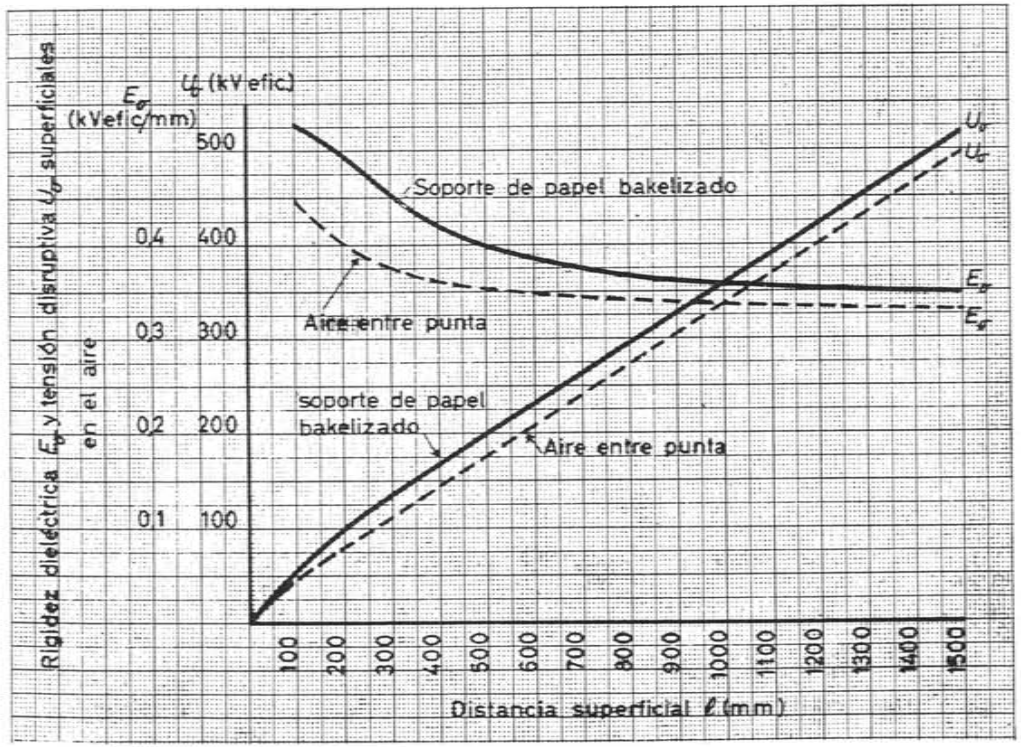


Fig. 1.02.04 c. Rigidez dieléctrica superficial de un soporte de papel bakelizado con electrodos redondeados (MICAFIL).

Una vez más son los valores de esta disposición de electrodos los que hay que tener en cuenta para el proyecto de las máquinas eléctricas. Así, por ejemplo, en los transformadores secos de distribución se recomienda como veremos, dejar unas distancias entre los devanados de AT apoyados en los tubos de bakelita y el núcleo, a razón de 3 mm/kV de tensión de prueba (0,33kV/mm) aunque señalando un mínimo de 10 mm, como precaución suplementaria.

El pasatapas tipo condensador de un transformador de 60 kV para interior presenta una longitud libre del tubo de bakelita entre brida y terminal de conexión exterior de 700 mm y la tensión de ensayo a frecuencia industrial del transformador es de 140 kVeficaces, lo que da como coeficiente de trabajo superficial, en pruebas, $\frac{140}{700} = 0{,}2$

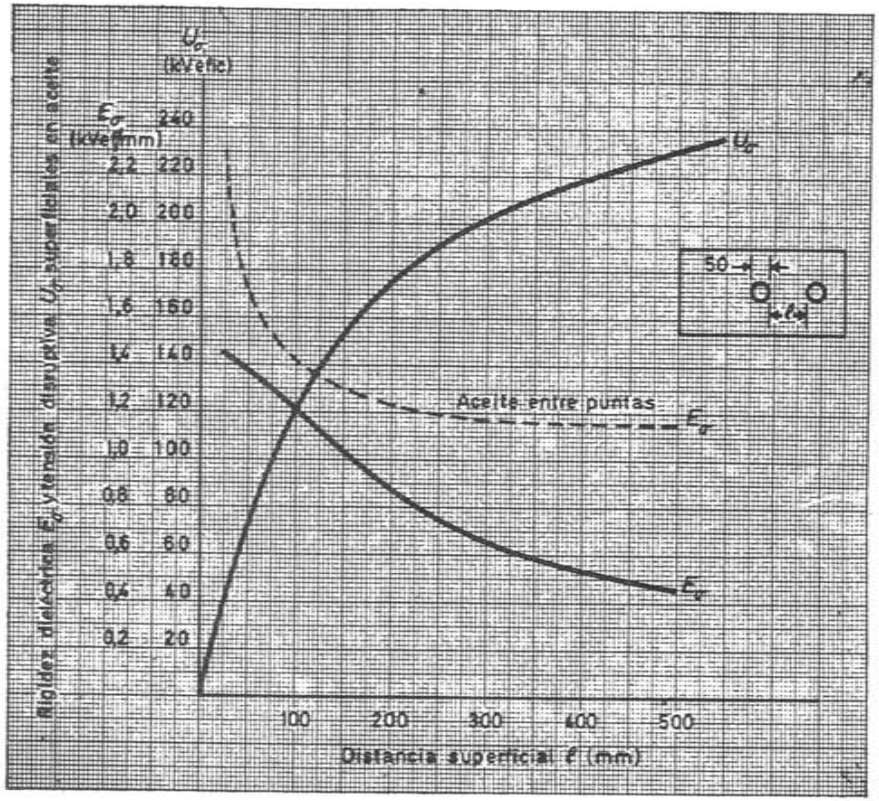


Fig. 1.02.04 d. Rigidez dieléctrica superficial del papel bakelizado en aceite, medida entre láminas de discos adheridas, de 50 Φ (MICAFIL).

kV/mm, ofreciendo así un coeficiente de seguridad $\approx \frac{0{,}35}{0{,}2} = 1{,}75$. Para 220 kV de tensión nominal (460 kV de ensayo) la misma distancia viene a ser de unos 2 000 mm y el coeficiente de trabajo a esta última continuaría alrededor de $\frac{460}{2\,000} = 0{,}23$ kV/mm.

Si las superficies van sumergidas en aceite, la rigidez dieléctrica superficial se duplica o triplica, tanto más cuanto más cortas son las separaciones, pero alcanza valores apenas mitad que para el aceite entre puntas. La fig. (1.02.04 d) nos muestra unos ensayos típicos.

En los transformadores, por ejemplo, las distancias rectas de resbalamiento se eligen a razón aproximadamente de 1,5 kV/mm de tensión de prueba para las tensiones reducidas (sin bajar nunca de 10 mm), descendiendo a menos de 1 kV/mm para las tensiones muy elevadas, evitándose siempre que sea posible los trayectos superficiales directos; el uso de valonas o sombreretes salientes es casi general.

1.02.05. **Constante dieléctrica** ε

La intensidad media del campo eléctrico E [1] entre dos electrodos separados por un dieléctrico a la distancia τ y sometidos a una d.d.p. U, es decir,

$$E = \frac{U}{\tau}$$

es de la misma naturaleza que la c.d.t por unidad de longitud en un conductor $\frac{U}{l}$

Esta última expresión puede transformarse también, para un elemento homogéneo, de longitud l y sección uniforme S en

$$\frac{U}{l} = \frac{\Delta}{\chi}$$

(puesto que $U = RI = \frac{l}{\chi s} I = \frac{l}{\chi} \Delta$)

o bien

$$\boxed{\Delta = \left(\frac{U}{l}\right) \chi} \qquad [1.02.05\ a]$$

siendo Δ la densidad de corriente, χ la conductividad del material y s su sección. A igualdad de tensión lineal $\left(\frac{U}{l}\right)$, la densidad de la corriente que circula es directamente proporcional a la conductividad χ de la cual depende únicamente.

(1) No se confunda este símbolo electrostático de la intensidad de campo eléctrico con el mismo E, empleado más adelante para la f.e.m. Al representar idénticamente ambas magnitudes seguimos las normas DIN, confiando en que no se derivará de ello defecto alguno de interpretación.

Análogamente bajo el campo electrostático $E = \frac{U}{\tau}$ la densidad de carga D que aparece entre los extremos de un elemento dieléctrico homogéneo de grueso τ y sección uniforme S, viene dada por

$$D = \frac{Q}{S},$$

(Q, carga eléctrica por electrodo; S superficie de uno de éstos).

D se halla relacionada con la intensidad de campo E a través de la ecuación fundamental que define a la capacidad C.

Con Q en coulombios, U en voltios y C en faradios, es

$$Q = C\ U \qquad \text{(C)};$$

y como la capacidad es proporcional a la superficie S de los electrodos e inversamente proporcional a su separación τ, (constante de proporcionalidad, $\varepsilon_o\ \varepsilon$),

$$C = \varepsilon_o \varepsilon \frac{S}{\tau}, \qquad \text{[1.02.05 b]}$$

resulta $$\boxed{D} = \frac{Q}{S} = \frac{C\ U}{S} = \varepsilon_o \varepsilon \frac{S}{\tau}\frac{U}{S} = \boxed{\boxed{\left(\frac{U}{\tau}\right)\varepsilon_o\ \varepsilon}} \qquad \text{[1.02.05 c]}$$

Si S está en cm² y τ en cm, ε_o vendrá dado en $\frac{\text{F} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2}$

Comparando las fórmulas anteriores [a], [b] y [c] se ve la analogía e identidad de expresión que existe entre la conductancia eléctrica $G = \chi\ \frac{s}{l}$ y la capacidad dieléctrica $C = \varepsilon\varepsilon_o \frac{S}{\tau}$ así como entre la conductividad χ y la constante de proporcionalidad $\varepsilon_o\ \varepsilon$ del campo electrostático o entre la densidad de corriente Δ y la de carga D en uno y otro caso. La característica ε constituye también una propiedad del material aislante y lo mismo que χ está sujeta a influencias de múltiple naturaleza que señalaremos, entre las cuales cabe mencionar como muy importante la temperatura.

A la densidad de carga D se la denomina *desplazamiento* (1) y al coeficiente ε *constante dieléctrica* o *poder inductor específico* del dieléctrico. Con D

(1) Por la idea física de que su presencia se debe a la desviación que experimentan entre sí las cargas nucleares, positivas y negativas, bajo la acción del campo eléctrico, sin llegar a la ruptura de los lazos que las mantienen ligadas, es decir, sin que aparezca la conducción eléctrica que equivaldría en este caso al fenómeno disruptivo.

en culombios/cm² y E en V/cm; ε_o vale para el vacío (y para el aire) $0{,}08842 \cdot 10^{-12}$ $\frac{\text{F} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2}$ siendo éste el valor más bajo de todos los conocidos en los diversos tipos de aislantes.

En las aplicaciones industriales y en particular para el cálculo de máquinas interesa más que el valor absoluto ($\varepsilon_o\ \varepsilon$) su valor relativo, que hemos representado por ε, con respecto al del aire. Entonces la fórmula [b] puede escribirse

$$C = (0{,}08842\ \varepsilon)\ \frac{S}{\tau} \cdot 10^{-12} \qquad \text{(F)} \qquad \text{[1.02.05 d]}$$

(S en cm² y τ en cm.)

Efectivamente; para el aire

$$C = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{\tau}\ \text{statfaradios}$$

y para cualquier otro dieléctrico

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{S}{\tau}\ \text{statfaradios}$$

o bien

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi\ (9 \cdot 10)^{11}}\frac{S}{\tau}\ \text{faradios}$$

$$= \frac{\varepsilon S}{\tau}\, 0{,}08842 \cdot 10^{-12} \qquad \text{(F)}$$

El valor de ε (constante dieléctrica relativa) basta, como veremos para determinar la repartición del campo eléctrico entre las varias capas de aislantes distintos que constituyen por regla general los sistemas de aislamiento y, por tanto, es fundamental en la previsión de la tensión disruptiva.

1.02.06. Disposición de los dieléctricos por capas paralelas en serie

Se deduce, efectivamente que si el espacio entre dos electrodos A y B, fig. (1.02.06 a) se halla ocupado por varios aislantes sucesivos 1, 2,..., i..., formando capas paralelas en serie, de la misma sección S, gruesos respectivos τ_1, τ_2, ... τ_i..., constantes dieléctricas relativas ε_1, ε_2, ..., ε_i..., o capacidades individuales C_1, C_2, ..., C_i... y se aplica entre los electrodos una d.d.p U, a la cual corresponde, pues, una intensidad de campo medio,

$$E = \frac{U}{\Sigma\tau_i} = \frac{U}{\tau} \qquad \text{[1.02.06 a]}$$

las respectivas tensiones por capa se distribuyen proporcionalmente a sus longitudes e inversamente a las constantes dieléctricas de cada una de ellas:

$$\frac{U_i}{U_j} = \frac{\left(\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}\right)}{\left(\frac{\tau_j}{\varepsilon_j}\right)}; \qquad [1.02.06\text{ b}]$$

o las intensidades de campo en proporción inversa de los poderes inductores específicos, independientemente de los gruesos respectivos

$$\boxed{\frac{E_i}{E_j} = \frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}} \qquad [1.02.06\text{ c}]$$

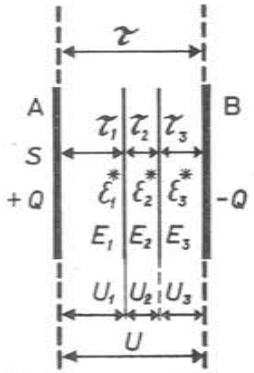


Fig. 1.02.06 a. Sistema de varias dieléctricas en serie.

Referidas las tensiones parciales a la tensión total U y las intensidades de campo a la intensidad media del mismo E_m, se deduce para las primeras

$$\boxed{\frac{U_i}{U} = \frac{\left(\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}\right)}{\Sigma\left(\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}\right)}} \qquad [1.02.06\text{ d}]$$

y para los segundos

$$\boxed{\frac{E_i}{E_m} = \frac{\left(\frac{\tau}{\varepsilon_i}\right)}{\Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}}} \qquad [1.02.06\text{ e}]$$

o bien

$$\boxed{\frac{E_i}{E_m} = \frac{1}{\frac{\varepsilon_i}{\tau}\Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}}} \qquad [1.02.06\text{ f}]$$

Todo ello se desprende de simples transformaciones matemáticas como sigue:

Las conocidas leyes de los circuitos electrostáticos, similares a las de los circuitos electrodinámicos nos dicen que

$$U = \Sigma\, U_i = \frac{Q}{C} \qquad [1.02.06.\text{ g}]$$

a la vez que dan para la capacidad combinada C la fórmula

$$\frac{1}{C} = \Sigma\frac{1}{C_i} = \Sigma\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_i\frac{S}{\tau_i}} = \Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_0\varepsilon S} \qquad [1.02.06.\text{ h}]$$

y para las tensiones parciales,

$$U_i = \frac{Q}{C} \qquad [1.02.06.\text{ b}]$$

Las intensidades de campo son:

$$E_i = \frac{U_i}{\tau_i} \qquad [1.01.06.\text{ j}]$$

Por consiguiente,

$$\frac{U_i}{U} = \frac{C}{C_i} = \frac{1}{\Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_i S}}\frac{\tau_i}{\varepsilon_i S} = \frac{\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}}{\Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}}$$

tal y como vemos en la ecuación [d]

Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por $\frac{\tau}{\tau_i}$,

$$\frac{\left(\frac{U_i}{\tau_i}\right)}{\left(\frac{U}{\tau}\right)} = \frac{E_i}{E_m} = \frac{\frac{\tau_i}{\varepsilon_i\,\tau_i}}{\tau\,\Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}} = \frac{\frac{\tau}{\varepsilon_i}}{\Sigma\frac{\tau_i}{\varepsilon_i}}$$

según se expresa en [e]

El caso de solo dos aislantes distintos 1 y 2 en serie, que conduce a,

$$\frac{E_1}{E_m} = \frac{\tau}{\varepsilon_1\left(\frac{\tau_1}{\varepsilon_1} + \frac{\tau_2}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{1}{\frac{\tau_1}{\tau} + \frac{\tau_2}{\tau}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}$$

nos deja ver fácilmente que la intensidad del campo eléctrico E_1 en la capa 1, a medida que τ_1 tiende hacia cero, y por tanto τ_2 hacia τ, se aproxima hacia un límite tal que

$$\frac{E_1}{E_m} \to \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

Si la constante dieléctrica de la otra capa 2 es superior a ε_1, el valor límite de E_1 superará al valor medio E_m justamente en la relación citada $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$.

Esto conduce a la aparente paradoja de que, a veces, aumentando el grueso del mejor aislante, creyendo así reforzar la rigidez dieléctrica del conjunto, lo que se consiga sea provocar la perforación del otro y una vez

puesto este último en cortocircuito por el arco disruptivo, la tensión íntegra quede aplicada al primero perforándolo también o, cuando menos, ponga en peligro la seguridad del sistema. De ello, daremos en seguida un ejemplo numérico.

Se comprende lo perjudiciales que han de resultar las delgadas películas de aire mal eliminado de las bobinas en las máquinas de A.T., películas sometidas por las razones expuestas a un intenso campo eléctrico que las ioniza generándose ozono sumamente activo como oxidante del resto de los aislantes sólidos y barnices de impregnación.

Tabla 1.02.07 a. — Tensiones de ensayo U_π de las máquinas rotatorias (según las Normas VDE)

Part.	Tipo del bobinado	Potencia y tensión nominales U_n		Tensión eficaz de prueba U_π a 50 Hz durante 1 minuto(1)
1	Bobinados en general (salvo las partidas siguientes 6 a 10)	Potencia nominal < 1 kW o < 1 kVA		2 U_n + 0,5 kV
2		Potencia nominal ≥ 1 kW o 1 kVA	$U_n \leq$ 2kV	2 U_n + 1 kV (min. 1,5 kV)
3			2 kV < $U_n \leq$ 6 kV	2,5 U_n
4			6 kV < $U_n \leq$ 16,5 kV	2 U_n + 3 kV
5			$U_n >$ 16,5 kV	A convenir
6	Devanados inductores de las máquinas sincrónicas	Cerrados siempre sobre otro devanado o resistencia		10 U_n (de la excitatriz) (mín. 1,5 kV) (máx. 3 kV)
7	Devanados inductores de máq. de cont. con excit. independ.			2,5 U_n (de la excitatriz) + 1 kV (mín. 1,5 kV)
8	Devanados secundarios, bobinados de mot. de inducción	Sin frenado a contracorriente		2 U_n (del devan. secund. a circuito abierto) + 1 kV
9		Con frenado a contracorriente		4 U_n (del devan. secund. a circuito abierto) + 1 kV
10	Excitatrices			La misma del devanado que alimentan

(1) Si el neutro permanece rígidamente unido a tierra, se tomará en lugar de U_n, (0,8 U_n) y si se une rígidamente a tierra un activo, (1,1 U_n)

Tabla 1.02.07 b. — Tensiones de ensayo U_π de los transformadores industriales (según las normas VDE)

Tensión de serie kV eficaces	Máxima tensión de servicio kV eficaces	Tensión de prueba a masa y entre devanadores kV eficaces	Tensión de prueba inducida (auto-excitados) kV eficaces	Tensión de choque 1/50 μs kV cresta	Atravesadores kV eficaces
Transformadores de aislamiento constante					
0,5	0,6	2,5	2,5	—	5
1	1,15	3,5	3,5	20	10
3	3,5	10	10	40	27
6	7	20	20	60	33
10	11,5	30	30	80	42
15	17,5	40	40	100	53
20	23	50	50	125	64
30	35	70	70	170	86
45	52	90	90	235	119
60	70	110	120	300	152
110	125	220	220	505	262
150	170	300	300	650	350
220	250	440	440	910	505
Transformadores de aislamiento escalonado con neutro a tierra					
110	125	—	175	430	210
150	170	—	240	550	280
220	250	—	355	780	405
300	330	—	484	1000	545
380	420	—	640	1450	750

1.02.07 Ejemplo

El aislamiento de ranuras de un alternador de 9 000 kVA, 14kV, 750 r/m está constituido, como puede verse en la figura (1.02.07 a). Cada tres barras en paralelo forman un conductor aislado con cinta de micaseda solapando a 2/3 y un espesor de pared de 0,5 mm; el manguito en ⊃ de separación entre conductores es de tela impregnada, de 0,6 mm de grueso; la bobina de tres conductores va cubierta a su vez por otro manguito de micafolio enrollado hasta el grueso de 3 mm; y encima, cinta de algodón barnizada, hasta 0,6 mm de espesor.

El conjunto perfectamente impregnado y evacuado de aire se introduce resbalando sobre una guía de prespan de grueso igual a 0,3 mm y se prevé un juego de montaje de 0,6 mm en anchura que después se procura rellenar muy bien con compound.

Calculemos las solicitaciones dieléctricas de los varios aislantes durante la prueba entre bobinado y masa a la tensión de

$$U_\pi = 2U + 3 = 2 \cdot 14 + 3 = 31 \text{ kV}$$

(según la tabla 1.02.07 a) suponiendo primero que el llenado de la ranura sea irreprochable y, después, que el juego de 0,6 mm quede libre, es decir, al aire.

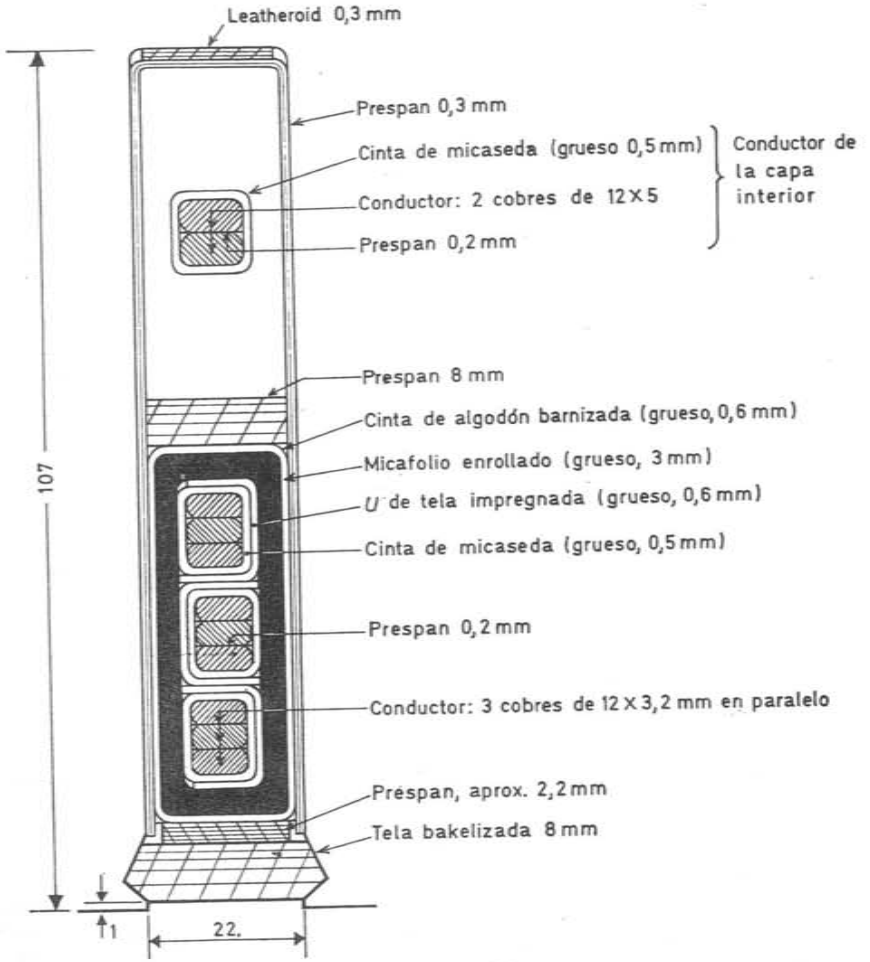


Fig. 1.02.07 a. Ranura de un alternador de 9000 kVA, 14 kV.

Anchura de ranura

Cobre		12,0 mm	Manguito de papel micanita	2 × 3,0 =	6,0 mm
Recubrimiento de micaseda	2 × 0,5 =	1,0 »	Cubierta de cinta barnizada	2 × 0,6 =	1,2 »
Aislam. entre conductores:			Guía de prespan	2 × 0,3 =	0,6 »
U de tela impregnada	1 × 0,6 =	0,6 »	Juego		0,6 »
					22,0 mm

Profundidad de ranura

3 Conductores de la capa interior: Cobre	3 (2 × 5) =	30,0 mm	Manguito papel micanita	2 (2 × 3) =	12,0 mm
Separadores prespan	3 × 0,2 =	0,6 »	Cubiertas de cinta barnizada	2 (2 × 0,6) =	2,4 »
3 Conductores de la capa exterior: Cobre	3 (3 × 3,2) =	28,8 »	Fondo de leatheroid	1 × 0,3 =	0,3 »
Separadores prespan	6 × 0,2 =	1,2 »	Guía de prespan	1 × 0,3 =	0,3 »
Recubrimiento de micaseda	6 (2 × 0,5) =	6,0 »	Separador entre capas: prespan	1 × 8 =	8,0 »
Aislam. entre conductores:			Relleno bajo la cuña	1 × 2,2 =	2,2 »
U de tela impregnada	6 (2 × 0,6) =	7,2 »	Cuña tela bakelizada	1 × 8 =	8,0 »
					107,0 mm

La rigidez dieléctrica en 1 minuto, E_Δ (kV efic./mm) y el poder inductor específico relativo ε de los varios aislantes interpuestos pueden fijarse en los siguientes valores a la temperatura ambiente de prueba (20 °C)

		$E_\Delta \left(\frac{\text{kV efic.}}{\text{mm}}\right)$	U_Δ(kV)	ε
Cinta de micaseda	(0,5 mm)	30	15	5
Tela impregnada	(0,6 mm)	30	18	5,5
Micafolio	(3 mm)	25	75	4
Cinta algodón barnizada	(0,6 mm)	35	21	4,5
Prespan	(0,3 mm)	10	12	3
Compound	(0,6 mm)	20	3	2,7
Aire	(0,6 mm) entre puntas	1,5	0,9	1

Los 31 kV eficaces aplicados durante el ensayo de 1 minuto, han de ser soportados por la pared aislante que en sentido transversal ofrece como mínimo el espesor siguiente (fig. 1.02.07 a)

1 grueso de cinta de micaseda	0,5 mm
1 grueso de micafolio	3,0 »
1 grueso de cinta de algodón barnizada	0,6 »
1 grueso de prespan	0,3 »
1 película de aire o compound	0,6 »
Total	5,0 mm

La intensidad media de campo, en el ensayo será de

$$E_m = \frac{31}{5} = 6{,}2 \text{ kV/mm}$$

muy inferior a la rigidez dieléctrica de cualquiera de los componentes excepto la del aire.

a) Con ranura perfectamente rellena. El campo efectivo en cada uno de los cinco distintos aislantes, pasa a ser, en virtud de la agrupación en serie de los mismos, el que se desprende de la siguiente relación [1.02.06 e]

$$\frac{E_i}{E_m} = \frac{\tau}{\varepsilon_i \Sigma \frac{\tau_i}{\varepsilon_i}} = \frac{5}{\varepsilon_i \left(\frac{0{,}5}{5} + \frac{3}{4} + \frac{0{,}6}{4{,}5} + \frac{0{,}3}{3} + \frac{0{,}6}{2{,}7}\right)} = \frac{3{,}83}{\varepsilon_i}$$

lo que nos da:

para la capa 1 (0,5 mm de micaseda; $\varepsilon_1 = 5$; $E_{\Delta 1} = 30$ kV/mm)

$$E_1 = \frac{3{,}83}{5} 6{,}2 = 4{,}75 \text{ kV/mm} \quad ,$$

coeficiente de seguridad:

$$\frac{E_{\Delta 1}}{E_1} = \frac{30}{4{,}75} = \underline{6{,}32} \quad ,$$

para la capa 2 (3 mm de micafolio, $\varepsilon_2 = 4$; $E_{\Delta 2} = 25$ kV/mm)

$$E_2 = \frac{3{,}83}{4} 6{,}2 = 5{,}94 \text{ kV/mm} \quad ,$$

coeficiente de seguridad:

$$\frac{E_{d2}}{E_2} = \frac{25}{5{,}94} = \underline{4{,}21}$$

para la capa 3 (0,6 mm de cinta de algodón barnizada; $\varepsilon_3 = 4{,}5$; $E_{d3} = 35$ kV/mm)

$$E_3 = \frac{3{,}83}{4{,}5}\,6{,}2 = 5{,}27 \text{ kV/mm}$$

coeficiente de seguridad:

$$\frac{E_{d3}}{E_3} = \frac{35}{5{,}27} = \underline{6{,}65}$$

para la capa 4 (0,3 mm de prespan; $\varepsilon_4 = 3$; $E_{d4} = 10$ kV/mm)

$$E_4 = \frac{3{,}83}{3}\,6{,}2 = 7{,}93 \text{ kV/mm}$$

coeficiente de seguridad:

$$\frac{E_{d4}}{E_4} = \frac{10}{7{,}93} = \underline{1{,}26}$$

y para la capa 5 (0,6 mm de compund); $\varepsilon_5 = 2{,}7$; $E_{d5} = 20$ kV/mm)

$$E_5 = \frac{3{,}83}{2{,}7}\,6{,}2 = 8{,}8 \text{ kV/mm}$$

coeficiente de seguridad;

$$\frac{E_{d5}}{E_5} = \frac{8{,}8}{20} = \underline{2{,}27}.$$

Vemos que la capa 4, de prespan, ofrece ya no mucha seguridad; mejor fuera sustituirla por tela aceitada del mismo grueso. Las restantes capas trabajan desahogadamente, especialmente la primera y la tercera: recubrimientos del conductor (micaseda) y de la bobina (tela barnizada). En las dos últimas capas, 4 y 5, de menos poder inductor específico, el campo supera al valor medio.

Como comprobación adicional veamos la distribución de tensiones

capa 1	$U_1 = 4{,}75 \cdot 0{,}5 =$	2,37 kV
» 2	$U_2 = 5{,}94 \cdot 3 =$	17,82 »
» 3	$U_3 = 5{,}27 \cdot 0{,}6 =$	3,16 »
» 4	$U_4 = 7{,}93 \cdot 0{,}3 =$	2,38 »
» 5	$U_5 = 8{,}80 \cdot 0{,}6 =$	5,28 »
Total		31,01 kV

la suma coincide con los 31kV aplicados.

b) *Con ranura mal impregnada* que conserva la película de aire de 0,6 mm dejada como juego de montaje.

La relación de las intensidades de campo individuales al campo medio experimentan una mejoría innecesaria debida a la sustitución de la constante dieléctrica del compound (2,7) por la del aire (1) en el último término del denominador. Sin embargo, esta última capa quedará perforada.

Calculemos otra vez

$$\frac{E_i}{E_m} = \frac{5}{\varepsilon_i\left(\frac{0{,}5}{5} + \frac{3}{4} + \frac{0{,}6}{4{,}5} + \frac{0{,}3}{3} + \frac{0{,}6}{1}\right)} = \frac{2{,}97}{\varepsilon_i}$$

o sea

$$E_i = \frac{2{,}97}{\varepsilon_i}\,E_m = \frac{2{,}97 \cdot 6{,}2}{\varepsilon} = \frac{18{,}43}{\varepsilon}$$

Repitiendo el proceso anterior, tendremos ahora

Capa n.º	$E_i = \frac{18{,}43}{\varepsilon}\left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)$	Coef. de seguridad $= \frac{E_{di}}{E_i}$	$U_i = E_i\,\tau_i$ (kV)
1	$\frac{18{,}43}{5} = 3{,}69$	$\frac{30}{3{,}69} = 8{,}13$	$3{,}69 \times 0{,}5 = 1{,}84$
2	$\frac{18{,}43}{4} = 4{,}61$	$\frac{25}{4{,}61} = 5{,}42$	$4{,}61 \times 3 = 13{,}83$
3	$\frac{18{,}43}{4{,}5} = 4{,}10$	$\frac{35}{4{,}10} = 8{,}55$	$4{,}10 \times 0{,}6 = 2{,}46$
4	$\frac{18{,}43}{3} = 6{,}14$	$\frac{10}{6{,}14} = 1{,}63$	$6{,}14 \times 0{,}3 = 1{,}84$
5 (aire)	$\frac{18{,}43}{1} = 18{,}43$	$\frac{0{,}9}{18{,}47} = \underline{0{,}05}$	$18{,}43 \times 0{,}6 = 11{,}06$
			$U = \Sigma U_i = 31{,}03$ (kV)

Vemos claramente que la capa de aire se perforará inmediatamente no sólo bajo la tensión de prueba sino incluso en servicio, aunque el voltaje del bobinado con respecto a masa descienda al valor nominal de la tensión por fase, $\frac{14}{\sqrt{3}} = 8{,}1$ kV. La película aérea, falla, haciéndose conductiva, lo cual origina una nueva distribución de tensiones según el siguiente cuadro que tiene en cuenta la anulación expresada de la distancia aislante de aire (0,6 mm), y hace descender el grueso total de aislamiento a

$$5 - 0{,}6 = 4{,}4 \text{ mm.}$$

Intensidad media del campo eléctrico durante la prueba de rigidez.

$$E_m = \frac{31}{4{,}4} = 7{,}05 \text{ kV/mm}$$

$$E_i = E_m\,\frac{4{,}4}{\varepsilon_i\left(\frac{0{,}5}{5} + \frac{3}{4} + \frac{0{,}6}{4{,}5} + \frac{0{,}3}{3}\right)} = \frac{28{,}6}{\varepsilon_i}$$

Capa n.º	$E_i = \frac{28{,}6}{\varepsilon_i}\left(\frac{\text{kVefic.}}{\text{mm}}\right)$	Coefic. de segur. $= \frac{E_{di}}{E_i}$	$U_i = E_i\,\tau_i$ (kV)
1	$\frac{28{,}6}{5} = 5{,}72$	$\frac{30}{5{,}72} = 5{,}25$	$5{,}72 \cdot 0{,}5 = 2{,}86$
2	$\frac{28{,}6}{4} = 7{,}15$	$\frac{25}{7{,}15} = 3{,}5$	$7{,}15 \cdot 3 = 21{,}45$

Capa n.º	$E_i = \frac{28{,}6}{\varepsilon_i}\left(\frac{\text{kVefic.}}{\text{mm}}\right)$	Coefic. de segur. $= \frac{E_{di}}{E_i}$	$U_i = E_i \tau_i$ (kV)
3	$\frac{28{,}6}{4{,}5} = 6{,}36$	$\frac{35}{6{,}36} = 5{,}5$	$6{,}36 \cdot 0{,}6 = \quad 3{,}81$
4	$\frac{28{,}6}{3} = 9{,}53$	$\frac{10}{9{,}53} = 1{,}05$	$9{,}53 \cdot 0{,}3 = \quad 2{,}86$
			$U = \quad 30{,}98$ (kV)

La cuarta capa (prespan) trabaja durante el ensayo al límite de seguridad quedando a punto de ser también perforada. De cualquier modo, durante la prueba, no se alcanzaría la tensión disruptiva del sistema aislante pero la permanencia, en servicio, de los efluvios sobre la película de aire perforada, genera ozono que no tardará en destruir completamente el aislamiento de ranura. Este ejemplo nos muestra palpablemente la necesidad de un análisis preciso por cálculo y una extremada perfección en el proceso de impregnación de las máquinas que trabajan a tensiones de cierto nivel.

Un próximo ejemplo pondrá de relieve, a su vez el hecho también muy aleccionador de que *el exceso de protección aislante* sólo puede contribuir a veces a empeorar las condiciones de trabajo de una máquina o transformador, sin mejorar por ello la rigidez dieléctrica.

1.02.08. Disposición de los materiales aislantes en forma concéntrica

Por ser muy frecuente esta estructura en las construcciones eléctricas, (bobinados de transformadores, pasatapas, conexiones aisladas), vale la pena analizar las consecuencias que ejerce sobre el aislamiento. El campo, si el dieléctrico es homogéneo, se hace máximo en las proximidades del electrodo interior disminuyendo en proporción inversa al radio y ello conduce en general a una mala utilización del material. En efecto: la intensidad del campo electrostático en cada punto, figura (1.02.08 a), viene dada, con la d.d.p. U en kV y los radios en cm por

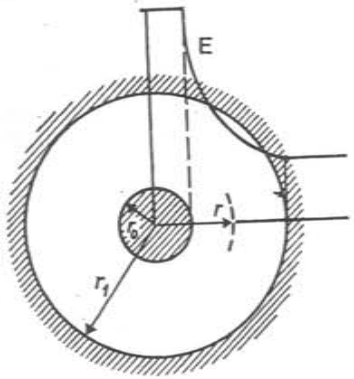


Fig. 1.02.08 a. Campo dieléctrico radial.

$$E = \frac{0{,}434\ U}{r \cdot \log_{10} \frac{r_1}{r_0}} \left(\frac{\text{kV}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.02.08\ a]$$

y el valor máximo, para $r = r_0$,

$$\boxed{E_M = \frac{0{,}434\ U}{r_0 \ \log_{10} \frac{r_1}{r_0}}} \left(\frac{\text{kV}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.02.08\ b]$$

El dieléctrico homogéneo debe responder a la calidad exigida por este valor máximo del campo aunque en la periferia trabaje mucho más descargado. El valor medio del campo sería evidentemente

$$\boxed{E_m = \frac{U}{r_1 - r_0}} \left(\frac{\text{kV}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.02.08\ c]$$

1.02.09 Ejemplo

Calcular los coeficientes de seguridad de los aisladores de porcelana según la fig. (1.02.09 a) bajo las tensiones de prueba.

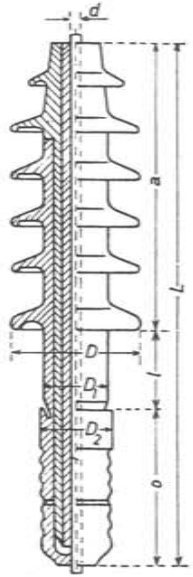


Fig. 1.02.09 a. Dimensiones de los bornes de porcelana de A.T. para transformadores y cálculo del coeficiente de seguridad en pruebas.

Tensión de servicio kV	Tensión de prueba	a (mm)	o (mm)	l (mm)	L (mm)	d (mm)	D (mm)	D_1 (mm)	D_2 (mm)
45	119	400	260	145	805	40	255	130	140
60	152	550	340	160	1050	28	265	154	155
80	196	810	430	200	1140	30	320	180	195
100	240	960	530	200	1690	32	380	220	230

Para las intensidades de campo medias, se tiene, [1.02.08 c],

$$E_m = \frac{U_n}{\left(\frac{D_1 - d}{2}\right)}$$

o sea

$$E_m = \frac{119}{\left(\frac{130 - 40}{2}\right)} = 2{,}65 \text{ (kV/mm)} \quad \text{en el tipo de } 45 \text{ kV}$$

$$E_m = \frac{152}{\left(\frac{145 - 28}{2}\right)} = 2{,}6 \quad \text{» » » } 60 \text{ »}$$

$$E_m = \frac{196}{\left(\frac{180 - 30}{2}\right)} = 2{,}61 \quad \text{» » » } 80 \text{ »}$$

$$E_m = \frac{240}{\left(\frac{220 - 32}{2}\right)} = 2{,}55 \quad \text{» » » } 100 \text{ »}$$

Las intensidades medias de campo oscilan, pues, en todos los tipos alrededor de 2,6 kV/mm. Las intensidades máximas, según la ecuación [1.02.08 b],

$$E_m = \frac{0{,}434\ U_n}{\frac{d}{2} \log_{10} \frac{D_1}{d}}$$

Tomemos como base la longitud axial de 1 cm para el sistema en cuestión. En un conjunto de este género, la distribución de tensiones parciales se realiza según la ecuación siguiente: para la capa i en general, de radio interior r_i y exterior r_{i+1}

$$\frac{U_i}{U} = \frac{C}{C_i} = \frac{\log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\varepsilon_i \Sigma \frac{1}{\varepsilon_i} \log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad [1.02.10\ a]$$

El campo dieléctrico en cualquier punto de radio r viene dado por

$$E_i = \frac{0{,}434\ U}{r\ \varepsilon_i\ \Sigma \frac{1}{\varepsilon_i} \log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad [1.02.10\ b]$$

y su valor máximo, coincidente sobre el radio interno r_i de la capa, es

$$E_{iM} = \frac{0{,}434\ U}{r_i\ \varepsilon_i\ \Sigma \frac{1}{\varepsilon_i} \log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad [1.02.10\ c]$$

Para las intensidades máximas de campo existe, pues, la relación,

$$r_i\ \varepsilon_i\ E_{iM} = \frac{0{,}434\ U}{\Sigma \frac{1}{\varepsilon_i} \log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}} = \text{cte.} = K \qquad [1.02.10\ d]$$

Si se conoce la rigidez dieléctrica de los materiales en kV/cm de tensión disruptiva y se fija un coeficiente de seguridad dado, tendremos la intensidad máxima de campo admisible $E_{iM\ admis.}$ y la dimensión óptima de cada capa será tal que

$$r_i\ \varepsilon_i = \frac{K}{E_{iM\ admis.}} \qquad [1.02.10\ e]$$

Las ecuaciones [a] y [b] se deducen de los principios fundamentales de la electrostática. En efecto: la capacidad C_i en F de cualquiera de los anillos dieléctricos de longitud, que suponemos idéntica, l cm y radios interno y externo r_i y r_{i+1} respectivamente, en cm, viene dada según la teoría de los circuitos dieléctricos, por:

$$C_i = \frac{0{,}241 \cdot 10^{-12}\ \varepsilon_i\ l\ \text{(F)}}{\log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}} \qquad [1.02.10\ f]$$

y la capacidad combinada de los distintos anillos en serie, C, será tal que

$$\frac{1}{C} = \Sigma \frac{1}{C_i} = \frac{1}{0{,}241 \cdot 10^{-12}\ l} \Sigma \frac{\log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\varepsilon_i} \qquad [1.07.10\ g]$$

Como, siendo Q la carga eléctrica de un electrodo debe cumplirse siempre

$$Q = C_i U = C\ U$$

tendremos, según se ha anticipado en [a]

$$\frac{U_i}{U} = \frac{C}{C_i} = \frac{\log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\varepsilon_i \Sigma \frac{\log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}}{\varepsilon_i}}$$

La intensidad de campo E_i dentro de cada dieléctrico i sigue también la ley fundamental de los campos radiales

$$E_i = \frac{0{,}434\ U_i}{r \log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

y sustituyendo U_i por su expresión deducida de [a]

$$E_i = \frac{0{,}434\ U}{r\ \varepsilon_i\ \Sigma \frac{1}{\varepsilon_i} \log_{10} \frac{r_{i+1}}{r_i}}$$

Los valores de la constante dieléctrica ε para los materiales más interesantes en el aislamiento de las máquinas eléctricas se dan en la tabla 1.02.10 a.

Tabla 1.02.10 a. — Caracteristicas dieléctricas de los aislantes para máquinas.

Part.	Material	Fuente	δ °C	ε	10^2 tg δ o tg δ en %	$10^3 (\varepsilon$ tg$\delta)$
1	Papel seco	St. H. f. E.E.		2,3 — 2,8	0,15 — 0,7	
2	Papel en aceite (de condensadores)	Roth	20	3,6 — 4,3		
		Micafil	—	—	1,3 — 4,0	
3	Papel impregnado, en aceite (celulósico)	Roth	20	4 — 4,3	0,25 — 0,4	12 — 17
			90	4,1 — 4,4		12,4 — 18
4	Tela barnizada	Roth				145 — 180
5	Triacetato de celulosa	CES/FK		3,5 — 6	3,0 — 4,0	
6	Tereftalato (Mylar)			3	0,2 — 10,0	
7	Micanita	St. H. f. E.E.		5 — 6,5	0,1 — 0,2	

Tabla 1.02.10 a. (continuación)

Part.	Material	Fuente	θ °C	ε	10^2 tg δ o tg δ en %	10^3 (ε tg δ)
8	Micafolio a la goma laca	Roth	20	4,0	2,0 — 3,0	80 — 120
			90	13	2,3	3000
9	Micafolio al compound		20	3,1	2,0 — 3,0	60 — 90
			90	3,6 — 4,3	1,0	360 — 430
10	Papel bakelizado (placas)	Roth	20	5		250
			90	7		700
11	» » (tubos)		20	4		24 — 160
			90	4,5		63 — 450
12	Prespan	Roth	20	4 — 4,3	1,0	42
			90	4,2 — 4,5		160 — 200
13	Tela bakelizada en planchas	St. H. f. E.E.		5 — 20		
14	Madera	St. H. f. E.E.		2,5 — 7,7		
15	Haya tratada con aceite de linaza	Roth	20	3,3		
16	» » » » mineral		20	3,3		
17	Haya estratificada con bakelita		60	4,1		290
			20	8		1200
18	Fibra	St. H. f. E.E.		2,5 — 5		
19	Aire y gases aislantes (CO_2, H, N)			1		
20	Aceite mineral	CES/FK	20-100	2 — 2,3	0 — 1,0	
21	Pyralène 1467 (para transform)	E.Q. Flix		4	0 — 5,0	
22	Resina fenólica	CES/FK		20 — 30	10,0 — 30,0	
23	Resina epoxídica			3,5 — 5	0,03 — 0,1	
24	Goma laca	St. H. f. E.E.		2,9 — 3,7		
25	Asfalto	CES/FK		2,7 — 3	0,02 — 2,5	
26	Porcelana	DIN	20	6	1,7 — 2,5	100 — 150
27	Esteatita	St. H. f. E.E.		5 — 6,3	0,01 — 0,3	
28	Pizarra			6,6 — 74		
29	Caucho			2 — 3,5		
30	Mica			6 — 7,5	0,01 — 0,09	
31	Agua	St. H. f. E.E.		80		

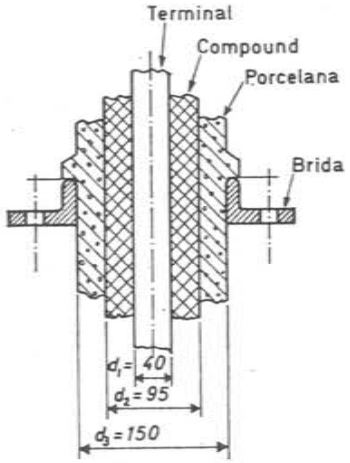


Fig. 1.02.11 a. Aislador de 45 kv en porcelana relleno de compound.

1.02.11 Ejemplos

Ejemplo 1.º Un atravesador de porcelana relleno de compound, para interior, de 45 kV tensión nominal (119 kV tensión de prueba) tiene las dimensiones en el cuello de fijación que marca la figura (1.02.11 a). Calcular los coeficientes de seguridad con la tensión de prueba de 119 kV.

Las constantes dieléctricas relativas son $\varepsilon_2 = 6$ para la porcelana y $\varepsilon_1 = 2{,}9$ para el compound. La rigidez dieléctrica $E_{d2} = 6$ kV/mm para un grueso de 27,5 mm (figura 1.02.03p), y $E_{d1} = 25$ kV/mm respectivamente.

Por la ecuación [1.02.10 c] tenemos para la intensidad de campo máxima en el relleno del compound

$$E_{1M} = \frac{0{,}434\ U_n}{\frac{d_1}{2}\varepsilon_1\left(\frac{\log_{10}\frac{d_2}{d_1}}{\varepsilon_1} + \frac{\log_{10}\frac{d_3}{d_2}}{\varepsilon_2}\right)}$$

BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

$$= \frac{0{,}434 \cdot 119}{20 \cdot 2{,}9\left(\frac{\log_{10}\frac{95}{40}}{2{,}9} + \frac{\log_{10}\frac{150}{95}}{6}\right)} = 5{,}45 \text{ kV/mm}$$

y para la porcelana

$$E_{2M} = \frac{0{,}434\ U_n}{\frac{d_2}{2}\varepsilon_2\left(\frac{\log_{10}\frac{d_2}{d_1}}{\varepsilon_1} + \frac{\log_{10}\frac{d_3}{d_2}}{\varepsilon_2}\right)} = \frac{0{,}434 \cdot 119}{47{,}5 \cdot 6\left(\frac{\log_{10}\frac{95}{40}}{2{,}9} + \frac{\log_{10}\frac{150}{95}}{6}\right)} = 1{,}11 \text{ kV/mm}$$

Los coeficientes de seguridad respectivos, en prueba, ascienden, pues, a

$$\frac{25}{5{,}45} = \underline{4{,}6} \quad \text{y} \quad \frac{6}{1{,}11} = \underline{5{,}4}$$

sobradamente altos.

Ejemplo 2.º El aislamiento principal entre alta y baja de un transformador de distribución en aceite de 200 kVA 15/0,220 kV está compuesto según indica la

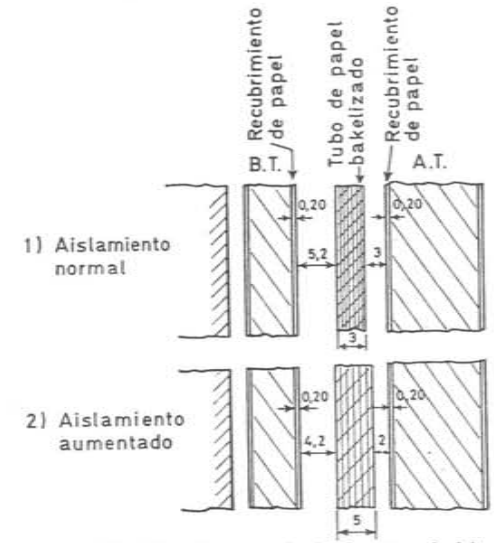


Fig. 1.02.11 b. Esquema del aislamiento principal entre bobinados de alta y baja tensión para un transformador de distribución de 200 kVA, 15/0,22 kV
a) Normal, correcto
b) Incorrecto

fig. (1.02.11 b), a través de una distancia total de 11,2 mm entre hilos aislados, por dos canales de aceite de 5,2 y 3 mm de anchura respectivamente, destinados a la refrigeración eficaz de los bobinados, y un tubo de papel bakelizado de 3 mm de grueso. Calcular los coeficientes de seguridad *a*) en estas condiciones, *b*) suponiendo que el grueso de bakelita, se eleve a 5 mm.

La rigidez dieléctrica del aceite nuevo, recién tratado, es de 20 kV/mm y llega a reducirse a menos de la mitad al cabo de un cierto período de servicio: 8 a 12 kV/mm,

medidos según las normas alemanas, entre casquetes de 50 mm de diámetro esférico separados a la distancia de 2,5 mm.

Realmente dentro del transformador en servicio estas cifras disruptivas son aún más bajas ya que el funcionamiento acarrea consigo la formación de sedimentos puntiformes que acercan las condiciones de rigidez dieléctricas a los de los ensayos *entre puntas*.

En tales circunstancias y, con un estado de conservación próximo al límite inferior de utilización normal, la rigidez dieléctrica del aceite desciende aproximadamente a la mitad de los 4 kV/mm que señala la fig. (1.02.03 q) para distancias de 6 a 8 mm como las que ahora consideramos y a la mitad también, poco más o menos, de los 1,3 kV/mm que da la figura mencionada para distancias superiores, del orden de los 100 mm. De aquí el que sea corriente dimensionar las separaciones grandes bobinado-núcleo y bobinado-caja, por ejemplo, a razón de 1 mm/kV de la tensión de prueba (transformadores nuevos). Este margen tan amplio en las propiedades disruptivas del aceite hace difícil sentar unos principios rígidos cuanto a las distancias a prever, aunque, desde luego, han de ser aparentemente muy sobradas. Tomaremos aquí a los efectos de comparación, la tensión de ensayo prevista y la rigidez dieléctrica del aceite nuevo entre esferas de 62,5 mm que viene a ser de 11,7 kV/mm para 8,2 mm de distancia y de 13,4 kV/mm para 6,2 mm de separación (fig. 1.02.03. q).

No olvidemos empero, según lo dicho, que al cabo de cierto tiempo el coeficiente de seguridad para el aceite llegará a descender a la cuarta parte y aún por debajo de este valor (ensayo, entre puntas, del aceite usado).

Para los tubos de papel bakelizado no expuestos a tal envejecimiento y trabajando en un campo más uniforme admitiremos la rigidez dieléctrica entre electrodos esféricos de 25 mm de diámetro, y análogamente para el papel de recubrimiento propio de los conductores.

Las características dieléctricas de los aislantes en las condiciones señaladas serán, pues, (ver tabla 1.02.03 b partidas 24 y 7; tabla 1.02.10 a part. 11, 3 y 20 y fig. 1.02.03 q citada).

Aislante	E_Δ $\frac{\text{kV efic.}}{\text{mm}}$	$U_\Delta = \tau E_\Delta$ (kVefic.)	ε
1) Papel en aceite (0,4 mm)	30	12	4,0
2) Tubos de papel bakelizado (3 mm)	24	72	4,0
(5 mm)	20	100	4,0
3) Aceite (8,2 mm)	11,7	96	2,2
(6,2 mm)	13,4	83	2,2

y la tensión de prueba (tabla 1.02.07 b): $U_\pi = 40$ kV.

El campo medio en estas condiciones, vale

$$E_m = \frac{U_\pi}{\tau} = \frac{40}{8{,}2 + 3 + 0{,}4} = 3{,}45 \text{ kV/mm}$$

a) *Transformador normal* según fig. (1.02.11 b croquis 1). Las intensidades medias de campo parciales para la capa i serán, [1.02.06 f], puesto que en este caso puede admitirse que el campo se establece entre electrodos prácticamente planos,

$$E_i = \frac{U_\pi}{\varepsilon_i \left(\frac{\tau_1}{\varepsilon_1} + \frac{\tau_2}{\varepsilon_2} + \frac{\tau_2}{\varepsilon_3}\right)} = \frac{40}{\varepsilon_i \left(\frac{0{,}4}{4} + \frac{3}{4} + \frac{8{,}2}{2.2}\right)} = \frac{8{,}75}{\varepsilon_i} \left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)$$

Efectuando los cálculos correspondientes para las tres clases de aislantes intercalados, resulta:

Aislante	$E_i = \frac{8{,}75}{\varepsilon_i} \left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)$	Coef. de segur. $= \frac{E_{\Delta i}}{E_i}$	$U_i = \tau_i E_i$ (kV)
1 Papel en aceite	$\frac{8{,}75}{4} = 2{,}19$	$\frac{30}{2{,}19} = 13{,}7$	$0{,}4 \cdot 2{,}19 = 0{,}875$
2 Tubo bakelizado	$\frac{8{,}75}{4} = 2{,}19$	$\frac{24}{2{,}19} = 10{,}95$	$3 \cdot 2{,}19 = 6{,}57$
3 Aceite	$\frac{8{,}75}{2{,}2} = \underline{3{,}98}$	$\frac{11{,}7}{3{,}98} = \underline{2{,}97}$	$8{,}2 \cdot 3{,}98 = \underline{32{,}6}$
			$U = \Sigma U_i = 40{,}045$ kV

(La diferencia entre ΣU_i y 40 kV proviene de la imprecisión de lecturas sobre la regla de cálculo).

El coeficiente de seguridad hallado para el aceite exige, que la conservación del mismo en servicio no sea descuidada ya que sabemos la fuerte reducción que, de otro modo, experimenta.

Si por deseo de mejorar el aislamiento aumentamos el grueso del tubo sólido de bakelita hasta 5 mm, apenas si conseguiremos más que encarecer la construcción, empeorar la circulación del aceite y conservar la rigidez dieléctrica del conjunto prácticamente en el mismo nivel. En efecto:

b) Transformador con separador de bakelita más grueso (fig. 1.02.11 b croquis 2) Rehaciendo los cálculos hallaremos

$$E_i = \frac{40}{\varepsilon_i \left(\frac{0{,}4}{4} + \frac{5}{4} + \frac{6{,}2}{2{,}2}\right)} = \frac{9{,}6}{\varepsilon_i}$$

lo que da para las distintas capas

Aislante n.º	$E_i = \frac{9{,}6}{\varepsilon_i} \left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)$	Coef. de segur. $= \frac{E_{\Delta i}}{E_i}$	$U_i = \tau_i E_i$ (kV)
1 Papel en aceite	$\frac{9{,}6}{4} = 2{,}4$	$\frac{30}{2{,}4} = 12{,}5$	$0{,}4 \cdot 2{,}4 = 0{,}96$
2 Tubo bakelizado	$\frac{9{,}6}{4} = 2{,}4$	$\frac{20}{2{,}4} = 8{,}33$	$5 \cdot 2{,}4 = 12{,}00$
3 Aceite	$\frac{9{,}6}{2{,}2} = \underline{4{,}37}$	$\frac{13{,}4}{4{,}37} = \underline{3{,}06}$	$6{,}2 \cdot 4{,}37 = 27{,}1$
			$U = \Sigma U_i = 40{,}06$ (kV)

Las intensidades de campo han subido para todos los aislantes y el supuesto refuerzo del aislamiento engrosando la barrera de bakelita en 2 mm ha sido ilusorio ya que en realidad los coeficientes de seguridad no han mejorado prácticamente o se han reducido.

El efecto sería aún más destacado en transformadores de mayor tensión con distancias superiores de aceite; la reducción de las mismas no elevaría su rigidez dieléctrica, como sucede aquí en buena proporción; de 11,7 a 13,4 kV/mm.

1.02.12. Energía acumulada en un dieléctrico

Si a un dieléctrico o condensador de capacidad C faradios se le somete a la tensión U voltios, el campo eléctrico creado acumula una energía total J_ϵ joules dada por

$$\boxed{J_\epsilon = \frac{C\ U^2}{2}} \quad \text{(J)} \qquad [1.02.12\ a]$$

Suponiendo que este condensador fuese de electrodos planos o paralelos y el dieléctrico homogéneo, de poder inductor específico relativo ε la energía acumulada por unidad de volumen (por dm³) sería

$$\boxed{j_\epsilon = \varepsilon\ \frac{E^2}{226}} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{dm}^3}\right) \qquad [1.02.12\ b]$$

E = campo eléctrico en $\dfrac{\text{kV}}{\text{mm}}$

En efecto: al pasar la tensión u aplicada a los electrodos desde cero hasta U voltios la carga absorbida por el dieléctrico pasará a su vez desde cero a Q culombios y la energía habrá ido creciendo según la expresión.

$$dJ_\epsilon = u\ dQ = u(Cdu) \qquad \text{(J)}$$

C es la capacidad del condensador en F.
La energía total almacenada al llegar el voltaje al valor U (V) será

$$J_\epsilon = C \int_o^U u\ du = C\ \frac{U^2}{2} \quad \text{(J)}$$

según indica la ecuación [a]

En el supuesto de un dieléctrico homogéneo de forma prismática, espesor τ (cm) y sección S (cm²) tendremos (véase más adelante fig. 1.02.15 a) y fórmula [1.02.05 d]

$$J_\epsilon = \frac{0{,}08842\ \varepsilon\ S}{10^{12} \cdot \tau}\ \frac{U^2}{2} \quad \text{(J)}$$

y por unidad de volumen

$$j_\epsilon = \frac{J_\epsilon}{S\tau} = \frac{0{,}08842\ \varepsilon}{2 \cdot 10^{12}} \left(\frac{U}{\tau}\right)^2 = \frac{0{,}08842\ \varepsilon}{2 \cdot 10^{12}}\ E^2 \quad (\text{J/cm}^3)$$

con E en V/cm; o bien, con E en kV/mm, y el volumen en dm³

$$j_\epsilon = 10^3 \cdot \frac{0{,}04421\ \varepsilon}{10^{12}}\ (10^4\ E)^2 = \frac{\varepsilon\ E^2}{226} \quad (\text{J/dm}^3)$$

como habíamos indicado en [b].

La energía almacenada en los campos eléctricos es insignificante a efectos industriales. En un decímetro cúbico de aire ($\varepsilon = 1$) al límite de su rigidez dieléctrica normal ($E = 3{,}1$ kV/mm) sólo pueden acumularse

$$j_\epsilon = \frac{1 \cdot 3{,}1^2}{226} = 0{,}0425 \quad (\text{J/dm}^3)$$

o sea, $0{,}0425 \cdot 0{,}24 = 0{,}0102\ \dfrac{\text{calorías-gramo}}{\text{dm}^3}$, lo preciso para elevar en $\dfrac{1}{100}$ °C la temperatura de 1 gramo de agua o en

$$\frac{0{,}0102}{0{,}313} = 0{,}0318 \approx \frac{3}{100}\ ^\circ\text{C}$$

la temperatura de 1 dm³ de aire a 0 °C [1]. Tan reducidos valores son suficientes, sin embargo, para provocar a veces oscilaciones altamente perturbadoras en las líneas y circuitos eléctricos por intercambio con la energía acumulada en los campos magnéticos asociados a estos circuitos.

1.02.13 Ejemplos

Ejemplo 1.º Calcular aproximadamente las características que debe tener un generador de choque destinado a probar, según las Normas VDE, los bornes de tipo condensador para transformadores de 220 kV.

La tensión de choque 1/50 μs a aplicar según dichas Normas es de 910 kV valor de cresta (Tabla 1.02.07 b).

Los aisladores tipo condensador se procura que ofrezcan la misma capacidad entre cada dos armaduras sucesivas igualmente espaciadas de τ a fin de que el campo se distribuya uniformemente, lo cual exige que la longitud axial l de estas capas varíe en razón inversa del radio r respectivo.

En efecto: dado el pequeño grueso de aislamiento τ entre armaduras consecutivas, los condensadores cilíndricos individuales pueden considerarse planos aplicándoseles la ecuación [1.02.05 d].

$$C = 0{,}08842 \cdot 10^{-12}\ \varepsilon\ \frac{2\pi r l}{\tau} \quad \text{(F)} \qquad [1.02.13\ a]$$

(r, l y τ en cm)

La constancia de las capacidades C entraña la de los productos (rl).
El campo medio radial, que en vista de la disposición anterior es también aproxima-

(1) El calor específico del aire entre cero y 100 °C es de 0.242 $\dfrac{\text{k cal}}{\text{kg. °C}}$ y el peso específico a cero °C, 1,292 $\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; el calor específico a 0 °C, vale, pues,

$$0{,}242 \cdot 1{,}292 = 0{,}313\ \frac{\text{k cal}}{\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C}} = 0{,}313\ \frac{\text{cal} \cdot \text{g}}{\text{dm}^3 \cdot ^\circ\text{C}}$$

damente igual al campo máximo, se fija en cerca de 4 kV/mm para la tensión de prueba a frecuencia industrial (505 kVeficaces, tabla indicada 1.02.07 b) lo cual proporciona un coeficiente de seguridad $\simeq 4$, fig. 1.02.03 l) y requiere un grueso radial de aislamiento $\tau = \frac{505}{4} = 126$ mm, o sea, 130 mm en cifras redondas. La longitud de la primera capa llegará, para un borne de aquella tensión, a unos 3 m, determinada por las distancias disruptivas exteriores al aire y en aceite ya que estos valores vendrían a ser, tomando respectivamente 0,5 kV/mm, de cresta, (figura 1.02.03 u) y 1 kVefic./mm (fig. 1.02.03 q)

$$\frac{505\sqrt{2}}{0{,}5} + \frac{505}{1} = 1\,430 + 505 = 1\,9235 \text{ mm} \simeq 2 \text{ m.}$$

que habría que aumentar en 50 % como margen de seguridad.

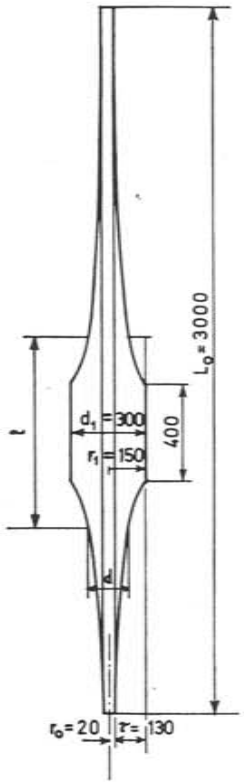


Fig. 1.02.13 a. Corte esquemático de un aislador de tipo condensador para 220 kV tensión de servicio.

Estos datos nos permiten fijar grosso modo las dimensiones y calcular aproximadamente la capacidad de uno de estos aisladores conociendo la cual y la tensión de cresta será fácil llegar al cómputo de la energía puesta en juego según la fórmula, [1.02.12 a] $J_\epsilon = \frac{C U_\pi^2}{2}$

Esquemáticamente, el aislador en cuestión se halla representado en la fig. (1.02.13 a). El diámetro del conductor es de 40 mm y el diámetro máximo del aislador con 130 mm de grueso radial, (130 + 20) 2 = 300 mm. Con una longitud de 3 000 mm para la armadura interna resultan $\frac{3000 \times 40}{300}$ = 400 mm de longitud axial en la capa exterior. El perfil lo determina la condición

$$d \times l = 3\,000 \times 40 = \text{cte.}$$

Cuanto mayor sea el número de láminas o armaduras concéntricas entre cada dos de las cuales se forman los diversos condensadores individuales agrupados de este modo en serie, tanto más uniforme será la distribución del campo, pero la capacidad del conjunto apenas si vendrá influida por el número n de aquéllas.

Designado por τ el grueso constante de dieléctrico, r_i el radio medio de uno de estos condensadores individuales y l_i su longitud, con todas las magnitudes en centímetros, tendremos para la capacidad de cada condensador individual en cuestión [1.02.13 a]

$$C_i = 0{,}08842 \cdot 10^{-12} \varepsilon \frac{2\pi r_i l_i}{\tau} \quad \text{(F)}$$

Los n condensadores quedan montados en serie. La capacidad combinada C del conjunto será tal que

$$\frac{1}{C} = n \frac{1}{C_i} = \frac{n\tau}{0{,}08842 \cdot 10^{-12} \varepsilon\, 2\pi r_i l_i}$$

pero en virtud de las condiciones constructivas expuestas,

$$n\tau_i = 13 \text{ cm}$$

$$r_i l_i = 2 \cdot 300 = 600 \text{ cm}^2$$

y para el papel bakelizado que sirve de aislamiento

$$\varepsilon = 4$$

Sustituyendo estos valores,

$$C = \frac{0{,}08842 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 2\pi \cdot 600}{13} = 102{,}5 \cdot 10^{-12} \quad \text{(F)}$$

de donde

$$J_\epsilon = C \frac{U_\pi^2}{2} = 102{,}5 \cdot 10^{-12} \frac{910000^2}{2} = 42{,}5 \text{ (J).}$$

Se necesitaría un generador de choque capaz, en cifras redondas, de 1 000 kV 50 J.

Ejemplo 2.º Calcular la intensidad de campo con que trabaja el aislador del ejemplo anterior durante el ensayo de choque y deducir el peso de aislante (papel bakelizado) que entrará en su construcción.

Cumplidas las condiciones de espesor individual τ constante y rl = cte. las capacidades individuales [1.02.13 a] serán idénticas supuesto que el número de capas sea lo bastante elevado (τ pequeño) para que pueda aplicarse sin error sensible la fórmula mencionada de los condensadores planos. La repartición radial del voltaje inversamente proporcional a las capacidades respectivas será, pues, uniforme y el campo de choque en toda la masa aislante resultará, igual al valor medio.

$$E_\pi = \frac{U_\pi}{r_1 - r_0} = \frac{910}{150 - 20} = 7 \text{ kV/mm}$$

Con esta intensidad de campo, la energía acumulada por unidad de volumen es, [1.02.12b],

$$j_\epsilon = \varepsilon \frac{E_\pi^2}{226} = 4 \frac{7^2}{226} = 0{,}868 \text{ (J/dm}^3\text{)}$$

y como acabamos de ver que la energía total almacenada ascenderá a 42,5 J, el volumen de aislante empleado será

$$V = \frac{42{,}5}{0{,}868} = 50 \text{ dm}^3$$

que con un peso específico de $\gamma = 1{,}2$ kg/dm³ para este material, nos da

$$G = 50 \cdot 1{,}2 = 60 \text{ kg}$$

aproximación más sencilla que la del cálculo geométrico, dada la forma de la sección longitudinal.

1.02.14. Expresión gráfica de la energía acumulada en un dieléctrico

Aunque de menos importancia práctica queremos dar una segunda expresión también frecuente de la energía acumulada en un dieléctrico.

La ecuación fundamental [1.02.12 a]

$$J_\epsilon = \frac{C\ U^2}{2}\ \text{(J)}$$

(C en F; U en V)

que conduce a la de la energía específica o por unidad de volumen [1.02.12 b]

$$j_\epsilon = \varepsilon \frac{E^2}{226}\ \left(\frac{\text{J}}{\text{dm}^3}\right)$$

$\left(E \text{ en } \frac{\text{KV}}{\text{mm}}\right)$ pueden transformarse, con más claro significado físico en

$$J_\epsilon = \frac{Q\ U}{2}\ \text{(J)} \qquad \text{[1.02.14 a]}$$

(Q en C, U en V), o bien

$$j_\epsilon = \frac{D\ E}{2}\ \left(\frac{\text{J}}{\text{cm}^3}\right) \qquad \text{[1.02.14 b]}$$

$\left(D \text{ en } \frac{\text{C}}{\text{cm}^2},\ E \text{ en } \frac{\text{V}}{\text{cm}}\right)$

Basta sustituir $C = \frac{Q}{U}$ en [1.02.12 a] para tener la [1.02.14 a] y después, en esta última, $Q = DS$ y $U = E\tau$ (S en cm², τ en cm) para llegar a la [1.02.14 b].

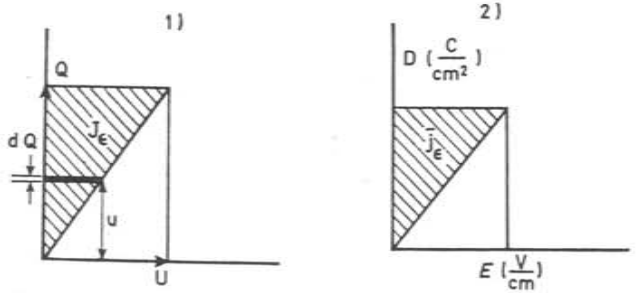


Fig. 1.02.14 a. Energía acumulada en un condensador
1) total 2) por unidad de volumen.

La energía total acumulada [a] es la mitad de la máxima que correspondería a la carga Q suministrada a tensión constante U. Esto resulta natural si se tiene en cuenta que la carga ha ido aumentando linealmente con la tensión (fig. 1.02.14 a). La energía elemental dJ_ϵ almacenada por cada incremento dQ de carga valdrá $(dJ = u \cdot dQ)$ y viene representada por el área marcada en

trazo negro sobre dicha figura, diagrama 1). La energía total $J_\epsilon = \int_o^Q u dQ$ resulta proporcional, pues, a la superficie rayada y su expresión es justamente,

$$J_\epsilon = \frac{1}{2} Q\ U$$

Análogamente la energía por unidad de volumen $j_\epsilon\ \left(\frac{\text{J}}{\text{cm}^3}\right)$ es también la mitad de la que correspondería a la carga final por unidad de superficie $D\ \left(\frac{C}{\text{cm}^2}\right)$ y al voltaje final por unidad de longitud $E\left(\frac{V}{\text{cm}}\right)$ (diagrama 2 de la fig. 1.02.14 a).

1.02.15. Esfuerzos electrostáticos

El esfuerzo $f_\epsilon\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$ entre dos placas paralelas de un condensador separadas a una distancia τ (mm) sometidas a una diferencia de potencial U(kV) entre las cuales existe un campo eléctrico $E = \frac{U}{\tau}\ \left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)$ viene dado por

$$\boxed{f_\epsilon = 0{,}45\ \varepsilon\ E^2}\ \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) \qquad \text{[1.02.15 a]}$$

y en ningún caso alcanza magnitudes dignas de consideración en el dominio de las máquinas eléctricas por lo cual nunca se tiene en cuenta.

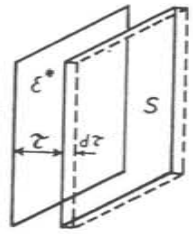


Fig. 1.02.15 a. Esfuerzo entre placas electrizadas.

Puede demostrarse poniendo de manifiesto la variación de energía acumulada dJ_ϵ al imaginar una traslación elemental de las placas $d\tau$ (fig. 1.02.15 a) provocando así una variación de capacidad dC a tensión constante U.

Según [1.02.12 a]

$$dJ_\epsilon = \frac{U^2}{2} dC\ \text{(J)}$$

(U en V, C en F)

pero, según [1.02.05 d],

$$C = 0{,}08842 \cdot 10^{-12}\ \varepsilon \frac{S}{\tau}\ \text{(F)}$$

(S en cm², τ en cm)

$$\frac{dC}{d\tau} = -\,0{,}08842 \cdot 10^{-12}\,\varepsilon\,\frac{S}{\tau^2}\quad\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{cm}}\right)$$

y

$$dJ_\epsilon = -\,\frac{U^2}{2}\cdot 0{,}08842 \cdot 10^{-12}\,\varepsilon\,\frac{S}{\tau^2}\,d\tau\quad(\mathrm{J}) \qquad [1.02.15\ \mathrm{b}]$$

Si representamos por F_ϵ(kg) la fuerza total puesta en juego para provocar este desplazamiento $d\tau$ (cm), el trabajo obtenido equivalente a la variación de energía será

$$dJ = F_\epsilon\left(\frac{d\tau}{100}\right) \times 9{,}81\quad(\mathrm{J}) \qquad [1.02.15\ \mathrm{c}]$$

con signo opuesto al de dJ_ϵ porque un trabajo obtenido positivo presupone una disminución de la energía acumulada.

Igualando las expresiones [b] y [c]

$$-\,\frac{U^2}{2}\,0{,}08842 \cdot 10^{-12}\,\varepsilon\,\frac{S}{\tau^2}\,d\tau = F_\epsilon\,\frac{d\tau}{100} \times 9{,}81\quad(\mathrm{J})$$

$$F_\epsilon = -\,\frac{100 \cdot 0{,}08842 \cdot 10^{-12}}{9{,}81 \cdot 2}\,\varepsilon\,\frac{U^2 S}{\tau^2}\quad(\mathrm{kg})$$

$$= -\,0{,}45 \cdot 10^{-12}\quad \varepsilon\, E^2 S\quad(\mathrm{kg})$$

$$\left(E \text{ en } \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}},\ S \text{ en } \mathrm{cm}^2\right)$$

Poniendo E, no en $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm}}$ sino en $\left(\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}\right)$ y S en m^2 el esfuerzo f_ϵ en $\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}$ viene dado, efectivamente, según se anuncia en [a], por

$$f_\epsilon = \frac{F_\epsilon}{S} = -\,0{,}45\ \varepsilon\ E^2\ \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\right)$$

$$\left(F_\epsilon \text{ en kg},\ S \text{ en } \mathrm{m}^2,\ E \text{ en } \frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}\right)$$

La fuerza f_ϵ es atractiva entre ambas placas si las cargas son de signo eléctrico contrario.

Las placas de un condensador de aire trabajando al límite de su rigidez dieléctrica normal, 3,1 kV/mm, sólo quedan sometidas a un esfuerzo

$$f_\epsilon = 945 \cdot 3{,}1^2 = 4{,}33\ \left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2}\right)$$

1.02.16. Pérdidas dieléctricas

Por perfecto que sea un aislamiento industrial siempre deja pasar una pequeña corriente conductiva que se manifiesta tanto con tensión continua como con tensión alterna y este fenómeno de conducción origina ciertas pérdidas por efecto JOULE, aunque ordinariamente carecen de importancia. Más intensas son las pérdidas que acontecen a consecuencia de los ciclos de electrización cuando el dieléctrico se halla sometido a una tensión alterna (pérdidas por histéresis dieléctrica).

La figura (1.02.16 a) muestra uno de estos ciclos que representa el valor de la densidad de carga o desplazamiento D en función de la intensidad de campo E. El retraso con que la electrización sigue a la d.d.p. alterna hace que la característica $D = f(E)$ en lugar de ser perfectamente lineal, según se había supuesto en la fig. (1.02.14 a), presente unas trayectorias ascendente y descendente curvilíneas y no coincidentes entre sí encuadrando de este modo una superficie que, como corolario de lo expuesto respecto a la figura citada (1.02.14 a) representa una cierta energía perdida.

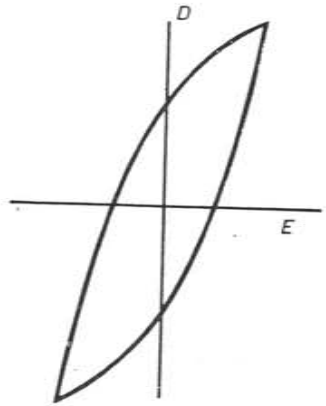


Fig. 1.02.16 a. Ciclo de histéresis dieléctrica $D = f(E)$

Las pérdidas específicas de potencia por histéresis dieléctrica y por unidad de volumen pueden expresarse según una ecuación (que ahora tiene más bien un carácter empírico ya que presupone que el área del ciclo de histéresis es también proporcional a E^2), de esta forma:

$$p_\epsilon = k_\epsilon\, f\, E^2\quad\left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^3}\right) \qquad [1.02.16\ \mathrm{a}]$$

donde k_ϵ es una constante que depende del material (pérdidas específicas en $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^3}$ por período y por $\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{mm}}$ de campo eléctrico), f la frecuencia en Hz y E el campo eléctrico considerado en $\frac{\text{kV eficaces}}{\mathrm{mm}}$. Como quiera que las pérdidas por efecto JOULE son de un orden muy inferior en cualquier tipo de aislante industrial, la misma ecuación vale, en general, para las pérdidas dieléctricas totales por unidad de volumen, las cuales resultan así proporcionales a la frecuencia y al cuadrado de la intensidad de campo.

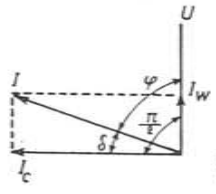


Fig. 1.02.16 b. Angulo de pérdidas dieléctricas.
U = Tensión aplicada al dieléctrico
I = Corriente total absorbida
I_W = Componente activa o vatiada de la corriente absorbida
I_C = Componente condensiva o devatida
Si no hubiera pérdidas en el dieléctrico, la corriente I sería totalmente condensiva ($I_W = 0$).

El índice de pérdidas que suele adoptarse ordinariamente, aunque sin gran acierto, no es k_ϵ como debiera, sino lo que se llama el *ángulo de pérdidas* δ (o la *tangente trigonométrica* tg δ del material (fig. 1.02.16 b).

Se define tg δ por la relación de la corriente I_w (o de la potencia activa perdida p_ϵ) a la corriente I_c (o a la potencia P_c) condensiva absorbida por el material trabajando como dieléctrico sometido a una tensión alterna senoidal de valor eficaz U y de frecuencia f.

Como el ángulo δ suele ser muy pequeño tg $\delta \approx$ sen $\delta \approx \cos\varphi$ de tal modo que dicha tangente trigonométrica no es más que el factor de potencia propio del material aislante. Sus valores, que aparecen en la tabla (1.02.10 a) llegan como máximo a un 5 % y generalmente no son más que una fracción del 1 % (las resinas fenólicas sin carga de relleno constituyen una excepción con valores de cos φ(o tg δ) mucho más elevados).

En principio tg δ tampoco depende de la frecuencia, aunque de hecho le afecta la influencia de f sobre el proceso físico de la curva de histéresis.

La relación que existe entre k_ϵ y tg δ es la siguiente

$$k_\epsilon = \frac{\varepsilon \cdot \text{tg}\ \delta}{18 \cdot 10^3} \left(\frac{\text{W/cm}^3}{\left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)^2 \cdot \text{Hz}} \right) \qquad [1.02.16\ \text{b}]$$

lo cual hace que el producto ($\varepsilon \cdot$ tg δ) represente más acertadamente la calidad del sistema aislante desde el punto de vista de las pérdidas que el simple valor de tg δ. Las pérdidas específicas k_ϵ son proporcionales a la constante dieléctrica relativa ε y a dicho factor tg δ.

La fórmula anterior se deduce fácilmente. Para la potencia activa P_w en vatios, tenemos, representando por V el volumen del dieléctrico en cm³ supuesto prismático, de sección S (cm²) y longitud τ (cm) sometido al campo uniforme $E = \frac{U}{\tau}\left(\frac{\text{kV eficaces}}{\text{mm}}\right)$, según la fórmula [a]

$$p_\epsilon = (k_\epsilon\ f\ E^2)\ V \qquad \text{(W)}$$

Para la potencia condensiva, poniendo también U en kV, I_c en A y la capacidad C en F

$$P_c = (10^3 U) I_c = (10^3 U)(2\pi f C \cdot U \cdot 10^3) = 2\pi \cdot 10^6\, f\, U^2 C \quad \text{(W)}$$

A su vez, la capacidad C en faradios, con S en cm² y τ en cm viene dada por [1.02.05 d]

$$C = 0{,}08842\ \varepsilon \frac{S}{\tau} \cdot 10^{-12} \quad \text{(F)}$$

de donde

$$\text{tg}\ \delta = \frac{p_\epsilon}{P_c} = \frac{k_\epsilon\ f\ E^2\ V}{2\ \pi \cdot 10^6\ U^2 f\ (0{,}08842\ \varepsilon \frac{S}{\tau} \cdot 10^{-12})} = \frac{1{,}8\ k_\epsilon\ E^2 S \tau}{U^2 \frac{S}{\tau} \varepsilon}\ 10^6 = \frac{1{,}8 \cdot 10^6\ k_\epsilon\ E^2}{\frac{U^2}{\tau^2}\varepsilon}$$

En el último miembro τ sigue expresado en cm. Poniéndolo en mm

$$\text{tg}\ \delta = \frac{1.8 \cdot 10^6 k_\epsilon \cdot E^2}{\frac{U^2}{\tau^2/10^2}\ \varepsilon} = \frac{1{,}8 \cdot 10^4 k_\epsilon \cdot E^2}{\left(\frac{U}{\tau}\right)^2 \varepsilon}$$

Pero ahora $\left(\frac{U}{\tau}\right)$ no es sino el campo E expresado también en kV/mm. Luego

$$\text{tg}\ \delta = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot k_\epsilon}{\varepsilon}$$

de donde surge inmediatamente la ecuación [b].

La tabla 1.02.10 a muestra los valores de estos parámetros para distintos materiales aislantes empleados en las máquinas eléctricas.

Por razones que se desprenden del proceso físico de polarización, origen de todos los fenómenos dieléctricos, tanto la constante dieléctrica en valor relativo ε como la tangente de pérdidas tg δ dependen en gran medida, por regla general, de la temperatura a que se encuentra sometido el dieléctrico, y ésta, a su vez, al menos en parte, *de las propias pérdidas en el mismo*. Aunque las leyes que rigen las variaciones de ε y de tg δ en función de la temperatura θ sean de difícil e insegura expresión matemática, es admisible sentar ciertas hipótesis, de valor al menos cualitativo, que conducen a un resultado muy notable cuanto a las limitaciones a que puede llegarse en las posibilidades de aislamiento de las máquinas eléctricas, sobre todo para los transformadores y aparatos de muy alta tensión (1).

Las conclusiones teóricas, condensadas, se traducen en la existencia de un cierto voltaje crítico propio de cada sustancia rebasado el cual se produciría el fallo de la rigidez dieléctrica cualquiera que fuera el grueso de material aislante con que se intentase evitar la perforación. Este es un fenómeno que repercute en las construcciones eléctricas por el aislamiento anormalmente reforzado y las precauciones extremadas que hay que adoptar sobre la refrigeración del mismo, siempre que se utilizan tensiones muy altas; todo ello a fin de evitar lo que podríamos llamar la «*descarga térmica*».

En el párrafo siguiente resumimos el desarrollo matemático que lleva a estas conclusiones teóricas.

1.02.17 **Descarga térmica**

El coeficiente de pérdidas k_ϵ es índice, por su sola presencia, de un calentamiento indudable del dieléctrico que a la vez repercute sobre este mismo coeficiente provocando su variación y, *si no existiera refrigeración alguna*, degeneraría en un proceso acumulativo capaz de elevar indefinidamente la temperatura del aislamiento. Como la rigidez dieléctrica E_Δ del material disminuye al aumentar la temperatura, este simple hecho bastaría para provocar la perforación de un dieléctrico a cualquier tensión por baja que fuese y aunque el grueso de la pared aislante excediera de todo lo razonable.

(1) Actualmente se construyen ya líneas de transporte a 750 kV y probablemente no tardará en alcanzarse el millón de voltios.

Incluso con refrigeración, la cual tiende a estabilizar la temperatura en un determinado nivel evitando su crecimiento indefinido, puede suceder que se alcancen ciertas condiciones críticas capaces de provocar un fenómeno similar.

Si admitimos, y ello no está muy lejos de la realidad para muchos de los aislantes sólidos, que la constante dieléctrica relativa ε varía en función de la temperatura θ según una ley exponencial («de interés compuesto» o «en cadena») y, análogamente, las pérdidas específicas k_ϵ, tendremos como ecuaciones generales

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_0 \; e^{\alpha(\theta - \theta_0)} \qquad \text{[1.02.17 a]}$$

$$k_{\epsilon\theta} = k_{\epsilon 0} \; e^{\beta(\theta - \theta_0)} \qquad \text{[1.02.17 b]}$$

Los subíndices θ y o de ε y k_ϵ corresponden respectivamente a dos temperaturas θ y θ_0 del aislante; α y β son constantes que luego investigaremos.

Calculemos la temperatura de régimen en la cual quedará estabilizado el proceso de calentamiento suponiendo que el dieléctrico no tuviese que evacuar más que sus propias pérdidas bajo un campo uniforme E y frecuencia constante f. Sea λ $\left(\frac{\text{W}\cdot\text{cm}}{\text{cm}^2\,^\circ\text{C}}\right)$ el coeficiente de conducción térmica del material y limitémonos a considerar el caso de que la capa aislante no pudiera disipar el calor más que a través de una de sus caras exteriores (conductor aislado). Así, en la fig. (1.02.17 a), podemos ceñirnos a examinar

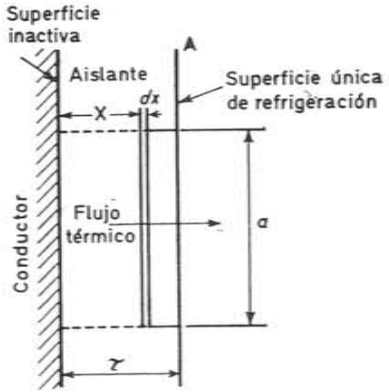


Fig. 1.02.17 a. Descarga térmica de un dieléctrico.

el proceso dentro de un volumen dieléctrico $a \times b \times \tau$ cuya única superficie activa de refrigeración, por conducción transversal, fuese $a \times b$ con b como profundidad del prisma mostrado en proyección.

Las pérdidas dieléctricas $dp_{\epsilon x}$ en cualquier capa elemental de grueso dx ascienden a, (1.02.16 a),

$$dp_{\epsilon x} = k_{\epsilon x} \, f \, E^2 \, (a \times b \times dx) \quad \text{(W)} \qquad \text{[1.02.17 c]}$$

$$\left(f \text{ en Hz, } E \text{ en } \frac{\text{kV}}{\text{mm}}, \; a, \; b \text{ y } x \text{ en cm}\right)$$

$k_{\epsilon x}$ son las pérdidas específicas en dicha capa, en $\dfrac{\text{W/cm}^3}{\left(\frac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)^2 \cdot \text{Hz}}$ dependientes de la

temperatura θ_x a que ésta se encuentre según su proximidad a la superficie de disipación.

La diferencia de temperaturas $d\theta$ entre ambas caras de esta capa elemental será [1] (Véase párrafo 1.11.07).

$$d\theta = -\frac{p_{\epsilon x}}{\lambda} \frac{dx}{a \cdot b} \; (^\circ\text{C}) \qquad \text{[1.02.17 d]}$$

$p_{\epsilon x}$ es la potencia perdida en el volumen prismático interior a la capa considerada, en W

El signo menos tiene en cuenta que la temperatura desciende para un incremento dx positivo.

De [c], se desprende

$$\frac{dp_{\epsilon x}}{dx} = (a \cdot b) \; f \; k_{\epsilon x} \; E^2 \left(\frac{\text{W}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.02.17 e]}$$

y de [d]

$$p_{\epsilon x} = -(a \cdot b) \; \lambda \frac{d\theta}{dx} \quad \text{(W)}$$

así como

$$\frac{dp_{\epsilon x}}{dx} = -(a \cdot b) \; \lambda \frac{d^2\theta}{dx^2} \left(\frac{\text{W}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.02.17 f]}$$

Igualando [e] y [f]

$$\lambda \frac{d^2\theta}{dx^2} + f \; k_{\epsilon x} \; E^2 = 0 \qquad \text{[1.02.17 g]}$$

$k_{\epsilon x}$ se identifica ahora con $k_{\epsilon\theta}$ de la ecuación [b] si representamos por θ la temperatura de la capa x. Sustituyendo, pues, $k_{\epsilon x}$ por $k_{\epsilon\theta}$ según la ecuación [b] mencionada, tendremos:

$$\lambda \frac{d^2\theta}{dx^2} + f \; k_{\epsilon 0} \; e^{\beta(\theta - \theta_0)} E^2 = 0 \qquad \text{[1.02.17 h]}$$

La solución $\theta = f(x)$ de esta ecuación diferencial es bastante laboriosa y se traduce en los siguientes resultados prácticos: si la diferencia de temperatura $\Delta\theta$ entre las superficies interior y exterior de la pared aislante, por efecto exclusivo de las pérdidas dieléctricas, es decir, prescindiendo del calentamiento que pueda provenir del conductor, llega a exceder de

$$\Delta\theta_{lim} = \frac{1{,}188}{\beta - 2\alpha} \quad (^\circ\text{C}) \qquad \text{[1.02.17 i]}$$

no se consigue alcanzar ya el equilibrio térmico y se produce finalmente la descarga disruptiva. El valor límite de la *tensión* capaz de suscitar unas pérdidas suficientes para provocar tal fenómeno, suponiendo reducida a cero la variación de la constante dieléctrica ($\alpha = 0$), a lo cual correspondería una diferencia de temperatura límite

$$\Delta\theta_{lim} = \frac{1{,}188}{\beta} \; (^\circ\text{C}), \qquad \text{[1.02.17 j]}$$

(1) Aunque el fenómeno de la conducción térmica en las máquinas eléctricas será analizado de un modo general más adelante, anticipamos aquí este caso concreto para completar el estudio referente a las constantes dieléctricas.

viene dada por

$$U_{lim} = 9{,}38\sqrt{\frac{\lambda}{(k_{\epsilon_0} f)\,\beta\, e^{\beta(\theta_a - \theta_0)}}} \qquad [1.02.17\ \text{k}]$$

θ_a = temperatura del ambiente en °C.

k_{ϵ_0} = coeficiente de pérdidas dieléctricas a una temperatura dada θ_0 expresado en $\dfrac{\text{W/cm}^3}{\left(\dfrac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)^2 \cdot \text{Hz}}$ es decir, en $\dfrac{\text{W}}{\text{cm}^3}$ a la frecuencia de 1 Hz y con intensidades de campo de 1 kV/mm.

La ecuación [i] nos indica que el límite de calentamiento admisible, aunque depende de la naturaleza del material aislante a través de α y β, es independiente de la conductividad térmica λ de la sustancia. Al mismo tiempo la ecuación [k] de *la tensión límite no depende tampoco del grueso del dieléctrico*, es decir, que la descarga térmica es independiente de la intensidad de campo E.

Para tener una idea de los valores prácticos que se desprenden de estas ecuaciones examinemos el caso de una placa de papel bakelizado en la cual $\beta = 0{,}013 \ldots 0{,}05$ y $\alpha = 0 \ldots 0{,}014$. Según [i] en los casos extremos

$$\Delta\theta_{lim} = \frac{1{,}188}{0{,}013} = 91\ ^\circ\text{C} \qquad \Delta\theta_{lim} = \frac{1{,}188}{0{,}022} = 53\ ^\circ\text{C}$$

en cifras redondas, de 50 a 90 °C como diferencias máximas de temperatura admisibles por efecto único de las pérdidas dieléctricas, cifras como vemos bastante moderadas. El margen se ensancha a medida que la constante dieléctrica varía más de prisa con la temperatura (altos valores de α).

Para el papel bakelizado, la tensión límite admisible [k] viene a ser

$\lambda = 0{,}002 \dfrac{\text{W} \cdot \text{cm}}{\text{cm}^2 \cdot {}^\circ\text{C}}$, $k\epsilon_0 = 4 \cdot 10^{-5} \dfrac{\text{W/cm}^3}{\left(\dfrac{\text{kV}}{\text{mm}}\right)^2 \cdot \text{Hz}}$ a la temperatura θ de 40 °C.

Si el ambiente exterior es de $\theta_a = 90$ °C (en aceite, por ejemplo) y $f = 50$ Hz, y $\beta = 0{,}03$,

$$U_{lim} = 9{,}38\sqrt{\frac{0{,}002}{4 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}03 \cdot 2{,}72^{\,0{,}03\,(90-40)}}} = 25{,}5\ ^\circ\text{C}$$

Con la misma placa, refrigerada por ambas caras, como barrera intercalada en un espacio separador, por ejemplo, la tensión límite admisible vendría a ser el doble, unos 50 kV siendo inútil aumentar los gruesos para mejorar estas cifras.

1.03. EL CIRCUITO MAGNÉTICO EN GENERAL

1.03.01. Parámetros del circuito magnético. Permeabilidad. Unidades

Para los circuitos magnéticos puede establecerse también una ley fundamental similar a la ley OHM. Si $\mathcal{E}$ es la f.m.m. o d.d.p magnética a lo largo del circuito magnético y Φ el flujo que circula por él, cabe escribir la relación

$$\frac{\mathcal{E}}{\Phi} = \mathcal{R}$$

denominada *reluctancia*, o su inversa

$$\frac{\Phi}{\mathcal{E}} = \Lambda = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

denominada *permeancia* del circuito magnético, paralelamente a la resistencia y a la conductancia eléctricas.

Si el circuito magnético es de sección uniforme y naturaleza homogénea la permeancia Λ del mismo resulta, por experiencia, proporcional a la sección transversal S del conductor magnético e inversamente proporcional a su longitud l de tal modo que

$$\Lambda = \mu \frac{S}{l}$$

y

$$R = \frac{l}{\mu\, S}$$

donde el coeficiente de proporcionalidad μ o *permeabilidad* de la sustancia desempeña un papel similar al de la conductividad χ en los circuitos eléctricos o del poder inductor específico ε en los dieléctricos [1].

(1) La permeancia y la reluctancia así definidas, sin afectarlas del coeficiente de permeabilidad absoluta μ_0, adoptan la forma más conveniente para el cálculo de máquinas, donde estas magnitudes se han de evaluar frecuentemente y en circuitos que presentan además la permeabilidad relativa $\mu = 1$. Corresponden al sistema de unidades C.G.S. (l en cm., S en cm.^{2} $\mathcal{E}$ en Gb, Φ en M).

Haciendo intervenir la intensidad de campo magnético $H = \frac{\mathcal{E}}{l}$, es decir, la f.m.m. por unidad de longitud (análoga a la c.d.t., también por unidad de longitud U/l de un conductor o a la intensidad de campo $E = U/\tau$ en un dieléctrico), e introduciendo la densidad de flujo o inducción B (asimilable a la densidad de corriente Δ y al desplazamiento electrostático D), las expresiones anteriores conducen a esta otra:

$$B = \mu\ H$$

ya que basta escribir

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{\left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}}\right)}{S} = \frac{\frac{\mathcal{E}}{\left(\frac{l}{\mu S}\right)}}{S} = \mu\left(\frac{\mathcal{E}}{l}\right) = \mu\ H.$$

El valor de μ tiene algunas características que le distinguen de sus homólogos χ y ε antes considerados. Si bien, como ellos, depende de la sustancia que constituye el conductor o circuito magnético, suele ser prácticamente el mismo para casi todos los materiales que se emplean en la electrotecnia (aire, aceite, cobre, aluminio, aleaciones, aislantes), salvo para los llamados materiales ferromagnéticos (hierro y sus derivados), en los cuales alcanza valores mucho más elevados que en las restantes sustancias (incluso miles de veces mayores) al mismo tiempo que pierde el carácter de constante que en mayor o menor grado poseen los otros dos parámetros χ y ε ya que μ depende en gran medida del valor del campo H. En cambio, apenas si le afecta la temperatura, dentro de los límites de aplicación industrial. Estas propiedades de μ han sido decisivas para la construcción de las máquinas eléctricas. Sólo gracias a la elevada permeabilidad de los materiales ferromagnéticos es posible fabricarlas económicamente, pero la inconstancia de μ salpica el estudio de dificultades e incertidumbre y lo sustrae al carácter racional que alumbra a buena parte de la Electrotecnia, y de otras ramas afines, imprimiendo al cálculo de estas máquinas un sello empírico en sus fundamentos que pesa a lo largo de todo el desarrollo.

En el sistema C.G.S. la permeabilidad del vacío (que prácticamente es la misma que la del aire), se toma igual a 1. La unidad de permeancia viene así representada por la permeancia de un cubo de 1 cm de arista en el vacío. Si para otro medio es Λ igual a x veces la del vacío, su permeabilidad con respecto a la de este último será numéricamente igual: $\mu = x$.

En dicho sistema la unidad de f.m.m. o de tensión magnética $\mathcal{E}$ es el gilber (Gb), $\mathcal{E} = \frac{4\pi}{10} NI$ (Gb); y la de flujo,

$$\Phi = \mathcal{E}\ \Lambda$$

que se deduce de la unidad de f.m.m.(Gb) y de la de permeancia $\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}\right)$ se llama

BIBLIOTECA
UNIVERSIDAD TECNOLOGICA NACIONAL

maxwell (M). La inducción $B = \frac{\Phi}{S}$ es el (M/cm²) denominado gauss (G) y la de campo $H = \frac{B}{\mu} = \frac{\mathcal{E}}{l}$ el (Gb/cm) llamado también oersted (Oe). Las de permeancia (M/Gb) o $\left(\frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}\right)$ y la de reluctancia (Gb/M) o $\left(\frac{\text{cm}}{\text{cm}^2}\right)$ no han recibido nombre especial así como tampoco la de permeabilidad μ.

Con $\mu = 1$ para el aire, el vacío y la mayoría de los dieléctricos, la inducción B en G y el campo magnético H en Oe, en dichos medios, son también, numéricamente, iguales.

En términos de la corriente magnetizante I_μ y del número N de espiras inductoras, la f.m.m. viene dada en unidades C.G.S. por:

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi}{10} N\ I_\mu = 1{,}256\ N\ I_\mu \text{ (Gb)}$$

el campo, por

$$H = \frac{\mathcal{E}}{l} = \frac{1{,}256\, NI_\mu}{l} \quad \text{(Oe)}$$

la inducción, por

$$B = \mu\ H = \frac{1.256\ NI_\mu \mu}{l} \quad \text{(G)}$$

y el flujo, por

$$\Phi = BS = 1{,}256\ \mu \frac{NI_\mu}{l} S \quad \text{(M)}$$

La permeancia será

$$\Lambda = \frac{\Phi}{\mathcal{E}} = \frac{\frac{4\pi}{10} \mu \frac{NI_\mu}{l} S}{\frac{4\pi}{10} NI_\mu} = \mu\ \frac{S}{l} \quad \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

También cabe expresar la f.m.m. en $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$ y definir Λ en función de esta nueva unidad: flujo, en maxwell, por amperio-vuelta de f.m.m. Entonces,

$$\Lambda = \frac{\Phi}{NI_\mu} = \frac{\frac{4\pi}{10} \mu \frac{NI_\mu}{l} S}{NI_\mu} = 1{,}256\ \mu \frac{S}{l};$$

tal es el método seguido por algunos autores (ARNOLD, por ejemplo), pero no lo utili-

zaremos en esta obra, donde consideramos siempre la permeancia $\Lambda = \mu \frac{l}{S}$ (cm³/cm)] o (M/Gb) aunque expresemos frecuentemente la f.m.m. en Av o el campo en (Av/cm), si bien ello nos obligue a entonces introducir el coeficiente $\frac{4\pi}{10}$ en vez de 1 como permeabilidad absoluta μ_0

El sistema M.K.S. proporciona ciertas unidades magnéticas muy cómodas para el cálculo de las máquinas eléctricas siendo por lo demás poco adecuado en otros dominios. La unidad de flujo se deriva de la ley

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \text{ (V/espira)}$$

y será igual a un flujo tal que extinguiéndose con ritmo uniforme durante un segundo induzca en una espira la f.e.m. constante de 1 voltio.

La unidad de flujo magnético $\Phi = Et$ es, pues, el voltio-segundo (Vs) o weber (Wb) y su valor equivale a 100 megamaxwells

$$1 \text{ (Wb)} = 1\text{(Vs)} = 10^8\text{(M)}$$

y con Φ en (M), $E = -\frac{d\Phi}{dt} 10^{-8}$ (V/espira)

La inducción B, entonces en $\frac{\text{VS}}{\text{m}^2}$ o $\frac{\text{Wb}}{\text{cm}^2}$ se denomina tesla (T) y resulta

$$1\ \text{T} = \frac{10^8\ \text{(M)}}{10^4\ \text{(cm}^2\text{)}} = 10^4 \left(\frac{\text{M}}{\text{cm}^2}\right) = 10^4\ \text{(G)}$$

o diez mil gauss.

Las máquinas eléctricas trabajan con inducciones que van de 5 000 a 22 000 G, es decir, de 0,5 a 2,2 T y valores de flujo de un orden parecido en Wb.

Emplearemos, pues, con preferencia, aunque no de un modo exclusivo, el sistema M.K.S. para las unidades de inducción y de flujo.

Si seguimos este sistema de unidades, deberemos expresar la f.m.m. $\mathcal{E}$ en (Av) y la intensidad de campo magnético H en $\left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right)$ con lo cual la permeabilidad y la permeancia respectivamente

$$\mu = \frac{B}{H}\left(\frac{\text{(T)}}{\left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right)}\right) \qquad \Lambda = \frac{\Phi}{\mathcal{E}}\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \text{ o } \Lambda = \mu, \mu \frac{S}{l}\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \text{ o } \left(\frac{\text{m}^2}{\text{m}}\right)$$

siendo la relación entre las permeabilidades absolutas de ambos sistemas de unidades

$$\mu_0 = \left(\frac{\text{G}}{\text{Oe}}\right) = \frac{\text{(T)} \times 10^4}{\frac{4\pi}{10}\left(\frac{\text{Av}}{\text{cm}}\right)} = \frac{\text{(T)} \times 10^4}{\frac{4\pi}{10}\left(\frac{\text{Av}}{\text{m} \cdot 10^2}\right)} = \frac{10^7}{4\pi} \frac{\text{(T)}}{\left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right)}$$

de donde se deduce que al ser μ_0 en el sistema C.G.S. igual a 1 su valor en el sistema M.K.S., en $\frac{\text{(T)}}{\left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right)}$ asciende a

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}} \qquad [1.03.01\ a]$$

cifra ya bastante incómoda.

1.03.02. **Curva de inducción**

La ecuación $B = \mu H$ sólo tiene expresión analítica para el aire y demás sustancias no ferromagnéticas, siendo entonces precisamente (en unidades C.G.S.: (G) y (Oe)

$$B = H.$$

Los materiales magnéticos requieren una representación gráfica [1] de la depencia entre ambas magnitudes: campo magnético H y densidad de flujo o inducción B.

Esta es la que se denomina *característica magnética o curva de inducción* del material considerado y en las máquinas eléctricas interesan las curvas relativas a la *fundición* (carcasas y polos de pequeñas máquinas de continua); al acero fundido extradulce llamado *acero dinamo* (máquinas de la misma naturaleza, medianas y grandes; polos y corona polar de los alternadores), al *acero forjado* y el *acero Siemens* que sustituyen al anterior en las piezas sometidas a mayores esfuerzos mecánicos y donde la homogeneidad debe hallarse asegurada; y, finalmente, las curvas referentes a las *chapas magnéticas aleadas* (chapas siliciosas) para los circuitos magnéticos sometidos a un flujo alterno [2].

Entre estas últimas existe una variada gama de productos comerciales

(1) La utilización creciente de los ordenadores electrónicos obliga a establecer una relación analítica, deducida de la curva empírica, entre ambas magnitudes y para que la ecuación sea sencilla su validez se restringe a la zona de aplicación concreta de la curva en cada caso.

(2) Dejamos a un lado la consideración de materiales magnéticos como el «permalloy», «perminvar», «hipernik», aglomerados de polvo magnético y otros muy interesantes en varias técnicas pero de escasa aplicación dentro de la construcción de maquinaria eléctrica.

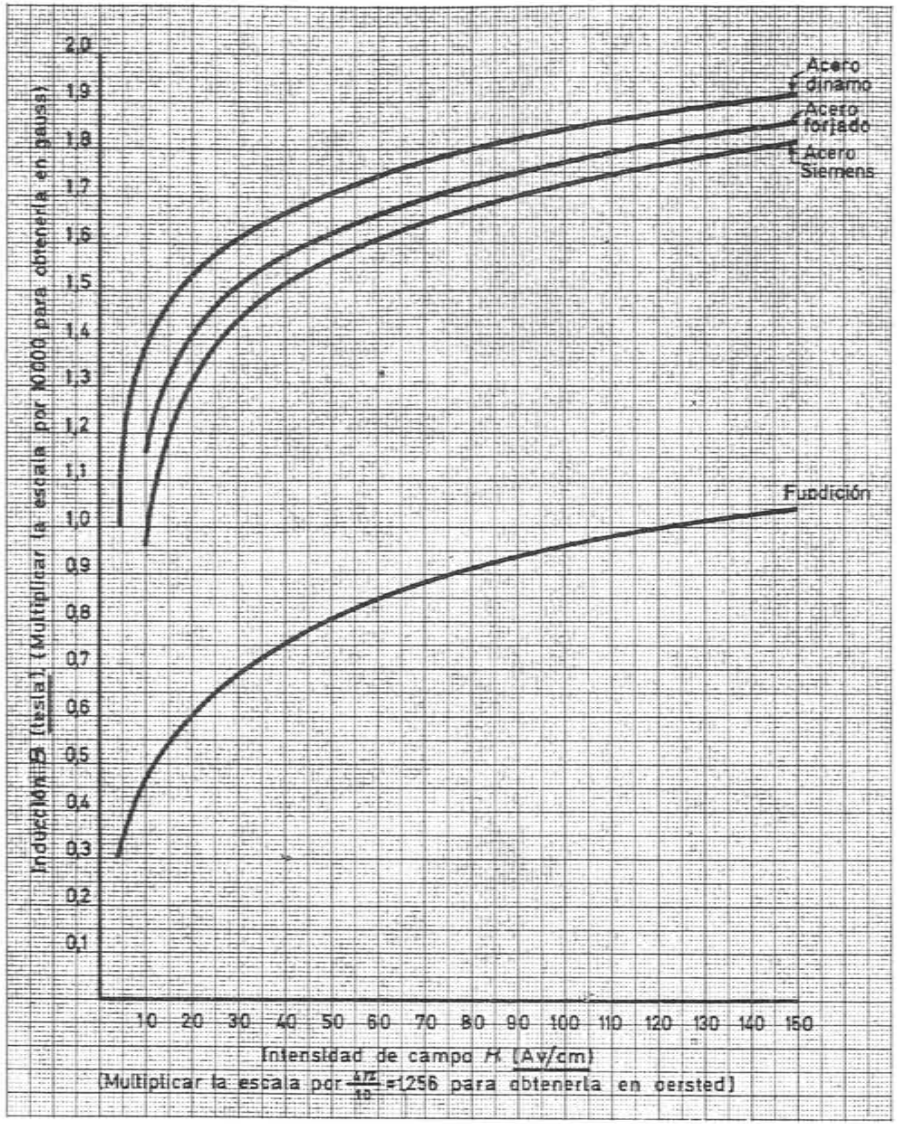


Fig. 1.03.02 a. Curva de inducción de los materiales ferromagnéticos macizos.

con nombres diversos, pero que sustancialmente se reducen a dos categorías principales: las chapas para máquinas rotatorias, *débilmente aleadas*, y de espesor casi siempre igual a 0,5 mm y las chapas *fuertemente aleadas* para transformadores (hasta 4 % de Si) con grueso por lo general, de 0,35 mm;

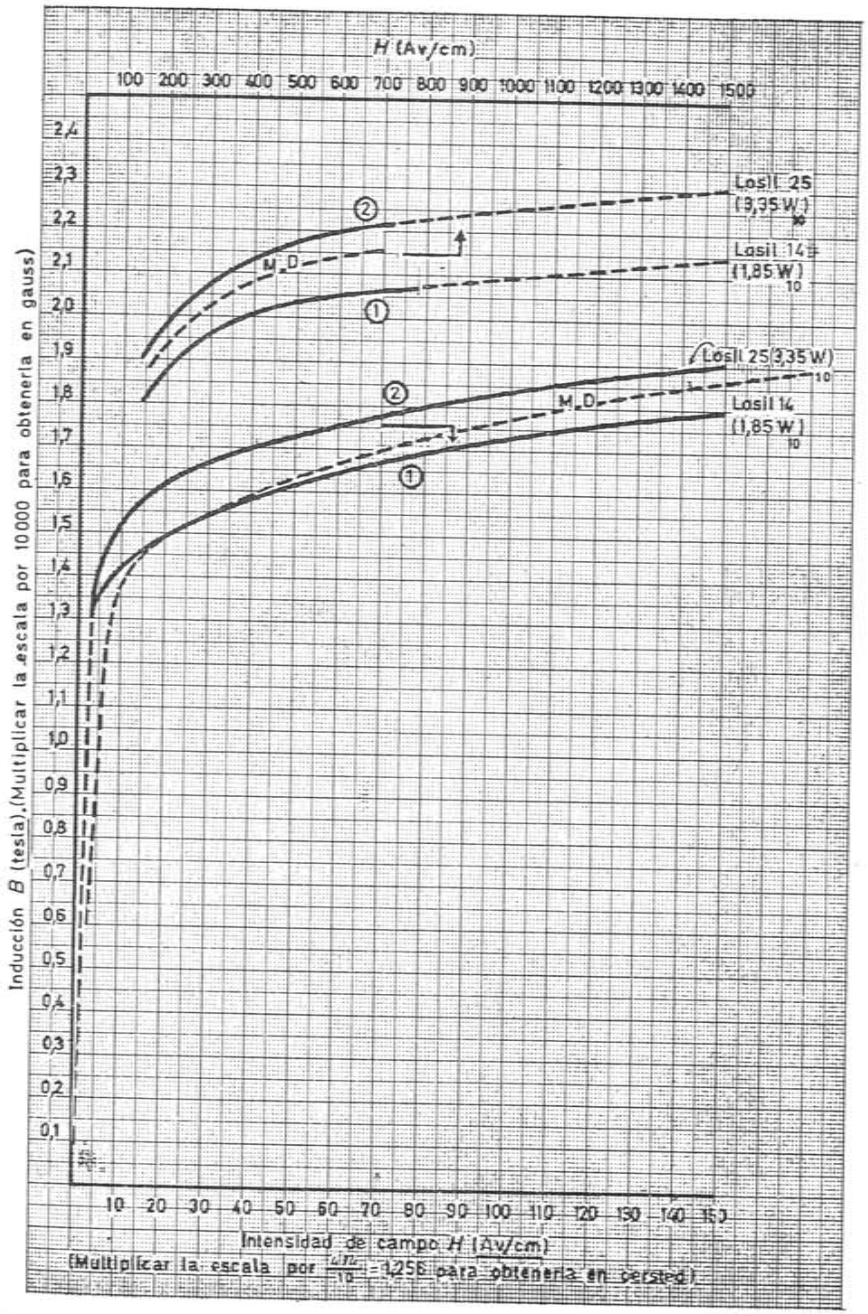


Fig. 1.03.02 b. Curvas de inducción para chapas magnéticas tipo dinamo.

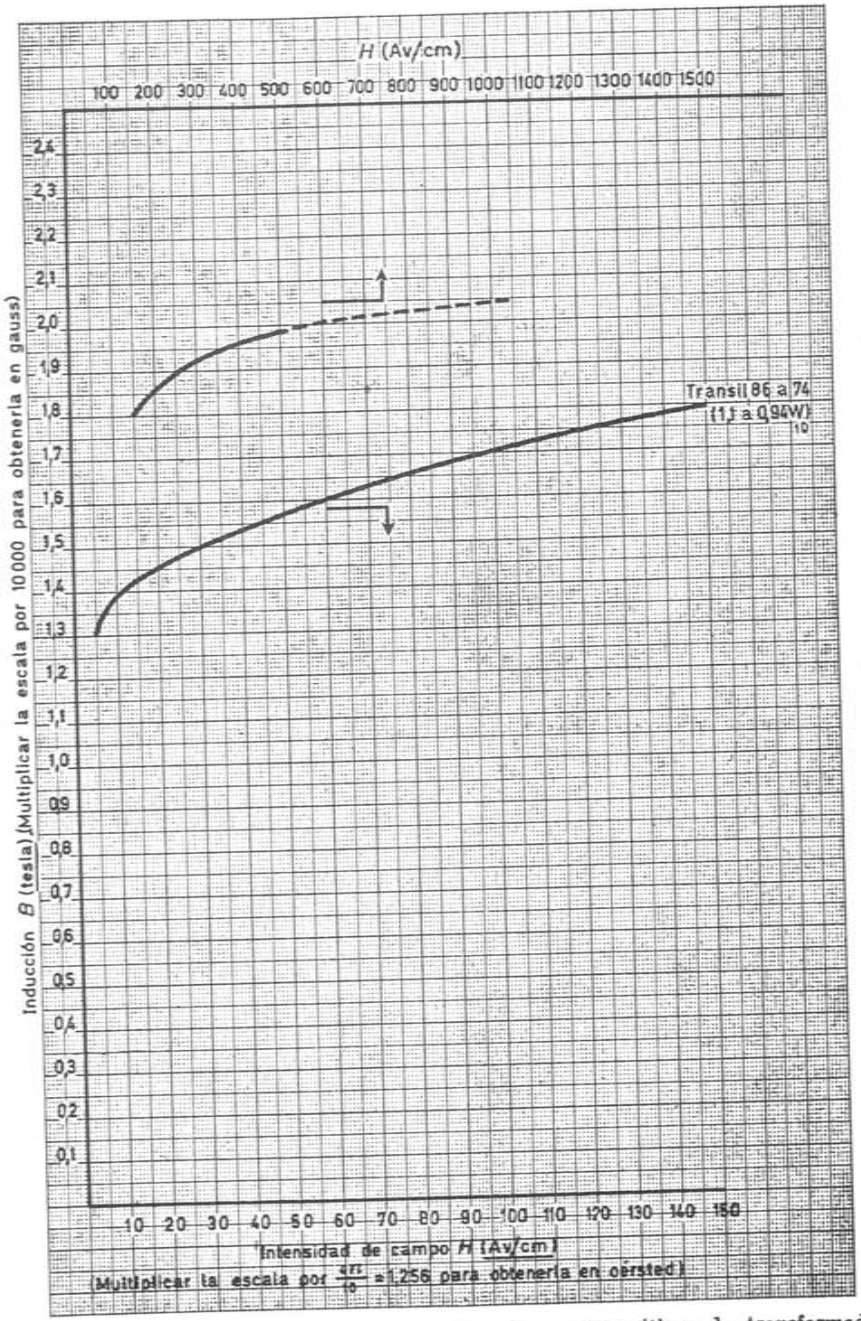


Fig. 1.03.02 c. Curva de inducción para las chapas magnéticas de transformador laminadas en caliente.

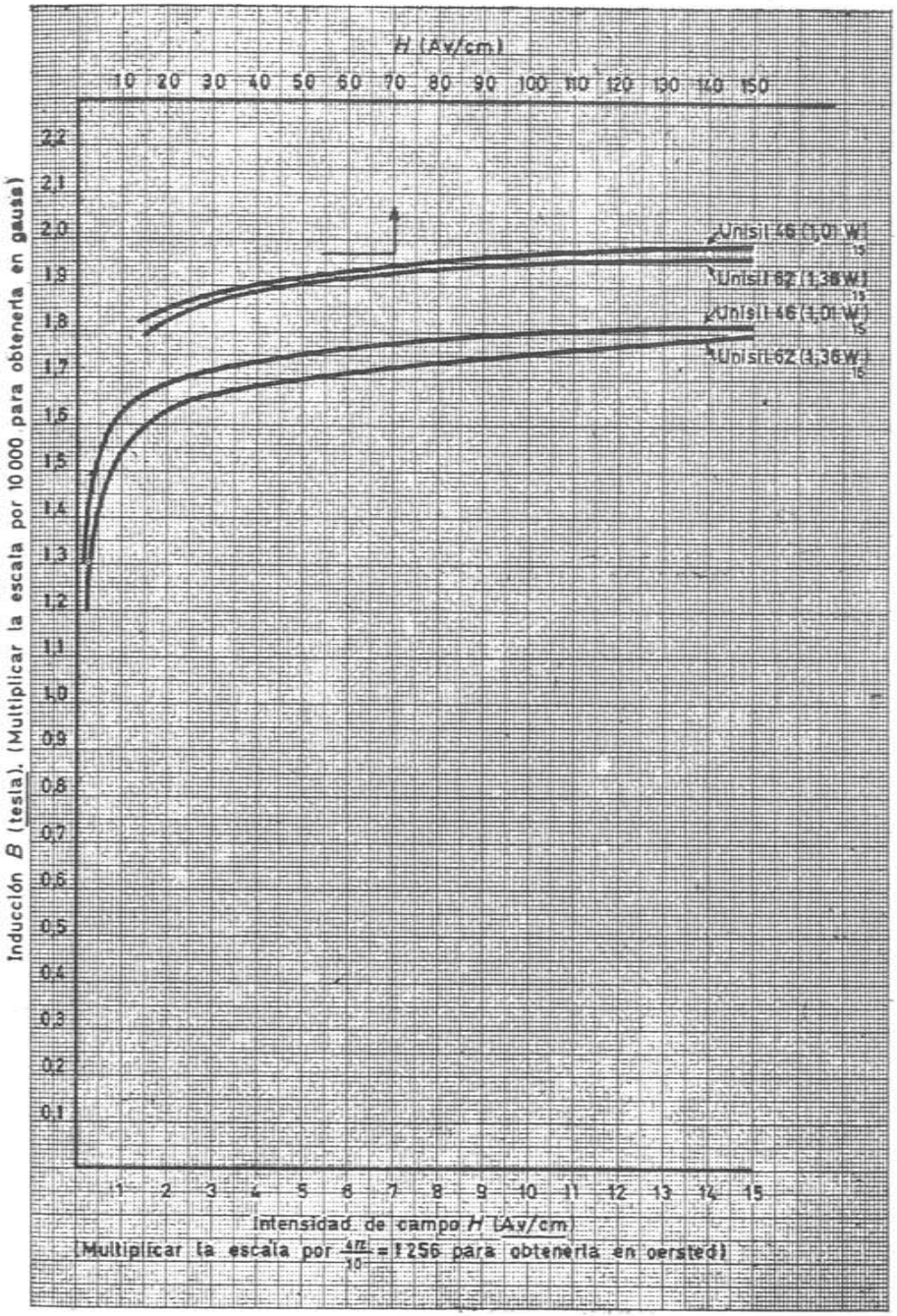


Fig. 1.03.02 d. Curvas de inducción para chapas magnéticas de transformador laminadas en frío (de grano orientado).

estas últimas, a su vez, se subdividen en chapas *laminadas en caliente*, de permeabilidad y pérdidas antes consideradas como normales, y chapas *laminadas en frío o de grano orientado*, de alta permeabilidad y bajas pérdidas que han venido a sustituir casi por completo a las precedentes en la fabricación de transformadores.

Las figuras 1.03.02 a, b, c y d muestran las curvas de inducción $B = f(H)$ de varios productos típicos entre los enumerados. La permeabilidad en cada punto vendría dada (en unidades C.G.S.) por el cociente

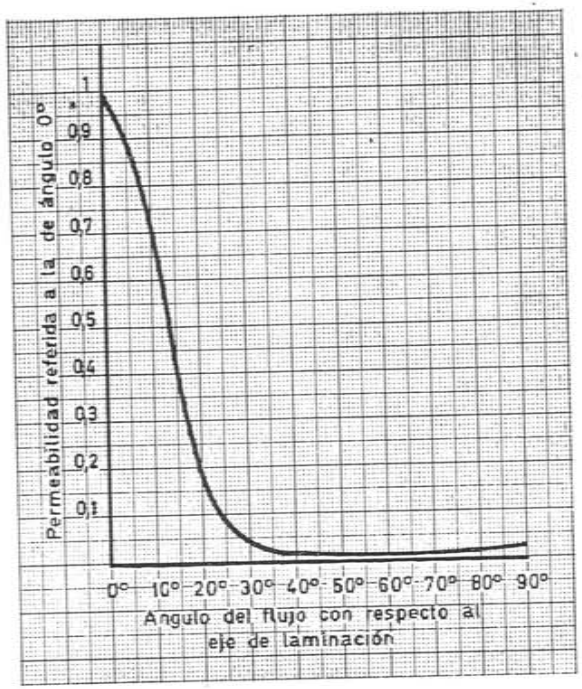


Fig. 1.03.02 e. Variación de la permeabilidad con el ángulo de las líneas de inducción respecto al eje de laminado. Chapas de grano orientado tipo de calidad intermedia trabajando con una inducción de 15 000 *G*.

$$\mu = \frac{B}{H}\left(\frac{\text{G}}{\text{Oe}}\right)$$

y alcanza magnitudes que van de 750 a 75 para la fundición y de 50 000 a 150 para la chapa orientada.

La característica fuertemente direccional de esta última se pone de manifiesto en la fig. (1.03.02 e). Según el ángulo del flujo con la dirección del laminado, la permeabilidad puede bajar a la centésima parte.

En las máquinas y transformadores eléctricos se calcula directamente con los valores de B y de H no haciéndose intervenir casi nunca los de la permeabilidad μ.

1.03.03. Curva de inducción en corriente alterna

Cuando un circuito magnético homogéneo se halla excitado por corriente alterna, la relación instantánea entre la intensidad del campo H (Oe) creada en cada momento y la f.m.m. de excitación Ni_μ (Av) necesaria para ello es la ya conocida

$$H = \frac{4\pi}{10}\,\frac{Ni_\mu}{l} \quad \text{(Oe)}$$

Si consideramos los valores máximos $\hat{H}$ e $\hat{I}_\mu$ del campo y de la corriente, sigue siendo válida la ecuación

$$\hat{H} = \frac{4\pi}{10}\,\frac{N\hat{I}_\mu}{l} \quad \text{(Oe)}$$

A este campo le corresponde una inducción máxima

$$\hat{B} = \mu\ \hat{H} \qquad \text{(G)}$$

Aunque H sea siempre proporcional a Ni_μ, la relación entre la inducción instantánea B y la corriente i_μ en cada momento dejará de ser lineal en cuanto el circuito sea de naturaleza ferromagnética. A una *onda de inducción senoidal* le corresponderá en el curso del período otra onda de *corriente magnetizante*, de valor eficaz determinado I_μ pero *deformada*, es decir, una onda compleja.

Dicha onda de inducción, supuesta, como hemos dicho, senoidal y de frecuencia constante f, inducirá a su vez en el circuito eléctrico una f.e.m. senoidal e para vencer la cual será necesario aplicar a dicho circuito en cada momento una tensión variable u, igual y opuesta, de la misma forma de onda, y, por tanto, de valor eficaz idéntico: $U = E$.

En conjunto, el mantenimiento del flujo alterno senoidal en el circuito magnético requiere la aplicación al mismo de una potencia reactiva magnetizante, con E e I_μ en valores eficaces,

$$P_\mu = EI_\mu \qquad \text{(VAr)}$$

Esta potencia de excitación constituye un dato, tan expresivo como puede serlo la f.m.m. sobre las exigencias impuestas al circuito eléctrico por el circuito magnético y acostumbra registrarse también en forma de curva o característica magnética en función de la inducción máxima $\hat{B}$

$$P_\mu = \varphi\ (\hat{B}) \qquad \text{(VAr)}$$

Se demuestra, como veremos a continuación, que para una calidad deter-

minada de material ferromagnético la potencia en cuestión, una vez fijada la frecuencia f y la inducción B es proporcional al peso G de la muestra, de modo que puede establecerse una curva de potencias magnetizantes específica $\dot{p}_\mu$ en $\frac{\text{VAr}}{\text{kg}}$ en función de la inducción máxima de la onda de flujo.

$$\dot{p}_\mu = \frac{P_\mu}{G} = \psi\,(\hat{B})\left(\frac{\text{VAr}}{\text{kg}}\right) \text{ para la frecuencia } f$$

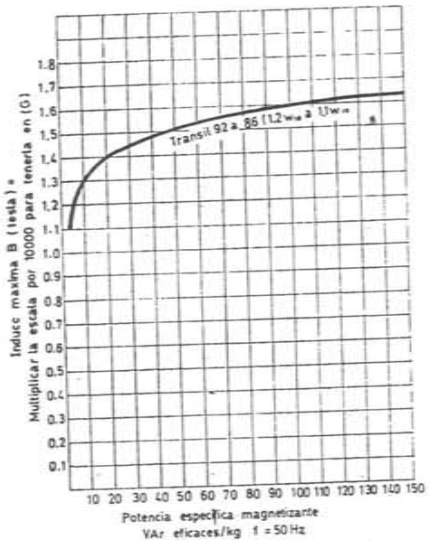


Fig. 1.03.03 a. Potencia magnetizante. Chapas laminadas en caliente.

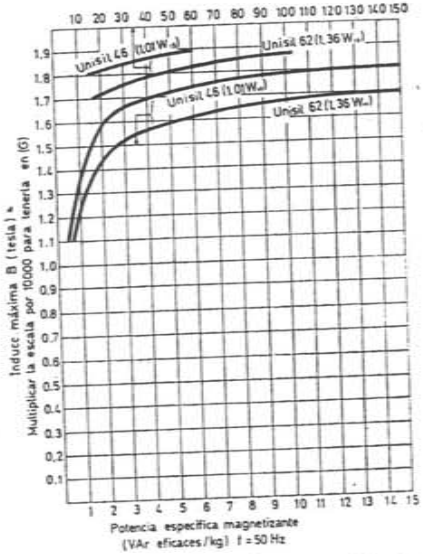


Fig. 1.03.03 b. Potencia magnetizante. Chapas laminadas en frío.

Como los materiales ferromagnéticos macizos no son aplicables en los circuitos de flujo alterno, dichas curvas no interesan más que para la chapa magnética.

Las figuras 1.03.03 a y b muestran las curvas más importantes aplicables a la construcción de transformadores; de ellas se hace abundante uso en el cálculo de estos últimos.

Las características $\dot{p}_\mu = \dot{\psi}(\hat{B})$ pueden deducirse de las curvas normales de inducción $B = f(H)$ y a continuación exponemos la relación analítica entre unas y otras. Esta relación sólo cabe establecerla para valores determinados de las ondas :los máximos, por ejemplo. Si la extendemos a los valores eficaces, debe interpretarse que se refieren, por lo que afecta a la corriente I_μ al valor eficaz de una onda senoidal cuyo máximo coincidiera con el de la onda compleja de corriente magnetizante lo cual confiere a los resultados teóricos una exactitud no muy grande aunque por regla general suficiente para esta clase de cálculos.

En la práctica, las curvas $\dot{p}_\mu = \dot{\psi}(\hat{B})$ no se deducen de las características $B = f(H)$

sino que se miden directamente sobre muestras y a ser posible sobre transformadores terminados. Los resultados con las ondas efectivas de corriente I_μ son así más exactos.

No obstante, damos a continuación el cálculo para pasar de unas curvas a las otras.

1.03.04. Cálculo de la excitación por corriente alterna

La expresión de la potencia magnetizante específica o por unidad de peso de chapa magnética con *onda senoidal de flujo* viene expresada por

$$\boxed{\dot{p}_\mu = \frac{P_\mu}{G} = \frac{10^{-3}\pi}{\gamma} f \frac{\hat{B}^2}{\mu_o \mu}} \left(\frac{\text{VAr eficaces}}{\text{kg}}\right) \qquad [1.03.04a]$$

P_μ = potencia de excitación requerida en VAr eficaces

$\dot{p}_\mu$ = potencia de excitación específica en $\frac{\text{VAr eficaces}}{\text{kg}}$

f = frecuencia de la onda de flujo en Hz

$\hat{B}$ = inducción máxima de la onda de flujo, en T, supuesta dicha onda senoidal

μ_o = permeabilidad absoluta en unidades M.K.S.

μ = permeabilidad relativa

γ = el peso específico de la chapa en $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

La potencia reactiva P_μ viene a su vez definida por

$$P_\mu = EI_\mu \qquad \text{(VAr eficaces)}$$

E = F.e.m. senoidal inducida en el devanado de excitación por la onda senoidal de flujo, en V eficaces

I_μ = Valor eficaz de la corriente alterna senoidal *cuya amplitud* $\hat{I}_\mu$ *fuese igual a la de la onda real de corriente* absorbida por la excitación, en A eficaces.

La ecuación [1.03.04 a] se deduce como sigue. Supongamos un núcleo magnético homogéneo de longitud l(m) y sección S(m²) en el cual se establece un flujo de variación senoidal en el tiempo con una intensidad máxima de campo $\hat{H}\left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right)$ a la cual corresponde la inducción $\hat{B}$ (T). La corriente en una bobina de N espiras necesaria para engendrar el campo $\hat{H}$ será $\hat{I}_\mu$ (A máximos) tal que

$$\hat{H} = \frac{N\hat{I}_\mu}{l} \quad \left(\frac{\text{Av máximos}}{\text{m}}\right)$$

y

$$\hat{B} = \hat{H}\,\mu_o \mu = \frac{N\hat{I}_\mu}{l}\mu_o \mu \quad \text{(T)}$$

de donde

$$\hat{I}_\mu = \frac{\hat{B}l}{N\,\mu_o \mu}$$

El valor eficaz de una onda de corriente senoidal de esta amplitud sería

$$I_\mu = \frac{\hat{I}_\mu}{\sqrt{2}} \text{ (A eficaces)} \qquad [1.03.04\ b]$$

Por su parte, el flujo senoidal de valor máximo, en Wb,

$$\hat{\Phi} = \hat{B}\ S \quad \text{(Wb)}$$

y frecuencia f (Hz) o período T (s) genera en la bobina de excitación propuesta de N espiras una f.e.m. también senoidal de valor medio en voltios

$$\overline{E} = \frac{\text{Variación de flujo durante un semiperíodo en Wb}}{\text{Tiempo de duración de un semiperíodo en segundos}}$$

$$= N\frac{2\hat{\Phi}}{\left(\frac{T}{2}\right)} = 4\frac{N\hat{\Phi}}{T} = 4\ N\hat{\Phi} f \text{ (V medios)}$$

y siendo senoidales el flujo y la f.e.m. inducida por él, le corresponde un valor eficaz

$$E = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\overline{E} = 1{,}11\ \overline{E} = 4{,}444\ N f\ \hat{\Phi} \text{ (V eficaces)} \qquad [1.03.04\ c]$$

La potencia de excitación requerida en función de una corriente senoidal de la misma amplitud $\hat{I}_\mu$ que la corriente magnetizante se obtendrá en VAr eficaces multiplicando [b] por [c]

$$P_\mu = E\ I_\mu = \left(4\frac{\pi}{2\sqrt{2}} Nf\hat{\Phi}\right)\left(\frac{\hat{I}_\mu}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \pi \cdot N f(\hat{B}S)\left(\frac{\hat{B}l}{N\mu_o\mu}\right) = \frac{\pi}{\mu_o\mu} f \hat{B}^2 (lS) \quad \text{(VAr eficaces)} \qquad [1.03.04\ d]$$

El producto (lS) es el volumen del núcleo en m³ lo que supone un peso

$$G = 1\,000\ \gamma\ (lS) \qquad \text{(kg)}$$

γ = peso específico en $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$. La ecuación [d] puede transformarse en

$$P_\mu = \pi \cdot f\ \frac{\hat{B}^2}{\mu_o\mu} \cdot \frac{G}{1000\ \gamma} \text{ (VAr eficaces).}$$

de donde

$$p_\mu = \frac{p_\mu}{G} = \frac{10^{-3}\pi}{\gamma} f \frac{\hat{B}^2}{\mu_o\mu}\left(\frac{\text{VAr eficaces}}{\text{kg}}\right)$$

según habíamos anunciado, [a].

1.03.05. **Ejemplo**

Calcular la potencia magnetizante específica para una chapa de grano orientado corriente, a 50 Hz, trabajando con una inducción máxima $\hat{B} = 1{,}7$ T.

Según la fig. 1.03.02 d para la chapa «Unisil 62» a 1,7 T o 17000 G le corresponde un campo de 4,7 Av/cm o 470 Av/m y, por tanto, unas permeabilidades

$$\mu_o\mu = \frac{B}{H} = \frac{1{,}7}{470} = 3{,}62 \cdot 10^{-3} \quad \left(\frac{T}{(\text{Av/m})}\right)$$

El peso específico de esta chapa es $\gamma = 7{,}65\ \frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$

Sustituyendo valores en la ecuación [1.03.04 a]

$$p_\mu = \frac{10^{-3}\ \pi}{\gamma} f \frac{\hat{B}^2}{\mu_o\mu} = \frac{10^{-3}\cdot\pi}{7{,}65} \cdot 50 \cdot \frac{1{,}7^2}{3{,}62\cdot 10^{-3}} = 16{,}4\left(\frac{(\text{VAr eficaces})}{\text{kg}}\right)$$

En la curva de potencia magnetizante fig. 1.03.03 b para «Unisil 62» se lee como cifra de p_μ correspondiente a $\hat{B} = 1{,}7$ T, $p_\mu = 16$ VA/kg.

1.03.06. Energía acumulada en un campo magnético

Si imaginamos una bobina de N espiras y resistencia $R(\Omega)$ y le aplicamos una tensión creciente desde o a $\hat{U}$ (V) cuyo valor instantáneo representaremos por u, en virtud de la cual circula en cada momento por dicha bobina una corriente i_μ (A) que engendra un flujo Φ_i (Wb) concatenado con todas las espiras, este flujo inducirá una f.e.m. instantánea e (V) tal que

$$u + e = Ri_\mu$$

$$u - N\ \frac{d\Phi_i}{dt} = Ri_\mu$$

La potencia que produce en cada instante la fuente de energía será (ui_u) y la energía suministrada durante el tiempo infinitesimal dt valdrá

$$ui_\mu dt = Ni_\mu d\Phi_i + Ri_\mu^2 dt. \qquad \text{(J)}$$

El término $(Ri_\mu^2 dt)$ representa la energía perdida por efecto JOULE en la resistencia de la bobina y $(Ni_\mu d\Phi_i)$ es precisamente la energía acumulada en el campo magnético dJ_μ debida al incremento de flujo $d\Phi_i$

$$dJ_u = Ni_u\, d\Phi_i \qquad \text{(J)}$$

Si la corriente pasa desde cero hasta el valor I_μ con una variación si-

multánea del flujo concatenado desde o a Φ, la energía total almacenada en el campo magnético vendrá dada por

$$\boxed{J_\mu = \int_o^\Phi N i_\mu \, d\Phi_i} \qquad \text{(J)} \qquad [1.03.06\text{ a}]$$

La relación $\Phi_i = \varphi(i_\mu)$ ligada a la característica magnética del circuito determina el valor de J_μ. Si dicha característica es por ejemplo, la que muestra la fig. 1.03.06 a se observará fácilmente que la energía acumulada en el mismo resulta proporcional al área rayada de dicha figura. La expresión [a] es absolutamente generál, con independencia del tipo de circuito magnético presente.

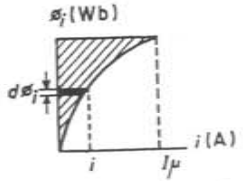


Fig. 1.03.06 a. Energía acumulada en un circuito magnético cualquiera

$J_\mu = N\int_o^\Phi i d\Phi$ (J)

Si el circuito es homogéneo en una zona más o menos extensa del espacio de sección constante S (m²) y longitud l (m), el campo uniforme creado por las N espiras vale

$$H_i = \frac{N i_\mu}{l} \qquad \text{(Av/m)}$$

y la inducción

$$B_i = \frac{\Phi_i}{S}\ \text{(T)} \qquad \text{o} \qquad d\Phi_i = S\, dB_i\ \text{(Wb)};$$

en tal caso

$$\boxed{J_\mu} = \int_o^\Phi H_i\, l \cdot S\, dB_i = \boxed{V\int_o^B H_i\, dB_i} \qquad \text{(J)} \qquad [1.03.06\text{ b}]$$

siendo V el volumen del circuito magnético en m³

$$V = l\, S\ (\text{m}^3)$$

La energía acumulada por unidad de volumen

$$\boxed{j_\mu = \frac{J_\mu}{V} = \int_o^B H_i\, dB_i} \qquad \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right) \qquad [1.03.06\text{ c}]$$

(H en $\frac{\text{Av}}{\text{m}}$, B en T).

Esta fórmula es aplicable a todo circuito completo o parte del mismo mientras los valores de H_i y B_i se mantengan únicos dentro del volumen V considerado.

La energía acumulada por unidad de volumen es también proporcional, pues, al área rayada de la fig. (1.03.06 b) donde se representa gráficamente una característica magnética en su forma $B_i = \text{f}\,(H_i)$.

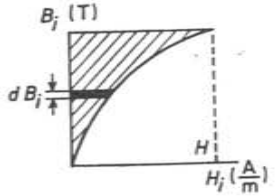


Fig. 1.03.06 b. Energía específica de un campo magnético $j_\mu = \int_o^B H_i\, dB_i \left(\frac{J}{\text{m}^3}\right)$

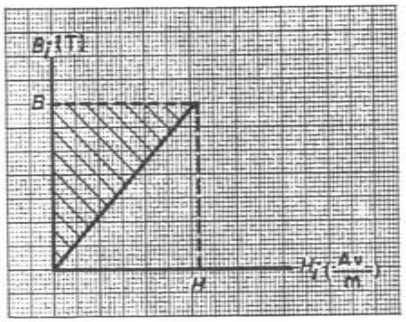


Fig. 1.03.06 c. Energía específica acumulada en un circuito magnético de permeabilidad constante μ

$j_\mu = \frac{HB}{2}\ \left(\frac{J}{\text{m}^3}\right)$

Si el circuito magnético es de permeabilidad constante (caso del aire, por ejemplo), la característica magnética es rectilínea (fig. 1.03.06 c)

$$\Phi_i = \frac{\Phi}{I_\mu}\, i_\mu \quad ; \quad d\Phi_i = \frac{\Phi}{I_\mu}\, di_\mu$$

de donde, [a],

$$J_\mu = \int_o^\Phi N\, i_\mu\, d\Phi_i = \int_o^{I_\mu} N\, \frac{\Phi}{I_\mu}\, i_\mu\, di_\mu = \left(\frac{N\Phi}{I_\mu}\right)\left(\frac{I_\mu^2}{2}\right) =$$

$$= \boxed{(N\Phi)\,\frac{I_\mu}{2}} \qquad \text{(J)} \qquad [1.03.06\text{ d}]$$

(Φ en Wb, I_μ en A)

El número de concatenaciones máximas ($N\Phi$) en (espiras-weber) por unidad de corriente de excitación I_μ (A) es lo que se denomina «coeficiente de autoinducción» o «inductancia» L del circuito magnético en (H)

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{I_\mu}} \qquad \text{(H)} \qquad [1.03.06\text{ e}]$$

de donde, otra expresión de energía total acumulada

$$\boxed{J_\mu = L\,\frac{I_\mu^2}{2}} \quad \text{(J)} \qquad [1.03.06\ \text{f}]$$

(L en H, I_μ en A)

ecuación también general *mientras la permeabilidad y con ella L permanezcan constantes*. Análogamente en este caso, para cualquier zona donde el campo sea, además, homogéneo, [c],

$$\boxed{j_\mu = \frac{H\ B}{2}} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right) \qquad [1.03.06\ \text{g}]$$

(H en $\frac{\text{Av}}{\text{m}}$, B en T).

y también (para el aire y demás sustancias paramagnéticas, $\mu_o\ \mu = \mu_o$),

$$\boxed{j_\mu = \frac{H^2\mu_0}{2} = \frac{B^2}{2\,\mu_0\,\mu}} \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right) \qquad [1.03.06\ \text{h}]$$

(H en $\frac{\text{Av}}{\text{m}}$, B en T, μ_0 en unidades M.K.S.; para el aire, $\mu = 1$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$).

De las ecuaciones de energía acumulada en un campo magnético surgen otros dos criterios posibles para la definición del concepto de inductancia L. Aparte la tradicional que hace referencia al estado final determinado por Φ e I_μ y que podríamos llamar inductancia media,

$$\boxed{L_m = N\,\frac{\Phi}{I_\mu}} \quad \text{(H)} \qquad [1.03.06\ \text{i}]$$

(Φ en Wb, I_μ en A)

y que carece de utilidad en cuanto la permeabilidad no permanece invariable durante todo el proceso de excitación, cabe definir una inductancia dinámica o instantánea, cualquiera que sea el valor de μ

$$\boxed{L_i = N\,\frac{d\Phi_i}{di_\mu}} \quad \text{(H)} \qquad [1.03.06\ \text{j}]$$

(Φ en Wb, i_μ en A)

que es la que intervendría realmente en cada momento en la ecuación de las f.e.m.

$$e = -N\,\frac{d\Phi_i}{dt} = -\left(N\,\frac{d\Phi_i}{di_\mu}\right)\frac{di_\mu}{dt} = -L_i\,\frac{di_\mu}{dt}$$

y en segundo lugar un c.d.a.i. energético L_J tal que

$$J_\mu = L_J\,\frac{I_\mu^2}{2} \quad \text{o} \quad \boxed{L_J = \frac{2\,J_\mu}{I_\mu^2}} \quad \text{(H)} \qquad [1.03.06\ \text{k}]$$

(J_μ en J, I_μ en A)

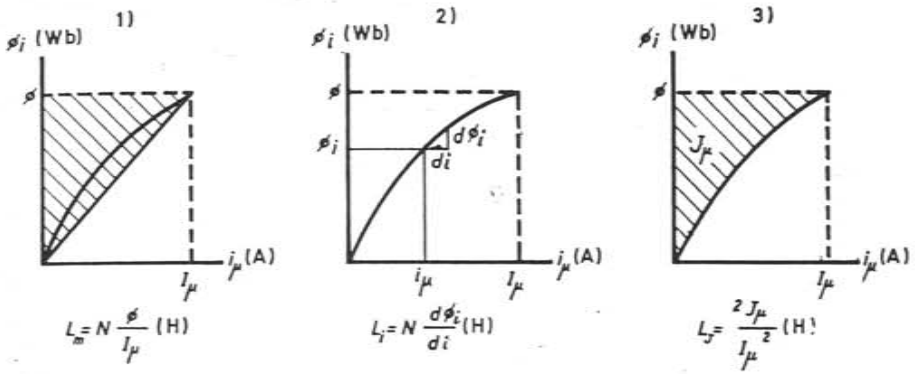


Fig. 1.03.06 d. Inductancias media 1), dinámica 2) y energética 3) de un circuito magnético cualquiera.

La fig. (1.03.06 d) muestra gráficamente el significado de estos tres valores de la inductancia correspondientes a un circuito magnético de cualquier naturaleza. L_m sería una inductancia media como si la permeabilidad final se hubiese mantenido constante durante todo el proceso de excitación, (caso en el cual la energía acumulada hubiera sido la representada por el área rayada de la fig. 1) que excede de la energía realmente almacenada, definida por la superficie entre la curva y el eje de ordenadas.

L_i es la inductancia que expresa el ritmo de variación de las concatenaciones de flujo, con respecto a la corriente inductora, causa de la f.e.m. instantánea.

L_J sería finalmente el c.d.a.i. de un circuito magnético de característica lineal equivalente al circuito real en el sentido de que podría almacenar la misma energía J_μ que este último al ser excitado por la corriente máxima I_μ (el flujo final sería menor en el circuito equivalente).

Todas las ecuaciones anteriores han sido deducidas en unidades M.K.S.

En unidades C.G.S. con l en (cm), S en (cm²), V en (cm³), H en (Oe), μ en $\left(\frac{\text{G}}{\text{Oe}}\right)$ B en (G) y Φ en (M), y manteniendo I en (A), L en (H) y J en (J),

$$H = \frac{4\pi}{10}\frac{NI_\mu}{l} \quad \text{(Oe)} \qquad [1.03.06\ l]$$

$$B = \mu\, H \quad \text{(G)} \qquad [1.03.06\ m]$$

$$\Phi = B \cdot S \quad \text{(M)} \qquad [1.03.06\ n]$$

$$L_i = N\frac{d\Phi}{di_\mu}\cdot 10^{-8} \quad \text{(H)}; \qquad [1.03.06\ o]$$

$$J_\mu = \int_0^\Phi Ni_\mu d\Phi_i \cdot 10^{-8}\text{(J)}, \text{ general para todos los casos;} \qquad [1.03.06\ p]$$

y

$$j_\mu = \frac{10^{-7}}{4\pi}\int_0^B H_i\, dB_i \left(\frac{\text{J}}{\text{cm}^3}\right), \text{ también general.} \qquad [1.03.06\ q]$$

Con μ = constante (que suele corresponder precisamente a $\mu = 1$),

$$J_\mu = (N\Phi)\frac{I_\mu}{2}10^{-8} \quad \text{(J)} \qquad [1.03.06\ r]$$

$$= L\frac{I^2_\mu}{2} \quad \text{(J)} \qquad [1.03.06\ s]$$

siendo $$L = N\frac{\Phi}{I_\mu}10^{-8} \quad \text{(H)} \qquad [1.03.06\ t]$$

y

$$j_\mu = \frac{10^{-7}}{8\pi}(HB) \quad \left(\frac{\text{J}}{\text{cm}^3}\right) \qquad [1.03.06.u]$$

$$= \frac{10^{-7}}{8\pi}H^2\mu = \frac{10^{-7}}{8\pi}\frac{B^2}{\mu}\left(\frac{\text{J}}{\text{cm}^3}\right) \qquad [1.03.06\ v]$$

Es cómodo, a veces, disponer de una expresión de la energía magnética acumulada en un circuito en función de la permeancia total del mismo Λ. En términos finitos ello sólo es posible si la permeabilidad μ y por tanto Λ permanecen constantes.

En tal caso, con Λ en unidades M.K.S. $\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$ o lo que es equivalente la sección transversal S en m² y la longitud l del circuito en m.

$$\boxed{J_\mu = \frac{(N\ I_\mu)^2}{2}\Lambda}\ ; \quad \text{(J)} \qquad [1.03.06\ x]$$

$$\Lambda = \mu_0\ \mu\ \frac{S}{l}\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \text{ (para el aire, } \mu = 1;\ \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7})$$

y con Λ en unidades C.G.S. $\left(\frac{\text{M}}{\text{Oe}}\right)$, o sea, S en cm² y l en m,

$$J_\mu = 2\pi\cdot 10^{-9}\,(NI)^2\,\Lambda\ \text{(J)}; \qquad [1.03.06\ y]$$

$$\Lambda = \mu\,\frac{S}{l}\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right);\ \text{(para el aire, } \mu = 1)$$

La corriente I_μ siempre en A.

En efecto; tomando la ecuación general [a] con las unidades de flujo magnético en el sistema M.K.S., es decir, en Wb,

$$J_\mu = \int_0^\Phi Ni_\mu\ d\Phi i$$

como

$$\Phi = (Ni_\mu)\Lambda$$

si Λ permanece invariable (μ = cte.)

$$d\Phi_i = N\ \Lambda\ di_\mu$$

y sustituyendo en la expresión anterior de J_μ

$$J_\mu = \int_0^{I_\mu}(Ni_\mu)\ (N\Lambda\ di_\mu) = N^2\Lambda\,\frac{I_\mu^2}{2} = \frac{(NI_\mu)^2}{2}\,\Lambda\cdot(\text{J})$$

tal y como se expone en [x].

Con Φ en M, [n], y Λ en $\frac{\text{M}}{\text{Oe}}$, también constante, [p],

$$J_\mu = \int_0^\Phi Ni_\mu\ d\Phi_i\ 10^{-8}:$$

$$\Phi_i = \frac{4\pi}{10}Ni_\mu\Lambda\ ;\quad d\Phi_i = \frac{4\pi}{10}\ N\Lambda\ di_\mu$$

la expresión de la energía pasará a ser

$$J_\mu = \int_0^{I_\mu} Ni_\mu\cdot\frac{4\pi}{10}N\Lambda\ di_\mu\ 10^{-8} = 4\pi\cdot 10^{-9}\cdot N^2\Lambda\frac{I_\mu^2}{2} =$$

$$= 2\pi\cdot 10^{-8}\,(NI_\mu)^2\,\Lambda \quad \text{(J)}$$

según indica la ecuación [y].

La energía acumulada en los campos magnéticos tampoco alcanza valores de orden industrial, aunque sí suficientes para producir extratensiones y chispas de ruptura perjudiciales al interrumpir bruscamente los circuitos,

y en asociación con la capacidad dieléctrica es susceptible de provocar oscilaciones. Por cada dm³ de aire donde la inducción alcance un valor de 1 T (10 000 G), la energía acumulada asciende a, [h] y [1.03.01 a]

$$J_\mu = \frac{1}{1\,000}\,\frac{B^2}{2\,\mu_0} = \frac{1}{1\,000}\,\frac{1^2}{2\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}} = 398\,(\mathrm{J/dm^3})$$

o bien, $398 \cdot 0{,}24 = 95$ cal·g: la energía necesaria para elevar de 0,1 °C escaso la temperatura de 1 l de agua.

1.03.07. Ejemplo

(El cálculo detallado del circuito magnético que conduce a los valores tomados como datos puede verse en el párrafo 1.04.29).

Una dinamo de 6 polos, excitación independiente, trabaja en vacío con las siguientes inducciones efectivas máximas:

entrehierro $\hat{B}_\delta = 0{,}825$ T

dientes $\hat{B}_d = 1{,}86$ T (promedio, según la tensión magnética requerida)

núcleo $\hat{B}_n = 0{,}677$ T

polos $B_p = 1{,}44$ T

yugo $B_y = 1{,}01$ T.

La longitud efectiva del entrehierro es $\delta = 5{,}5$ mm y el flujo por polo en el mismo $\Phi_\delta = 0{,}0508$ Wb. El flujo medio por núcleo y yugo polar in luyendo la dispersión, que asciende a un 11,6 % del flujo en el entrehierro, vale $\Phi_p = \Phi_y = 1{,}116 \times 0{,}0508 = 0{,}0567$ Wb.

Los volúmenes de las diferentes partes del circuito magnético son los siguientes: teniendo en cuenta que para los dientes consideraremos concentrado el flujo solamente en aquéllos que se hallan bajo el arco polar el cual cubre un 62 % del entrehierro.

dientes de chapa magnética	$V_d =$	8,8 dm³ × 0,62 = 5,45 dm³
núcleo » » »	$V_n =$	47,2 »
polos » » »	$V_p =$	42,3 »
yugo » acero dinamo	$V_y =$	91 »

Las curvas de inducción para la chapa magnética y para el acero fundido empleados en la construcción de esta máquina dan las siguientes intensidades de campo con las inducciones arriba indicadas

para	$B = 0$	T	$H = 0$	Av/cm
»	$\hat{B}_n = 0{,}677$	»	$\hat{H}_n = 2$	»
»	$B_y = 1{,}01$	»	$H_y = 4$	»
»	$B_p = 1{,}44$	»	$H_p = 6$	»
»	$\hat{B}_d = 1{,}86$	»	$\hat{H}_d = 148$	»

El devanado del inductor consta de 400 espiras por polo, y la excitación total requiere una corriente de 11,3 A con lo cual se precisa aplicar al inductor una tensión de 99,5 V.

Calcular:

1.º La energía almacenada en el circuito magnético funcionando la máquina en vacío con las inducciones expresadas.

2.º El coeficiente de autoinducción energético del sistema de excitación.

3.º La extratensión máxima de ruptura suponiendo que el flujo inductor se extinga en $t_0 = 2/10$ de segundo siguiendo una curva de tipo senoidal (fig. 1.03.07 a-1); $\Phi_p = \Phi_{p\ max} - \Phi_{p\ max}$ sen ωt.

4.º La extratensión máxima en el caso de que la corriente y el flujo se extingan naturalmente según una ley de tipo exponencial, fig. (1.03.07a-2]

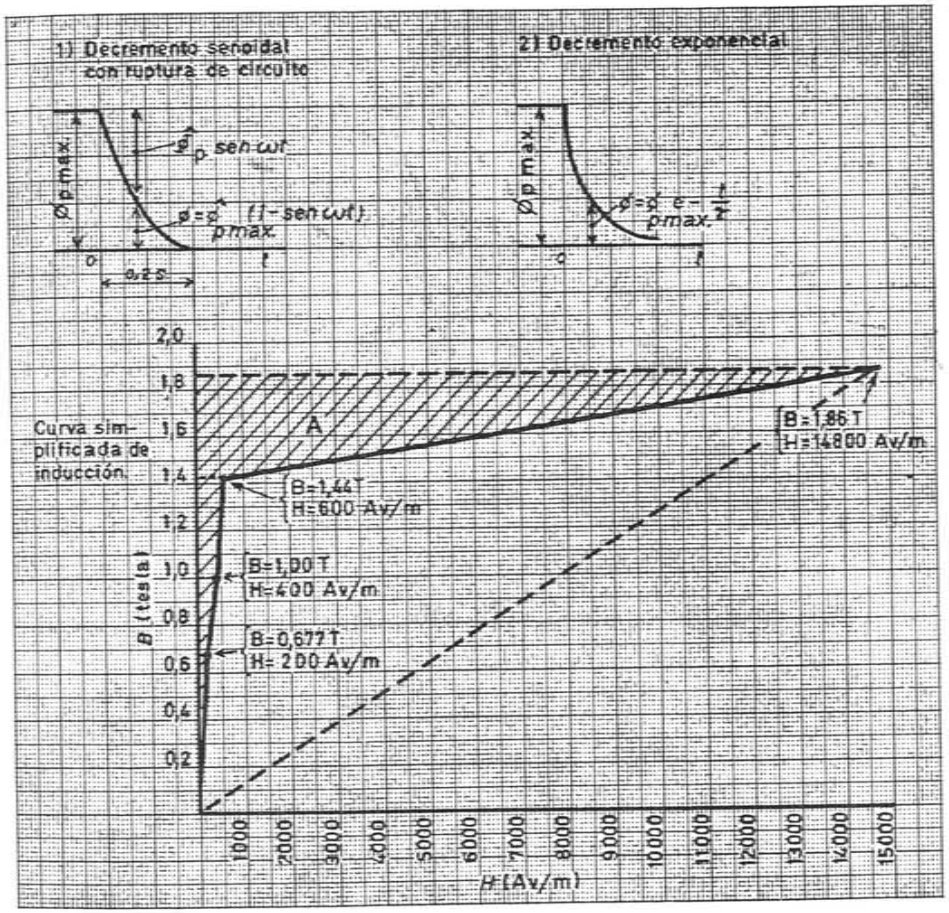


Fig. 1.03.07 a. Cálculo de la energía acumulada en un circuito magnético y de la extratensión de ruptura.

$$\Phi_p = \Phi_{p\ max}\ e^{-\frac{t}{\tau}}\quad (\tau \text{ es la constante de tiempo})$$

1.º Simplificaremos notablemente la solución del problema, sin alterar de un modo apreciable los resultados adoptando una curva de inducción, común para el acero dinamo y la chapa magnética, formada por una línea poligonal con sus vértices en los puntos señalados por las condiciones de inducción y campo en cada parte del circuito (figura 1.03.07 a)

Para los elementos ferromagnéticos partimos de la ecuación general [1.03.06 b]

$$J_\mu = V\int_0^B H_i\,dB \quad (\text{J})$$

$$(H \text{ en } \frac{\text{Av}}{\text{m}},\ B \text{ en T},\quad V \text{ en m}^3)$$

sustituyendo la integral por las superficies trapeciales A equivalentes de la curva de inducción. Así,

para el núcleo, $A_n = \frac{200}{2}\,0{,}677 =$ 67,7 J/m³

» el yugo, $A_y = 67{,}7 + \frac{200+400}{2}\,(1{,}0 - 0{,}677) =$ 164,5 »

» los polos, $A_p = 164{,}5 + \frac{400+600}{2}\,(1{,}44 - 1{,}0) =$ 384,5 »

» los dientes, $A_d = 384{,}4 + \frac{600+14800}{2}\,(1{,}86 - 1{,}44) =$ 3615 »

y teniendo en cuenta los volúmenes respectivos, las energías acumuladas en cada elemento ferromagnético del circuito será

para el núcleo $J_n = A_n\,V_n = 67{,}7 \cdot \frac{47{,}2}{1000} =$ 3,2 J

» el yugo $J_y = A_y\,V_y = 164{,}5 \cdot \frac{91}{1000} =$ 15,0 »

» los polos $J_p = A_p\,V_p = 384{,}5 \cdot \frac{42{,}3}{1000} =$ 16,3 »

» los dientes $J_d = A_d\,V_d = 3615 \cdot \frac{5{,}45}{1000} =$ 19,7 »

Energía total acumulada en el hierro $J_{Fe} =$ 54,2 J

Para los entrehierros de permeabilidad constante utilizaremos la ecuación, [1.03.06 d],

$$J_\delta = (NI)_\delta \frac{\Phi_\delta}{2},$$

Con

$$\hat{B}_\delta = 0{,}825\ \text{T} \qquad \hat{H}_\delta = \frac{\hat{B}_\delta}{\mu_0} = \frac{0{,}825}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 656\,000\ \text{Av/m} \qquad [1.03.01.\ a]$$

y

$$(NI)_\delta = \hat{H}_\delta\,\delta = 656\,000\,\frac{5{,}5}{1000} = 3\,600\ \text{Av}$$

Cuanto a Φ_δ se nos da su valor 0,0508 Wb por polo y teniendo en cuenta que la máquina es exapolar

$$J_\delta = 6 \cdot 3600\,\frac{0{,}0508}{2} = 547\ \text{J}$$

La energía magnética total almacenada en las condiciones propuestas asciende, pues, a

$$J_\mu = J_{Fe} + J_\delta = 54{,}2 + 547 = 601{,}2\ \text{J}.$$

Notemos que en el entrehierro, por sí solo, se acumula el 90 % de dicha energía. Teniendo esto en cuenta no hemos apurado la exactitud en el cálculo de la energía magnética en el hierro.

2.º El coeficiente de autoinducción energético es, por definición, [1.03.06 k],

$$L_J = \frac{2\,J_\mu}{I_\mu^2}\ (\text{H})$$

y siendo I_μ según se anuncia igual a 11,3 A

$$L_J = \frac{2 \cdot 601{,}2}{11{,}3^2} = 9{,}4\ \text{H}$$

3.º Cualquiera que sea la ley seguida por el flujo en su extinción, la f.e.m. *media* de autoinducción valdrá

$$\bar{E} = N\,\frac{\Phi_p}{t_0}\quad (\text{V})$$

(Φ_p en Wb, t_0 en s)

El número total de espiras de la máquina a razón de 400 por polo es

$$N = 6 \cdot 400 = 2400\ \text{espiras}$$

El flujo por polo concatenado con ellas es el de los núcleos polares que incluye el de dispersión entre los mismos; el valor medio de aquél se indica ser de $\Phi_p = 0{,}0567$ Wb y el tiempo de ruptura $t_0 = 0{,}2$ s. Luego,

$$\bar{E} = 2400\,\frac{0{,}0567}{0{,}2} = 680\ \text{V}$$

Si el decrecimiento del flujo y por consiguiente el de la f.e.m. se produce según una ley senoidal, la relación del valor máximo $\hat{E}$ al valor medio $\bar{E}$ sabemos que es igual a $\frac{\pi}{2} = 1{,}57$; por tanto

$$\hat{E} = 1{,}57\ \overline{E} = 1{,}57 \cdot 680 = 1\,065\ \text{V}$$

o sea, $\frac{1065}{99{,}5}$, casi 11 veces la tensión de excitación.

4.° Si la ley de extinción es de tipo exponencial

$$\Phi_p = \Phi_{p\,max}\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

dará origen a una f.e.m. autoinductiva

$$e = -N\frac{d\Phi_p}{dt} = N \cdot \Phi_{p\,max}\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}$$

y el valor máximo $\hat{E}$ para $t = 0$

$$\hat{E} = \frac{N\,\Phi_{p\,max}}{\tau}\ \text{(V)}$$

($\Phi_{p\,max}$ en Wb, τ en s)

La constante de tiempo varía con L a lo largo del proceso pero con la máquina en vacío la saturación es débil y podemos suponer L constante $= L_m$

$$\tau = \frac{L_m}{R}\ \text{(s)}$$

(L en H, R en Ω)

Si supusiéramos nula la resistencia del reostato de excitación (inductor prácticamente en corto circuito) intervendría exclusivamente la resistencia del bobinado inductor que podemos deducir de los valores de la tensión y de la corriente de excitación en vacío

$$R = \frac{99{,}5\ V}{11{,}3\ A} = 8{,}8\ \Omega.$$

Cuanto a la inductancia media, [1.03.06. i],

$$L_m = N\frac{\Phi_{p\,max}}{I_\mu} = 2200\,\frac{0{,}0567}{11{,}3} = 12{,}05\ \text{H}$$

algo mayor que su valor energético. Por consiguiente

$$\tau = \frac{L_m}{R} = \frac{12{,}05}{8{,}8} = 1{,}37\ \text{s}$$

(este es el tiempo que tardaría la corriente en descender al 36,8 % de su valor inicial).

Finalmente

$$\hat{E} = \frac{N\,\Phi_{p\,max}}{\tau} = \frac{2400 \cdot 0{,}0567}{1{,}37} = 99{,}5\ \text{V}$$

igual a la tensión de excitación, resultado previsible para el instante inicial por no haber variado la resistencia y constituir este proceso de extinción el normal de una bobina autoinductiva sin ruptura del circuito (1).

1.03.08. Esfuerzos mecánicos en el campo magnético

El esfuerzo que se desarrolla entre dos superficies imanadas dentro de un campo homogéneo de inducción B viene dado por

$$\boxed{f_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0\,\mu}}\quad \left(\frac{\text{Nw}}{\text{m}^2}\right) \qquad [1.03.08\ \text{a}]$$

con B en T y μ_0 en unidades M.K.S. $\left(\frac{\text{T}}{\text{Av/m}}\right)$. O también:

$$\boxed{f_\mu \approx \frac{1}{\mu}\left(\frac{B}{5}\right)^2}\quad \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right) \qquad [1.03.08\ \text{b}]$$

con B en kG

Para el aire,

$\mu_0 = 4\ \pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T}}{\text{Av/m}}$ y $\mu = 1$ en [a] y [b].

Tomemos, en efecto, la expresión de la energía acumulada en el circuito según se desprende de la [1.03.06 h]

$$J_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}\ V\ \text{(J)}$$

con B en T μ_0 en $\frac{\text{T}}{\text{Av/m}}$ y el volumen homogéneo V en m³.

Suponiendo prismático este último de sección S (m²) y longitud l(m)

$$V = S\ l$$

y

$$\text{J}_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}\,S\ l\ \ \text{(J)}$$

(1) También se deduce observando que al seguir la ley exponencial y ser $\hat{E} = \frac{N\Phi_{p\,max}}{\tau}$ es también $\hat{E} = \frac{L_m I_\mu}{\tau} = \frac{L_m I_\mu}{\left(\frac{L_m}{R}\right)} = R\ I_\mu$, independiente de $\Phi_{p\,max}$ máx. o de L_m.

Si aumentamos la distancia l (m) en un recorrido infinitesimal dl a expensas de una fuerza F_μ (Nw) la energía acumulada se habrá incrementado en

$$dJ_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} S\ dl \quad \text{(J)}$$

justamente a costa del trabajo de traslación efectuado

$$F_\mu\ dl \ \text{(Nw} \cdot \text{m) o (J)}$$

Igualando las dos últimas expresiones

$$F_\mu = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} S \qquad \text{(Nw)}$$

de donde

$$f_\mu = \frac{F_\mu}{S} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \left(\frac{\text{Nw}}{\text{m}^2}\right)$$

como indica la fórmula [a]; y también con F_μ en kg, B en kG, S en cm² y μ_0 en $\frac{\text{G}}{\text{Oe}}$,

$$F_\mu \cdot 9{,}81 = \frac{\left(\frac{B}{10}\right)^2}{2\,(4\pi \cdot 10^{-7}\mu)} \left(\frac{S}{100^2}\right)$$

o sea, [b],

$$f_\mu = \frac{F_\mu}{S} = \frac{B^2}{9{,}81 \cdot 2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-1}\,\mu} = \frac{B^2}{24{,}7\mu} \approx \frac{1}{\mu}\left(\frac{B}{5}\right)^2$$

Con la inducción de 1 T o 10 kG se tiene un esfuerzo, en el aire, de unas 40 Ton/m² o 4 kg por cm². Compárese con los esfuerzos dieléctricos, diez mil veces inferiores, de poco más de 4 kg/m² en el aire a la tensión disruptiva de 3,1 kV/mm (párr. 1.02.15).

Para los circuitos electromagnéticos de permeabilidad constante caracterizados por la permeancia Λ o el coeficiente de autoinducción L, la fuerza que aparece en la dirección de una traslación según el recorrido x viene dada por

$$\boxed{F_{\mu x} = \frac{(NI)^2}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial x}} \quad \text{(Nw)} \qquad [1.03.08\ c]$$

o

$$\boxed{F_{\mu x} = 5{,}1\ I^2 \frac{\partial L}{\partial x}} \quad \text{(kg)} \qquad [1.03.08\ d]$$

Con I en A, Λ en $\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}$, L en H y x en m en la primera ecuación y en cm en la segunda.

FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Ambas fórmulas pueden aplicarse numéricamente a base de incrementos finitos, con tal de que el intervalo geométrico Δx se tome lo suficientemente pequeño para que las variaciones $\Delta\Lambda$ o ΔL puedan suponerse lineales sin grave error, es decir, $\frac{\Delta\Lambda}{\Delta x}$ o $\frac{\Delta L}{\Delta x}$, constantes en todo el intervalo

De la ecuación [1.03.06 d], se desprende, que en unidades M.K.S.,

$$J_\mu = \frac{(NI)}{2}\Phi = \frac{NI}{2} NI \cdot \Lambda = \frac{(NI)^2}{2}\Lambda \qquad \text{(J)}$$

Si permaneciendo constante la intensidad I (1) imprimimos al circuito una traslación dx que modifique la permeancia en $\delta\Lambda$, la variación de energía valdrá

$$dJ_\mu = \frac{(NI)^2}{2}\partial\Lambda \qquad \text{(J)}$$

y se habrá producido a expensas del trabajo $F_{\mu x}\,\partial x$ (Nw · m) de la fuerza en la dirección del movimiento ∂x. Poniendo

$$dJ_\mu = F_{\mu x}\,\partial x \qquad \text{(Nw} \cdot \text{m) o (J)}$$

e igualando

$$\frac{(NI)^2}{2}\partial\Lambda = F_{\mu x}\,\partial x \ ; \quad F_{\mu x} = \frac{(NI)^2}{2}\frac{\partial\Lambda}{\partial x}\ \text{(Nw)}$$

según se da en [c]

También podríamos escribir [1.03.06 f]

$$J_\mu = \frac{LI^2}{2}\ \text{(J)}$$

y si el desplazamiento virtual ∂x provoca una variación ∂L de la inductancia a corriente constante I (1)

$$d\ J_\mu = \frac{I^2}{2}\partial L = F_{\mu x}\,\partial x \qquad \text{(J)}$$

y

$$F_{\mu x} = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial x}\ \text{(Nw)}$$

(I en A, L en H, x en m).

(1) Eléctricamente la intensidad I sufrirá una variación, de acuerdo con la del flujo, por efecto del desplazamiento virtual ∂x, siguiendo la ley de LENZ, pero se demuestra que estas variaciones producen un efecto de segundo orden infinitesimal sobre la energía. (Véase por ejemplo, FITZGERALD-KINGSLEY: «Electric Machinery»). Ello conduce a la conclusión final de que la fuerza es independiente de cómo se verifique la variación: a f.m.m. constante, a flujo constante o con variación de una y otro, lo cual está de acuerdo con la experiencia física.

También puede imaginarse que la traslación ∂x se efectúe tan lentamente que la f.e.m. inducida por la variación del flujo sea prácticamente nula y, por tanto, I = constante.

Si ponemos $F_{\mu x}$ en kg y x en cm

$$F_{\mu x} \cdot 9{,}81 = \frac{I^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x/100}$$

$$F_{\mu x} = \frac{100}{2 \cdot 9{,}81} I^2 \frac{\partial L}{\partial x} = 5{,}1 \; I^2 \frac{\partial L}{\partial x} \text{ (kg)}$$

como muestra la ecuación [d]

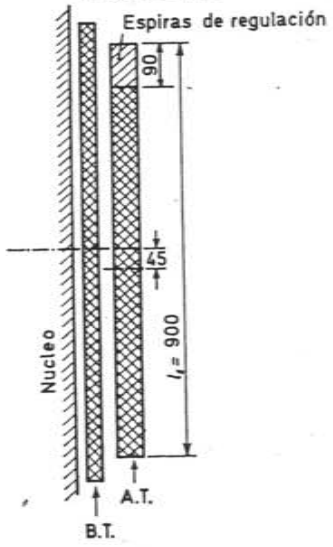


Fig. 1.03.09 a. Cálculo de los esfuerzos de corto circuito en un transformador.

1.03.09. **Ejemplos**

Ejemplo 1.º Determinar el valor medio del esfuerzo máximo de corto circuito [1] que tenderá a centrar los devanados primario y secundario de un transformador de 5000 kVA, 30/3 kV y/δ, 96,2/962 A, 50 Hz, con tomas de regulación en un extremo del primario mediante las cuales queda fuera de servicio una parte de las espiras del mismo que ocupa el 10 % de su longitud total $l_1 = 900$ mm (figura 1.03.09 a). Medida la reactancia de dispersión o de corto circuito con las bobinas que restan del primario en la posición extrema, $\dot{e}_{za}$, y con las mismas bobinas centradas sobre el secundario, $\dot{e}_{zb}$, se hallan unos valores respectivos $\dot{e}_{za} = 6{,}4$ % y $\dot{e}_{zb} = 6$ % de la tensión nominal.

El cálculo se puede efectuar refiriendo indistintamente todos los valores al primario o al secundario: elijamos el primario.

La caída de reactancia de dispersión $\dot{e}_{za} = 6{,}4$ por 100 resultaría en términos del primario

$$e_{za} = 6{,}4 \frac{30000/\sqrt{3}}{100} = 1108 \quad \text{V/fase}$$

equivalente a una inductancia de dispersión L_{za} tal que

$$2 \pi f L_{za} I_1 = e_{za}$$

$$L_{za} = \frac{e_{za}}{2\pi f \; I_1} = \frac{1108}{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 96{,}2} = 0{,}0366 \quad \text{H.}$$

a su vez, con los bobinados centrados,

$$L_{zb} = L_{za} \frac{\dot{e}_{zb}}{\dot{e}_{za}} = 0{,}0366 \frac{6}{6{,}4} = 0{,}0343 \quad \text{H}$$

(1) El esfuerzo en este caso es debido exclusivamente al flujo de dispersión entre ambos devanados ya que la permeancia del circuito magnético principal es independiente de la posición de las bobinas, es decir, $\frac{\partial \Lambda}{\partial x}$ sería siempre nula para este último circuito.

Esta variación de la inductancia $\Delta L = L_{za} - L_{zb} = 0{,}0366 - 0{,}0343 = 0{,}0023$ H se produce con una desviación de la bobina igual a la mitad del descentrado entre ambas o sea $\frac{1}{2}$ del 10 % de l_1

$$\Delta x = \frac{1}{2} \; 10 \; \frac{90}{100} = 4{,}5 \text{ cm}$$

Siendo la corriente nominal del primario por fase 96,2 A y la reactancia de corto circuito, con las bobinas descentradas, 6,4 % de la tensión nominal, la corriente permanente de corto circuito, primaria, a tensión nominal, despreciando la caída de resistencia interna, valdrá: aproximadamente

$$I_{cc} = 96{,}2 \frac{100}{6{,}4} = 1\,500 \text{ A eficaces}$$

Los esfuerzos máximos instantáneos se producirán al pasar la onda de corriente por su intensidad de cresta $\hat{I}_{cc}$ y, según el momento del corto circuito, la teoría electromagnética pone de relieve que la onda entera puede aparecer desviada inicialmente hacia un lado del eje de abscisas ascendiendo así su amplitud el doble; la atenuación debida a la resistencia del bobinado y a otras pérdidas viene a limitar la amplitud de la primera semionda a un 90 % del valor teórico. Suponiendo que dicha onda sea senoidal, la intensidad máxima a prever, será, pues,

$$\hat{I}_{cc} = 0{,}9 \cdot 2 \sqrt{2} \; I_{cc} = 2{,}55 \; I_{cc} = 2{,}55 \cdot 1500 = 3820 \text{ A de cresta}$$

Aplicando ahora la ecuación [1.03.08 d], en términos finitos

$$F_\mu \doteq 5{,}1 \; \hat{I}_{cc}^2 \frac{\Delta L}{\Delta x} \text{ (kg)}, \text{ con } \frac{\Delta L}{\Delta x} \text{ en } \left(\frac{\text{H}}{\text{cm}}\right)$$

tendremos como valor medio de $\frac{\Delta L}{\Delta x}$

$$\frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{0{,}0023}{4{,}5} = 0{,}51 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{cm}}$$

de donde

$$F_\mu = 5{,}1 \cdot 3\,820^2 \cdot 0{,}51 \cdot 10^{-3} = 38\,000 \text{ kg o } 38 \text{ Tm}$$

Las caídas de tensión provocadas por el cortocircuito en la red y en las líneas de servicio suelen reducir apreciablemente la corriente y el esfuerzo anteriores, en una proporción que depende de la capacidad propia del transformador con respecto a la del sistema de alimentación.

Para un cálculo más exacto teniendo en cuenta estas influencias, véase J. CORRALES «Teoría, Cálculo y Construcciones de Transformadores», 5.ª edic. Edit. Labor.

Ejemplo 2.º Calcular el empuje axial sobre los cojinetes debido al descentraje longitudinal entre rotor y estator de un motor de corriente continua de 50 CV, 1000 r/m. cuyas dimensiones son las siguientes.

Diámetro del rotor: $D = 320$ mm.
Entrehierro: $\delta = 5$ mm.

Inducción media en el entrehierro bajo el arco polar: $\overline{B}_\delta = 8{,}3$ kG
Arco polar efectivo: 70 % del paso polar ($\psi = 0{,}7$)

La permeancia del circuito ferromagnético permanecerá prácticamente invariable aunque cambie algo la posición axial del rotor. Sólo es preciso considerar, pues, la permeancia del entrehierro.

La inducción media en el aire $\overline{B}_\delta = 0{,}83$ T requiere una intensidad de campo magnético, todo en unidades M.K.S.

$$\overline{H}_\delta = \frac{\overline{B}_\delta}{\mu_0} = \frac{0{,}83}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 660\,000\ \frac{\text{Av}}{\text{m}}$$

y, por tanto, una f.m.m. para el entrehierro

$$(NI)_\delta = \overline{H}_\delta\ \delta = 660\,000\ \frac{5}{1000} = 3300\ \text{Av}$$

La variación relativa de la permeancia con el descentramiento x del rotor en sentido axial, limitada al entrehierro, es uniforme y podrá sustituirse por la variación en términos finitos $\frac{\Delta\Lambda}{\Delta x}$.

La permeancia Λ por metro axial del entrehierro para el conjunto de los cuatro polos de la máquina vale en unidades M.K.S. $\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$

$$\Lambda = \mu_0 \frac{S_\delta}{\delta} = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{0{,}7\ (\pi \cdot 0{,}32) \times 1}{5/1000} = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{Wb}}{\text{Av}}.$$

$(\pi \cdot 0{,}32)$ es el desarrollo del inducido, y $[0{,}7\ (\pi\ 0{,}32)]$ el arco efectivo total cubierto por los polos, en m, que multiplicado por 1 m nos da la superficie polar por m de longitud axial; dividida esta superficie por la longitud $\frac{5}{1000}$ m del entrehierro y multiplicada por $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ proporciona la permeancia propuesta en $\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}$ por metro de longitud axial.

Así, pues,

$$\frac{\Delta\Lambda}{\Delta x} = 1{,}77 \cdot 10^{-4}\ \frac{\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)}{\text{m}}$$

Aplicando ahora la ecuación [1.03.08 c], en términos finitos,

$$F_{\mu x} = \frac{(NI)_\delta^2}{2}\ \frac{\Delta\Lambda}{\Delta x} = \frac{3300^2}{2} \cdot 1{,}77 \cdot 10^{-4} = 960\ \text{Nw}$$

o sea

$$\frac{960}{9{,}81} = 98\ \text{kg}.$$

Al mismo resultado se llegaría tomando la ecuación [1.03.08 b] y evaluando como superficie de atracción la sección transversal del entrehierro. Con

μ en $\frac{\text{G}}{\text{Oe}}$, $\overline{B}_\delta$ en kG. y las dimensiones geométricas en cm

$$f_\mu = \left(\frac{8{,}3}{5}\right)^2 = 2{,}75\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

$$F_{\mu x} = f_\mu\ (\psi \cdot \pi D\delta) = 2{,}75\ (0{,}7 \cdot \pi \cdot 32 \cdot 0{,}5) = 97.\ \text{kg}.$$

1.03.10. Pérdidas en el circuito magnético

a) Pérdidas por histéresis. Hemos visto que la energía específica acumulada en un circuito magnético homogéneo al ir aumentando la inducción B variaba proporcionalmente al área limitada por la curva $B_i = f(H_i)$ y el eje de ordenadas B (párr. 1.03.06 y fig. 1.03.06 b). Si alcanzada una cierta inducción máxima $\hat{B}$ la intensidad de campo empieza a disminuir y la curva descendente de inducciones coincidiese con la ascendente, el campo magnético iría restituyendo al circuito eléctrico la energía acumulada, proporcionalmente a las mismas áreas en uno y en otro sentido y no se produciría pérdida alguna por este concepto durante el ciclo. Tal acontece, por ejemplo, en el aire.

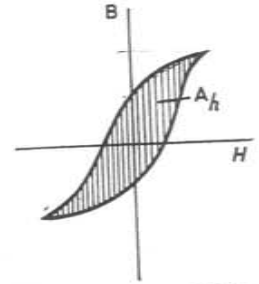


Fig. 1.03.10 a. Pérdidas por histeresis

$$\varrho_h = k_1\ A_h \left(\frac{J}{\text{m}^3}\right)$$

Pero el fenómeno de histéresis provoca en los materiales ferromagnéticos, como ya sabemos, un ciclo de imanación en el cual las curvas ascendentes y descendentes no coinciden, dejando encerrada entre ellas una cierta superficie (fig. 1.03.10 a). Esta superficie señala evidentemente a la escala establecida la diferencia entre la potencia absorbida durante la fase de acumulación de energía y la de restitución de la misma, diferencia que se traduce en pura pérdida transformándose en calor en el seno del material sometido al proceso de imanación alternativa. Designando por A_h dicha superficie, las pérdidas específicas, por unidad de volumen, y ciclo de imanación podrán expresarse por

$$j_h = k_1\ A_h \left(\frac{J}{\text{m}^3 \cdot \text{ciclo}}\right)$$

siendo k_1 un coeficiente de proporcionalidad. Si el número de ciclos por segundo es f (frecuencia), la potencia perdida resultará ser

$$p_h = k_1\ A_h\ f\ \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^3}\right)$$

Según los primeros estudios experimentales, STEINMETZ halló que la

superficie A_h era proporcional a la potencia 1,6 de la inducción máxima alcanzada, de donde

$$p_h = k_2 \, f \, \hat{B}^{1.6} \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right)$$

Posteriormente, para inducciones en el hierro superiores a los 10 kG, como se presentan en las máquinas eléctricas, se vio que convenía mejor a la realidad el exponente 2, haciéndose

$$p_h = k_2 \, f \, \hat{B}^2 \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^3}\right)$$

y para las chapas siliciosas modernas de bajas pérdidas se ha podido constatar que este exponente tampoco respondía a la experiencia, siendo más aproximado el de 2,1 a 2,2.

En lugar de evaluar las pérdidas por unidad de volumen suele ser más práctico el referirlas a la unidad de peso escribiendo

$$\boxed{p_h = k_h \, f \, \hat{B}^2} \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right) \qquad [1.03.10 \text{ a}]$$

y entonces el coeficiente de proporcionalidad k_h representa los vatios perdidos por histéresis en cada kilogramo de sustancia férrica cuando se la somete a un flujo alterno de inducción máxima 1 T a razón de 1 período por segundo. Las pérdidas de este género no se hallan afectadas por la forma de onda, espacial o temporal, del flujo o inducción sino que dependen exclusivamente de la inducción máxima.

b) Pérdidas por corrientes de FOUCAULT. El valor de las mismas por unidad de peso de la plancha magnética sometida a un campo alterno homogéneo viene dado por

$$\boxed{p_f = k_F \, (f \, \hat{B} \, \tau)^2 = \left(\frac{4 \, \chi \, k_f^2}{3 \cdot 10^3 \, \gamma}\right) (f \, \hat{B} \, \tau)^2} \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right) \qquad [1.03.10 \text{ b}]$$

y si la variación del flujo es senoidal

$$p_f = k_F \, (f \, \hat{B} \, \tau)^2 = \left(\frac{\pi^2}{6} \, \frac{\chi}{10^3 \gamma}\right) (f \, \hat{B} \, \tau)^2 = \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right) \qquad [1.03.10 \text{ c}]$$

τ es el espesor individual de las planchas en mm

f, la frecuencia del flujo alterno en Hz

$\hat{B}$, la inducción máxima en T

χ, la conductividad eléctrica del material en $\frac{\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2}$

k_F el coeficiente de proporcionalidad que expresa los vatios perdidos en cada kilogramo de chapas de espesor individual 1 mm cuando se las somete a un campo alterno de inducción máxima 1 tesla (10 kG) y frecuencia 1 herzio

γ, el peso específico de la plancha en kg/dm³

k_f, el factor de forma de la onda de f.e.m. local en las planchas.

Las pérdidas de este género son, pues, proporcionales al cuadrado de la frecuencia y del espesor de la chapa y asimismo al cuadrado de la inducción máxima; p_f depende también de la forma de onda a través del factor de forma k_f (para onda senoidal $k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$).

$$k_F = \frac{4 \, \chi}{3 \cdot 10^3 \, \gamma} k_f^2$$

y si se trata de una senoide,

$$k_F = \frac{\pi^2}{6} \, \frac{\chi}{10^3 \, \gamma}$$

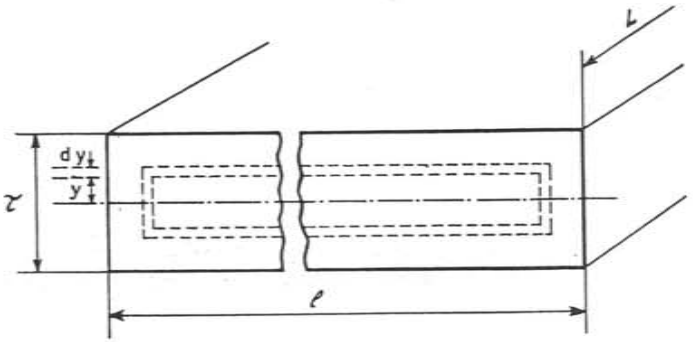


Fig. 1.03.10 b. Pérdidas específicas por corrientes de FOUCAULT
$p_f = k_F (f \hat{B} \tau)^2$

Las ecuaciones [b] y [c] se deducen como sigue. Consideremos una lámina de hierro o en general una lámina conductora (fig. 1.03.10 b) de gran anchura l con respecto a su espesor τ de tal modo que τ resulte despreciable al lado de l. Sea también L la longitud, cualquiera, de la chapa. Perpendicularmente a la sección ($l\tau$) incide uniformemente un flujo alterno que no supondremos afectado por las propias corrientes inducidas en la lámina. La inducción temporal máxima a través de dicha sección la representaremos por $\hat{B}$ y por k_f el factor de forma de las f.e.m. debidas a las variaciones del flujo a través de

los circuitos anulares elementales marcados de punto en la figura. La f.e.m. eficaz para cualquiera de tales anillos podemos expresarla de este modo:

$$E = 4\ k_f\ f\ \hat{B}\ (2\ y\ \times\ l) \quad \text{(V eficaces)}$$

con f = frecuencia en Hz, $\hat{B}$ = inducción máxima en T; y, l en m.

La resistencia del circuito elemental constituido por uno de estos anillos en cuestión es, muy aproximadamente (despreciando τ frente a l)

$$R = \frac{2\ l}{\chi\ (L \cdot 1\,000)\ (dy \cdot 1000)}\ (\Omega)$$

con l, L y dy en m y χ = conductividad del material en $\frac{S \cdot m}{mm^2}$

La pérdida por efecto JOULE en el anillo considerado,

$$dp_F = \frac{E^2}{R} = \frac{16 \cdot k_f^2\ f^2\ \hat{B}^2\ (4\ y^2 \cdot l^2)}{2\ l}\ \chi\ (L \cdot 1\,000) \cdot (dy \cdot 1\,000) =$$

$$= 32 \cdot 10^6\ \chi\ (k_f\ f\ \hat{B})^2\ l\ L \cdot y^2 dy \qquad (\Omega)$$

y en toda la masa conductora

$$p_F = 32 \cdot 10^6 \cdot \chi\ (k_f\ f\ \hat{B})^2 lL \int_0^{\tau/2} y^2\ dy$$

$$= 32 \cdot 10^6\ \chi\ (k_f f\ \hat{B})^2\ lL\ \frac{\left(\frac{\tau}{2}\right)^3}{3} \qquad (\Omega)$$

por unidad de volumen $V = (lL\tau)$ m³

$$p_f = \frac{p_{F\,tot.}}{V} = \frac{4}{3}\ 10^6\ \chi\ (k_f f\ \hat{B}\tau)^2 \left(\frac{W}{m^3}\right)$$

Si ponemos τ en mm y p_f en $\frac{W}{dm^3}$

$$p_f = \frac{1}{1000} \cdot \frac{4}{3} \cdot 10^6\ \chi \left(k_f f\ \hat{B} \cdot \frac{\tau}{1000}\right)^2 \quad \left(\frac{W}{dm^3}\right)$$

$$= \frac{4 \cdot \chi\ k_f^2}{3 \cdot 10^3} (f\ \hat{B}\ \tau)^2 \cdot \left(\frac{W}{dm^3}\right)$$

y con onda senoidal de f.e.m. $\left(k_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\ ;\ k_f^2 = \frac{\pi^2}{8}\right)$

$$p_f = \frac{\pi^2\ \chi}{6 \cdot 10^3} (f\ B\ \hat{\tau})^2 \quad \left(\frac{W}{dm^3}\right)$$

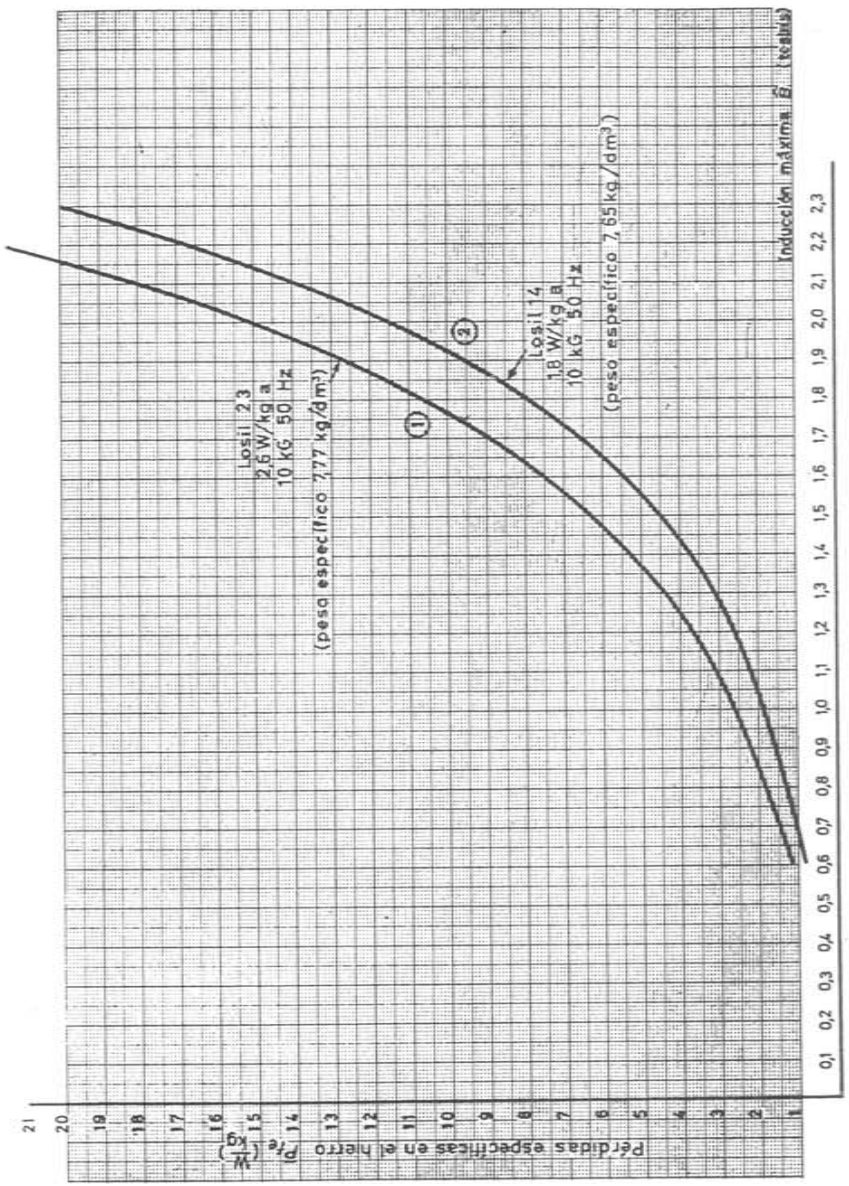


Fig. 1.03.10 c. Curva de pérdidas al aparato EPSTEIN de dos calidades de chapa, tipo dinamo de 2,6 W/kg y 1,8 W/kg respectivamente a 10.000 G, 50 Hz. Grueso de las chapas 0,5 mm.

Si deseamos expresar estas pérdidas, por kg de peso del material, bastará dividirlas por el peso específico γ en kg/dm³ con lo cual obtendremos las expresiones [b] y [c].

La teoría anterior prescinde de la alteración que introduce el flujo autoinductivo en la distribución de la corriente, lo cual sólo es admisible cuando se trata de chapas delgadas. Más adelante al estudiar las pérdidas adicionales, tendremos en cuenta dicho efecto (efecto superficial).

c) *Pérdidas combinadas en la chapa.* Generalmente, para el cálculo de máquinas, no tiene especial interés el separar las pérdidas por histéresis de las pérdidas por corrientes de FOUCAULT y suelen computarse englobadas como pérdidas específicas en el hierro, p_{fe}

$$p_{fe} = k_h \, f \, \hat{B}^2 + k_F \, (f \, \hat{B} \, \tau)^2 \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}\right). \qquad [1.03.10\ \mathrm{d}]$$

$= \mathrm{f}(\hat{B})$ si f y τ han sido establecidos ya, como base.

Estas pérdidas específicas pueden representarse gráficamente en función de $\hat{B}$ mediante haces de curvas cuyos parámetros sean f y τ. Sin embargo, dado que la frecuencia está perfectamente normalizada (50 Hz en Europa y 60 Hz en América para redes industriales; 16 $\frac{2}{3}$, o 25 Hz para redes de tracción) y como quiera que el grueso de las planchas suelen ser también típico, (0,35 mm para transformadores, 0,5 mm para inducidos de máquinas rotatorias y 1 mm para expansiones y polos laminados), bastan pocas curvas para disponer de todos los datos necesarios al constructor.

Estas curvas de pérdidas específicas en el hierro se determinan exclusivamente por vía experimental con el aparato de Epstein y, si se trata de transformadores, es muy simple el hallarlas partiendo de unidades terminadas. Sólo así tienen verdadero valor práctico ya que la aplicación de las fórmulas teóricas descritas conduce a resultados poco aproximados.

Las pérdidas medidas con el aparato Epstein hay que aumentarlas mediante la aplicación de coeficientes empíricos según detallaremos al estudiar las pérdidas adicionales para cada tipo de máquina.

Las chapas magnéticas se califican precisamente por la cifra de pérdidas totales p_{fe} en $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$ medidas con el aparato EPSTEIN a la frecuencia normal de 50 Hz (en Europa) y con inducciones de 10 kG (1 T) para la chapa laminada en caliente o 15 kG (1,5 T) para la chapa laminada en frío, de grano orientado.

Como base de cálculo damos en la fig. (1.03.10 c) las curvas de pérdidas a 50 Hz correspondiente a dos tipos de chapa de 0,5 mm de grueso, 2,6 y 1,8 $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{kg}}$, respectivamente (a 10 kG), usuales en la fabricación de máquinas rotatorias; la fig. (1.03.10 d) muestra las de una chapa de transformador laminada en ca-

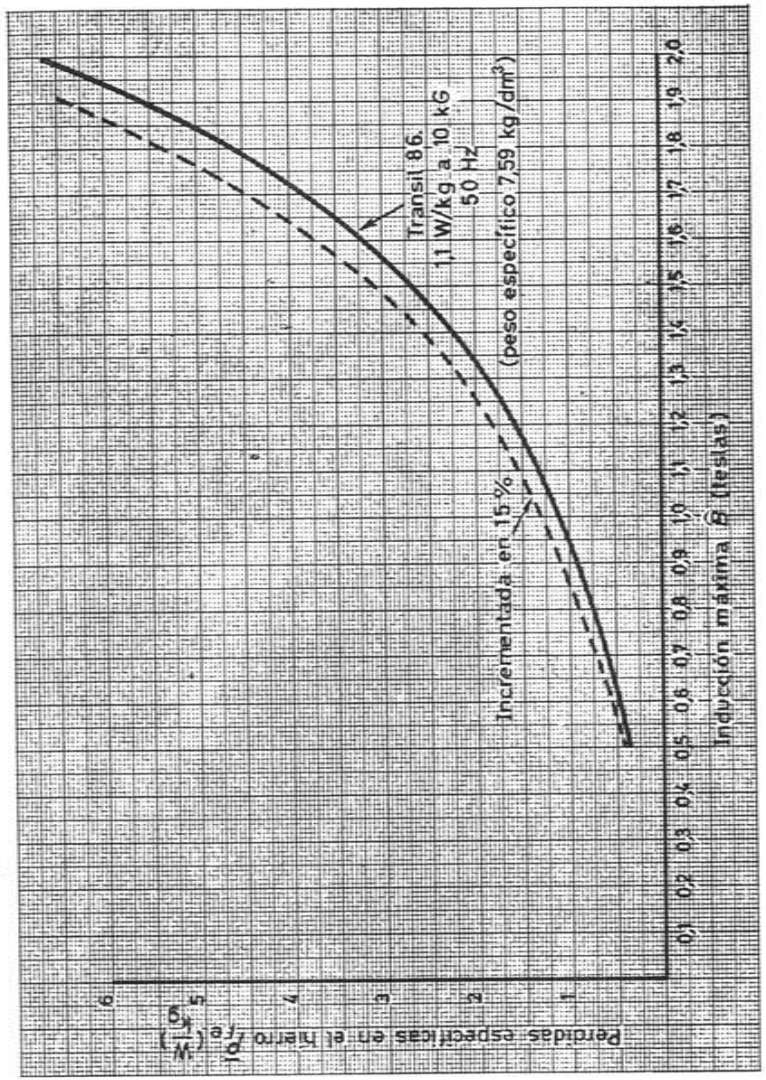


Fig. 1.03.10 d. Curva de pérdidas al aparato EPSTEIN (en trazo continuo) y con suplemento adicional del 15 % (trazo cortado) de una chapa de transformador laminada en caliente, tipo 1,1 W/kg. a 10000 G, 50 Hz. Grueso de chapa, 0,35 mm.

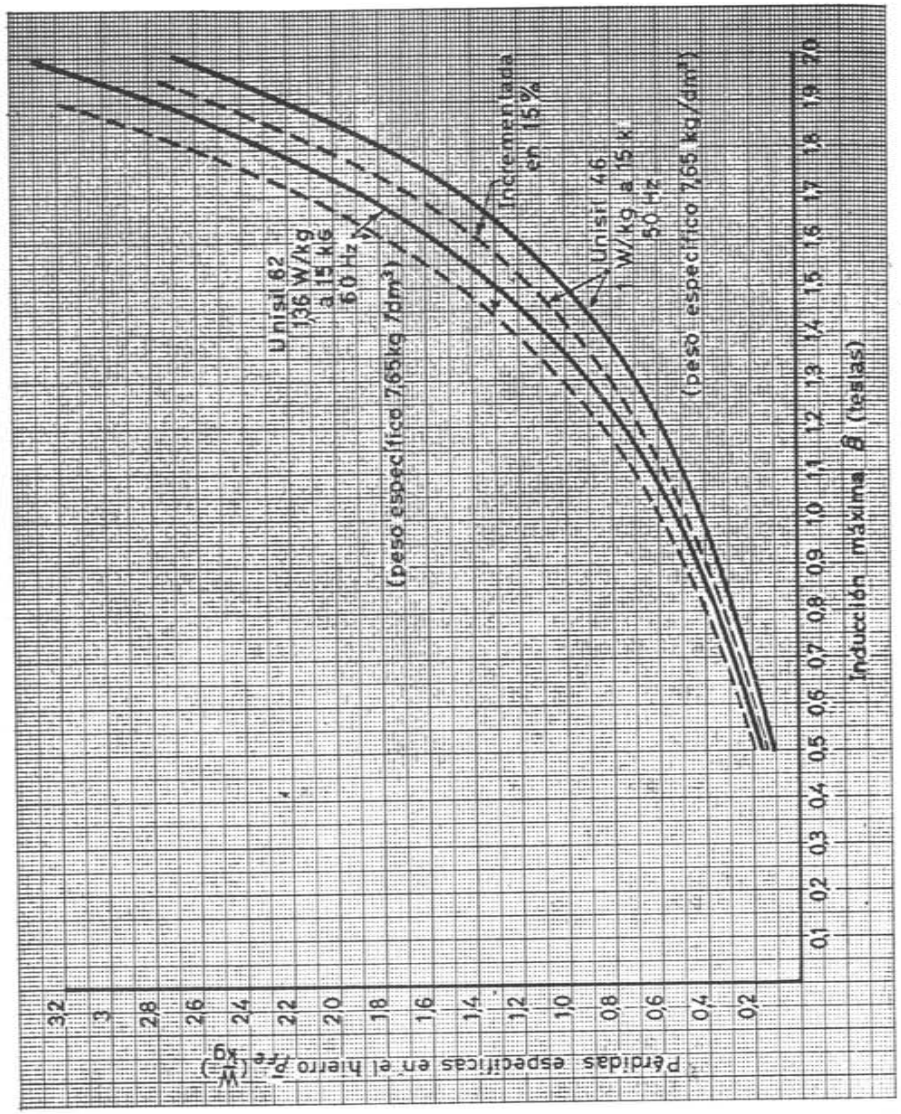


Fig. 1.03.10 e. Curvas de pérdidas al aparato EPSTEIN de dos calidades de chapa de grano orientado para transformadores, 1,36 W/kg y 1 W/kg respectivamente a 15 000 *G*, 50 Hz. Grueso de la chapa, 0,35 mm.

liente (antes normal y hoy casi abandonada), de 0,35 mm, 1,1 $\frac{W}{kg}$ a 10 000 G, 50 Hz y en la fig. (1.03.10 e) las correspondientes a dos tipos, también para transformadores, de grano orientado, 0,35 mm.: una de calidad mínima, 1,36 $\frac{W}{kg}$ a 15 kG y de otra de calidad óptima 1,01 $\frac{W}{kg}$ a la misma inducción de 1,5 T. La fig. (1.03.10 f) pone nuevamente de manifiesto las propie-

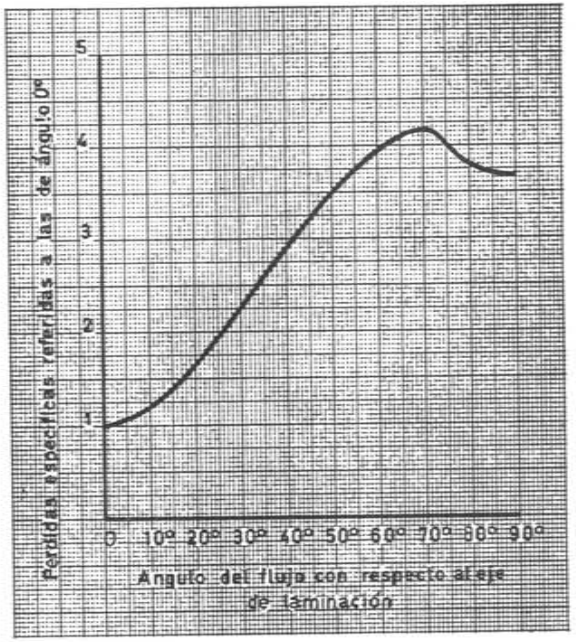


Fig. 1.03.10 f. Variación de las pérdidas según el ángulo de las líneas de inducción con respecto al eje de laminado. Chapas de grano orientado, calidad media, trabajando con una inducción de 15000 *G*

dades direccionales de la chapa de grano orientado. Para una desviación axial de 70° las pérdidas son cuatro veces mayores.

Todas ellas han sido tomadas de catálogos comerciales y registran los resultados obtenidos con el aparato EPSTEIN.

En su aplicación al cálculo de máquinas deberán corregirse según hemos anunciado, por pérdidas adicionales en el hierro.

La fig. (1.03.10 g) puede servir también de base para referir las pérdidas en el hierro a otra frecuencia distinta de 50 Hz multiplicándolas por el factor ν_f que se deduce de la curva respectiva.

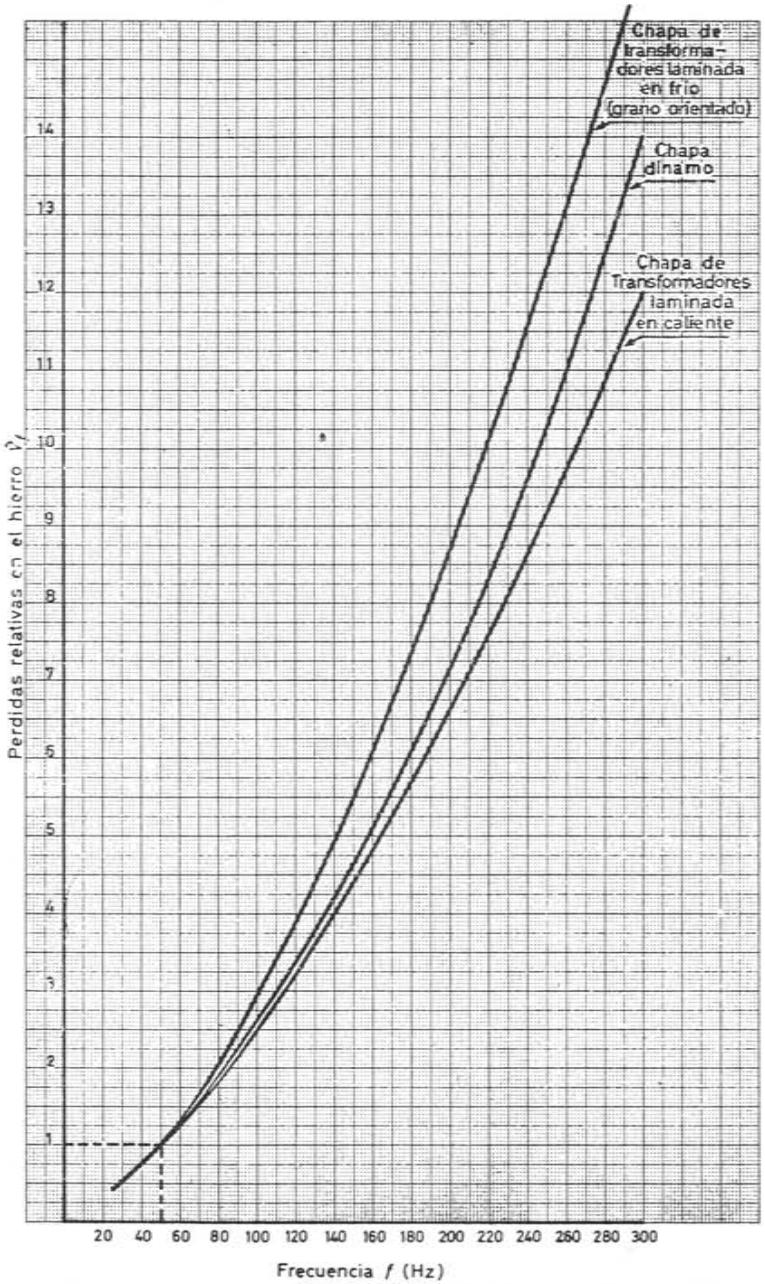


Fig. 1.03.10 g. Coeficiente de pérdidas en el hierro al aparato EPSTEIN para distintas frecuencias.

1.03.11. **Ejemplo**

Calcular las pérdidas específicas a 50 Hz y 15 kG de la chapa orientada cuya curva de histéresis, para esta inducción, se muestra en la figura 1.03.11 a. La resistividad del material es $\rho = 48\ \mu\Omega\ \frac{cm^2}{cm}$; el peso específico, $\gamma = 7{\cdot}65\ \frac{kg}{dm^3}$ y el grueso de la plancha 0,35 mm.

Con las escalas mostradas de $5\ \frac{Av}{m}$ por cada cm del eje de abscisas y $0{,}1\ \frac{Wb}{m^2}$ por

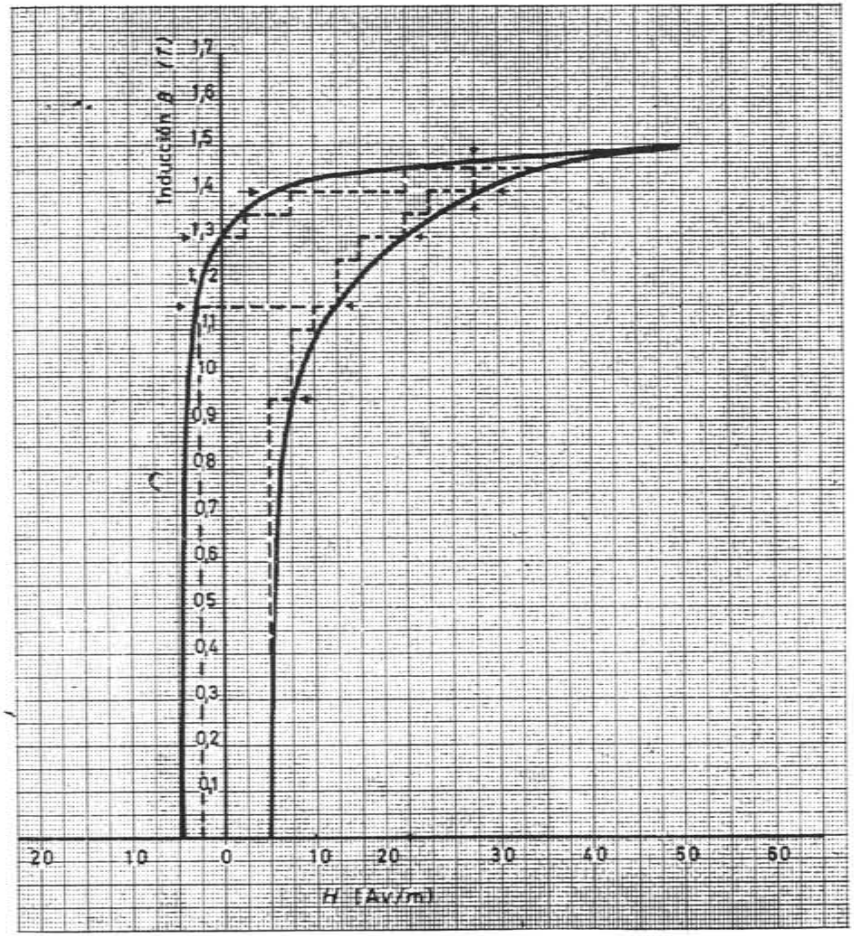


Fig. 1.03.11 a. Curva de histeresis a 15 000 *G* máximos, de la chapa de grano orientado Unisil 46.

cada cm del eje de ordenadas, 1 cm² de superficie del dibujo equivale a $5\left(\frac{Av}{m}\right) \times 0{,}1 \left(\frac{Vs}{m^2}\right) = 0{,}5 \left(\frac{VAs}{m^3}\right) = 0{,}5 \left(\frac{J}{m^3}\right)$.

Planimetrada el área del semiciclo de histéresis dibujado, arroja una superficie de 36 cm², o sea 72 cm² por ciclo, lo cual equivale a

$$j_h = 72 \left(\frac{cm^2}{ciclo}\right) \times 0{,}5 \left(\frac{J}{m^3\ cm^2}\right) = 36 \left(\frac{J}{m^3 \cdot ciclo}\right)$$

Esta es la energía perdida, durante el ciclo, por cada m³ de la chapa en cuestión, sometida a un flujo alterno de cualquier naturaleza con la inducción máxima uniforme $\hat{B} = 1{,}5$ T.

Si la frecuencia es de 50 Hz o 50 ciclos por segundo la pérdida de potencia ascenderá a

$$p_h = 36 \left(\frac{J}{m^3 \cdot ciclo}\right) \times 50 \left(\frac{ciclos}{s}\right) = 1800 \left(\frac{W}{m^3}\right)$$

y siendo el peso específico $\gamma = 7{,}65 \frac{kg}{dm^3}$ o $7650 \frac{kg}{m^3}$ es también

$$p_h = \frac{1800 \left(\frac{W}{m^3}\right)}{7650 \left(\frac{kg}{m^3}\right)} = 0{,}235 \left(\frac{W}{kg}\right)$$

Tales son las pérdidas por histéresis a 50 Hz y 1,5 T de inducción máxima.

Cuanto a las pérdidas por c.d.F. tomemos la ecuación [1.03.10 c] que presupone para B una onda de variación senoidal en el tiempo.

$$p_f = \frac{\pi^2}{6} \frac{\chi}{10^3\ \gamma} (f\ \hat{B}\ \tau)^2 \left(\frac{W}{kg}\right)$$

En este caso, con $\rho = 48\ \mu\Omega \frac{cm^2}{cm}$ ó $0{,}48 \frac{\Omega \cdot mm^2}{m}$

equivalentes a $\chi = \frac{1}{0{,}48} = 2{,}08 \frac{S \cdot m}{mm^2}$; $\gamma = 7{,}65 \frac{kg}{dm^3}$, $f = 50$ Hz, $\hat{B} = 1{,}5$ T y $\tau = 0{,}35$ mm

$$p_f = \frac{\pi^2}{6} \frac{2{,}08}{10^3 \cdot 7{,}65} (50 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}35)^2 = 0{,}31 \left(\frac{W}{kg}\right)$$

a 50 Hz, 1,5 T máx. y grueso de 0,35 mm.

Sumando ambas pérdidas, por histéresis y por c.d.F. dan un total de pérdidas específicas en el hierro

$$p_{fe} = p_h + p = 0{,}235 + 0{,}31 = 0{,}545 \left(\frac{W}{kg}\right)$$

La chapa en cuestión, «Unisil», 46, está clasificada experimentalmente como de 1,01 W/kg a 1,5 T, lo cual no concuerda mucho con la cifra anterior, prueba del escaso valor de estos cálculos que convendrá siempre sustituir por resultados de ensayo; con la introducción, si es preciso, de coeficientes de corrección, también empíricos, según la distribución del flujo; sobre ello volveremos, como hemos dicho, más adelante.

1.04 El circuito magnético principal

1.04.01. Generalidades

El flujo inductor que atraviesa el entrehierro y que constituye el flujo activo de la máquina, cierra su circuito a través de los polos salientes o continuos, los dientes y las coronas del estator y del rotor. La fig. 1.04.01 a,

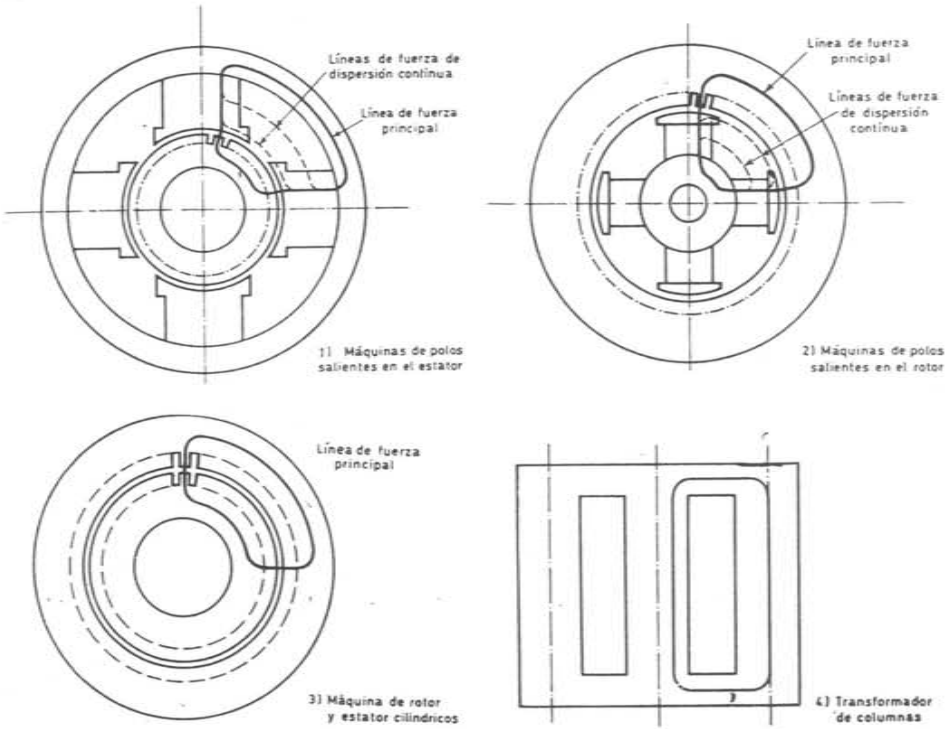


Fig. 1.04.01 a. Circuito magnético principal.

muestra la forma esquemática del circuito en cuestión para los tres tipos constructivos fundamentales de las máquinas eléctricas y para los transformadores. En 1) puede verse una máquina de polos salientes en el estator (máquinas de continua, conmutatrices, alternadores muy pequeños de algunos kVA); en 2) una máquina de polos salientes en el rotor (alternadores normales); en 3) una máquina de rotor y estator cilíndricos (motores asincrónicos, turboalternadores) y en 4) un transformador trifásico de columnas. Sobre cada figura se ha marcado el recorrido medio de las líneas de fuerza dentro de un circuito magnético completo, aunque el cómputo de los trayectos parciales no responda siempre al recorrido indicado puesto que se tratará de hallar expresiones sencillas para el cálculo de las distancias geométricas.

Sobre las mismas figuras se han señalado de puntos algunas líneas de fuerza concatenadas solamente con las bobinas inductoras de corriente continua sin llegar a cruzar el entrehierro y que por tanto son ineficaces a los efectos de la f.e.m. inducida, contribuyendo únicamente a saturar los núcleos polares y la corona inmediata. Este es el «flujo de dispersión polar», que se tendrá en cuenta, al calcular la máquina, por el aumento pasivo de inducción que provoca en los trayectos donde se asienta, dentro del circuito magnético principal.

Aparte estas líneas dispersas de flujo polar en las máquinas excitadas por corriente continua, aparecen en las máquinas de corriente alterna otras líneas de dispersión, flujo alterno también, que tampoco enlazan con los dos devanados, primario y secundario, sino solamente con uno u otro de ellos y que, por tanto, no contribuyen a engendrar la f.e.m. útil de la máquina. Este otro flujo de dispersión se estudiará en capítulo aparte y se computa, para el cálculo, por las f.e.m. de reactancia que induce en el arrollamiento generador del mismo. Prescindiremos, pues, de su presencia al considerar el circuito magnético principal.

El problema que se plantea para el estudio de este circuito es, en suma, el de calcular los amperios-vueltas de excitación necesarios a fin de mantener en el entrehierro de la máquina o en el núcleo de un transformador el flujo inductor que se requiere para engendrar una cierta f.e.m. prefijada E.

El valor de la f.e.m. está ligado al de la tensión en bornes U según las condiciones de servicio (magnitud y naturaleza de la carga) y las propiedades características de la máquina, lo cual será objeto, a su vez, de estudio separado. Por el momento supongamos conocida la f.e.m. E.

En sentido más amplio, el objeto de este capítulo puede señalarse también como el cálculo previo de la característica magnética $E = f(\theta_\mu)$ siendo θ_μ la excitación correspondiente de la máquina o transformador en cuestión, a fin de disponer de dicha característica, por las múltiples consecuencias que hay que extraer de ella a los efectos del dimensionado y de las propiedades de la máquina.

1.04.02. Ley fundamental del circuito magnético

La excitación total requerida para el establecimiento de un campo magnético en el recorrido de una línea de fuerza completa es igual a la integral lineal del campo a lo largo del circuito cerrado de dicha línea

$$\theta_\mu = \oint_0 H \cdot dl \qquad [1.04.02\ a]$$

Si expresamos H en Oe y l en cm, θ_μ vendrá dado en gilberts (Gb) y si ponemos, como es más práctico, H en $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$ y l en cm se obtiene θ_μ directamente en Av. Las unidades M.K.S. ($\frac{\text{Av}}{\text{m}}$ para H y el m para l no son tan cómodas en este problema).

En los circuitos magnéticos constituidos, como es el caso de las máquinas, por distintos trayectos homogéneos, la integral puede sustituirse por la suma de las f.m.m. parciales.

$$\boxed{\theta_\mu = \Sigma\, Hl} \qquad [1.04.02\ b]$$

La excitación hallada para el recorrido total de una línea de fuerza cerrada corresponde a los Av por par de polos de la máquina. Dada la simetría del recorrido, cabe limitar la suma a una mitad del circuito calculándose entonces θ_μ en Av por polo.

A los efectos de la suma [b] dividiremos el camino de las líneas de fuerza en varios trayectos independientes, dentro de cada uno de los cuales la inducción pueda considerarse como constante, o reducirse, al menos, a un valor medio equivalente, para que el campo también sea constante, bastando entonces multiplicar este último H (Av/cm) por la longitud parcial l (cm) deduciéndose así la f.m.m. o excitación correspondiente al recorrido individual considerado.

Los trayectos característicos que cabe distinguir son: para las máquinas rotatorias,

- el entrehierro
- los dientes del estator, del rotor o de ambos.
- los polos
- la corona estatórica o yugo
- la corona rotórica o núcleo

y para los transformadores,

- las columnas y
- las culata o yugos.

El proceso a seguir al calcular el campo en cada tramo parcial consiste en empezar por hallar el flujo Φ que ha de circular por él según la f.e.m. a inducir. Del flujo y de las dimensiones de la sección transversal S se derivan las inducciones, máximas, $\hat{B}$, sobre las cuales habrá que establecer en general ciertas correcciones para tener en cuenta la falta de homogeneidad en la distribución del flujo. Obtenido, tras estas correcciones, el valor máximo de la inducción real, se consigue la intensidad de campo $\hat{H}$ por medio de la curva de inducción si se trata de un elemento ferromagnético, o, según las ecuaciones

$$\boxed{\hat{H} = \frac{4\,\pi}{10}\,\hat{B} = 0{,}8\,\hat{B}}\ \left(\frac{\text{Av}}{\text{cm}}\right) \text{ con } \hat{B} \text{ en (G)} \qquad [1.04.02\ \text{c}]$$

y

$$\hat{H} = \frac{\hat{B}}{4\,\pi \cdot 10^{-7}} = 800\,000\,\hat{B}\ \left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right) \text{ con } \hat{B} \text{ en (T)} \qquad [1.04.02\ \text{d}]$$

si se trata de un recorrido en el aire (entrehierros).

1.04.03. F.e.m. media por espira

Si tenemos en cuenta que aunque se trate de una máquina de corriente continua, la f.e.m. inducida en una máquina giratoria heteropolar es siempre alterna, podemos seguir un mismo proceso deductivo para toda clase de máquinas dándole luego la forma que más convenga a la naturaleza o construcción de cada tipo.

El *valor medio* de la f.e.m. inducida en una espira de paso diametral, independientemente de la forma espacial o de la variación temporal de la onda de flujo alterno es evidentemente,

$$\bar{e} = \frac{2\,\hat{\Phi}_\delta}{\left(\frac{T}{2}\right)} \text{ (V medios/espira)}$$

$\hat{\Phi}_\delta$ = *flujo máximo* o total en el entrehierro por polo, en Wb o Vs (1 Wb o 1 Vs es igual a 10^8 M).

$2\,\hat{\Phi}_\delta$ = variación de flujo entre un máximo positivo y un máximo negativo durante el tiempo $\frac{T}{2}$ segundos de un semiperíodo.

Si f (Hz) es la frecuencia del flujo alterno, o sea el número de períodos por segundo, se tiene

$$T = \frac{1}{f}\ (\text{s})$$

...CIONAL TECNOLOGICA NACIONAL

y resulta para la espira citada

$$\bar{e} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta \qquad \text{(V medios/espira).} \qquad [1.04.03\ \text{a}]$$

1.04.04. F.e.m. de una máquina de corriente continua

En cada vía del arrollamiento existen N_a espiras en serie y la f.e.m. *media* inducida por vía, independientemente de la forma del campo magnético en el entrehierro, vendrá dada por

$$\bar{E} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta\,N_a \qquad \text{(V medios/vía)} \qquad [1.04.04\ \text{a}]$$

El acortamiento o alargamiento del paso de bobina provocará una disminución de la f.e.m. media $\bar{E}$ al no abrazar ya cada espira el flujo máximo $\hat{\Phi}_\delta$. Esta reducción depende del acortamiento o del alargamiento relativo del paso y de la forma espacial de onda y para tenerla en cuenta habría que introducir en la fórmula [a] un factor de paso o de acortamiento $\xi_y < 1$ de tal modo que

$$\bar{E} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta\,N_a\,\xi_y \quad \text{(V medios/vía)} \qquad [1.04.04\ \text{b}]$$

Estrictamente

$$\xi_y = \frac{\text{Flujo máximo abrazado por una espira}}{\text{Flujo máximo del entrehierro, por polo}}$$

En las máquinas de continua, dada la forma espacial de la onda de inducción muy débil en las zonas interpolares, la relación anterior viene a ser prácticamente igual a 1, aunque se bobine intencionadamente con paso acortado para mejorar la conmutación, ya que tampoco el acortamiento conviene hacerlo superior a una ranura. En realidad se supone siempre para dichas máquinas $\xi_y = 1$ manteniéndose la ecuación [a]

$$\bar{E} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta\,N_a \qquad \text{(V)}$$

El número de espiras por vía, N_a es igual a la mitad del número total de conductores Z del inducido dividido por el número de vías $2a$ del devanado (a = número de pares de vía)

$$N_a = \frac{Z/2}{2\,a} = \frac{Z}{4\,a} \qquad \text{(espiras/vía)}$$

y por tanto, la f.e.m. media por vía que es la f.e.m. E de la máquina

$$E = f\,\hat{\Phi}_\delta\,\frac{Z}{a} \qquad \text{(V)}$$

Si queremos expresarla en función de la velocidad de giro N (r/m) y designamos por $2p$ el número de pares de polos inductores tendremos, puesto que

$$f = \frac{p\,N}{60} \qquad \text{(Hz)},$$

$$\boxed{E = \frac{p}{a}\,\frac{N}{60}\,Z\,\hat{\Phi}_\delta} \qquad \text{(V)} \qquad \text{[1.04.04 c]}$$

($\hat{\Phi}_\delta$ en Wb, N en r/m)

Esta es la expresión general de la f.e.m. para cualquier *máquina de corriente continua*. Es a la vez el valor *medio* de dicha f.e.m. en el conjunto de espiras de una sola vía entre escobillas de distinta polaridad. Todas las $2a$ vías se presentan en paralelo con respecto a los bornes del inducido y la f.e.m. en cuestión es prácticamente independiente, repetimos, de la forma de onda magnética.

Cuanto al flujo necesario,

$$\hat{\Phi}_\delta = \frac{E}{\frac{p}{a}\,\frac{N}{60}\,Z} \qquad \text{(Wb)} \qquad \text{[1.04.04 d]}$$

1.04.05. F.e.m. de una máquina de corriente alterna

En el caso de una máquina de corriente alterna podemos partir, como antes, de la f.e.m. media por espira [1.04.03 a]

$$\bar{e} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta \qquad \text{V/espira}$$

($\hat{\Phi}_\delta$ en Wb, f en Hz)

interesándonos ahora llegar a la expresión de la f.e.m. *eficaz por fase*, E. Si el devanado no es concentrado, es decir: si el número de ranuras por polo y fase es mayor de 1, la distribución de las bobinas provoca un cierto desfase entre los valores instantáneos de la f.e.m. en las espiras de distintas ranuras; la resultante de las varias ondas de f.e.m. idénticas, pero desfasadas, da un valor medio siempre inferior al de las mismas ondas superpuestas por lo cual hay que afectar a $\bar{E}$ de un cierto coeficiente de distribución $\xi_d < 1$ escribiendo, análogamente a [1.04.04 b]

$$\bar{E} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta\,(N_f\,\xi_d) \qquad \text{(V medios/fase)}$$

(N_f = número de espiras por fase).

Pero si, además, el paso de bobina y_n no es diametral, el acortamiento produce un desfase adicional entre las f.e.m. de los conductores de ida y de vuelta en cada espira lo que hace necesario introducir un nuevo factor, de acortamiento, ξ_y, llegándose así a la expresión de la f.e.m. media por fase

$$\bar{E} = 4\,f\,\hat{\Phi}_\delta\,(N_f\,\xi_d\,\xi_y) \qquad \text{(V medios/fase)} \qquad \text{[1.04.05 a]}$$

Si bien la f.e.m. media *por espira* es por completo independiente de la forma espacial o del curso temporal de la onda magnética, vemos que no ocurre lo mismo en cuanto aparece algún desfase entre las f.e.m. de los distintos conductores o espiras conectados en serie. La forma de onda influye ya a través de ξ_d y ξ_y sobre el valor medio de la f.e.m. resultante por fase.

Los factores indicados son de difícil evaluación salvo que se trate de f.e.m. senoidales y en este caso hay que establecerlos separadamente para la fundamental y para los restantes armónicos superiores según veremos enseguida.

A los efectos operatorios, es cómodo reunir ambos factores de bobinado en uno solo

$$\xi = \xi_d\,\xi_y \qquad \text{[1.04.05 b]}$$

siendo a veces indispensable la sustitución, cuando por la irregularidad del devanado no tiene significado alguno esta separación de los dos factores (devanados con un número fraccionario de ranuras por polo y fase); entonces, hay que proceder al cálculo directo de ξ. Como las magnitudes que más interesan en el tratamiento de las corrientes alternas son los valores eficaces, pasaremos de la expresión [a] del valor medio $\bar{E}$ a aquel otro, eficaz, E, multiplicando por el factor de forma k_f; por definición,

$$k_f = \frac{\text{valor eficaz}}{\text{valor medio}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\int_0^T e^2\,dt}{T}}}{\left(\dfrac{\int_0^{T/2} e\,dt}{T/2}\right)}$$

con lo cual

$$E = 4\,k_f\,f\,\hat{\Phi}_\delta\,(N_f\,\xi) \qquad \text{(V eficaces/fase)} \qquad \text{[1.04.05 c]}$$

($\hat{\Phi}_\delta$ en Wb, f en Hz)

Poniendo el número de espiras por fase N_f en función del número total de conductores Z del inducido y del número de fases m de la máquina

$$N_f = \frac{Z/2}{m}$$

y

$$\boxed{E = 2\ k_f\ f\ \hat{\Phi}_\delta\ \frac{Z\ \xi}{m}} \quad \text{(V/fase)} \qquad [1.04.05\ d]$$

Al producto $(Z\xi)$ del número de conductores físicos por el factor de bobinado se lo representa también por Z_ξ bajo el nombre de «conductores efectivos» y entonces

$$E = 2\ k_f\ f\ \hat{\Phi}_\delta\ \frac{Z_\xi}{m} \quad \text{(V/fase)} \qquad [1.04.05\ e]$$

1.04.06. Onda básica senoidal en el caso de corriente alterna

Las ecuaciones anteriores, en su misma generalidad, arrastran consigo el factor de forma k_f cuya determinación, a priori, requiere una cierta elaboración. Es más práctico relegar su influencia en cada tipo de máquina a la de un factor de corrección (conjuntamente con otros varios que luego describiremos), y empezar, de manera uniforme, por suponer que la distribución del campo en el entrehierro, si se trata de máquinas rotatorias o la evolución temporal del mismo para el caso de los transformadores, siguiese una ley senoidal ya que en este caso, tanto los factores en cuestión con los de bobinado ξ son de fácil cómputo.

En efecto, sabemos que con ondas senoidales el factor de forma vale

$$k_f = \frac{E}{\bar{E}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$$

Sustituyamos ahora la onda real de inducción por otra senoidal capaz de inducir la misma f.e.m. *eficaz* E y designemos por $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$ el flujo del entrehierro por polo que convendría a la nueva onda.

La relación entre $\hat{\Phi}_\delta$, actual, y $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$, ficticio, se desprende de la condición

$$E = 2\ k_f\ f\ \hat{\Phi}_\delta\ \frac{Z\ \xi}{m} = 2 \cdot 1{,}11\ f\ \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta\ \frac{Z\ \xi}{m}$$

en la cual se prescinde, no obstante, del efecto de la forma de onda sobre ξ. De aquí, con E en V eficaces/fase,

$$\boxed{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \frac{m\ E}{2{,}22 \cdot f \cdot Z\ \xi}} \quad \text{(Wb)} \qquad [1.04.06\ a]$$

o bien

$$\boxed{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \frac{m\ E}{2{,}22\ f \cdot Z\ \xi}}\ 10^8 \quad \text{(M)} \qquad [1.04.06\ b]$$

(E en V eficaces por fase)

y

$$\boxed{\hat{\Phi}_\delta = \frac{1{,}11}{k_f}\ \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = K_f\ \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta} \qquad [1.04.06\ c]$$

Al factor

$$\boxed{K_f = \frac{1{,}11}{k_f}} \qquad [1.04.06\ d]$$

lo denominaremos «factor relativo de forma»

En sus valores influirá notablemente el tipo constructivo de la máquina por lo que respecta a la configuración y proporciones del entrehierro.

Para alternadores de rotor con polos salientes, K_f depende en primer lugar de la forma misma del entrehierro ante las piezas polares (uniforme o senoidal) y, en segundo lugar, de la relación o coeficiente de recubrimiento

$$\psi = \frac{b_p}{\tau_p} \qquad [1.04.06\ e]$$

entre el arco polar b_p y el paso polar τ_p. En la fig. 1.04.06 a pueden verse las curvas (1) y (2)

$$K_f = f\ (\psi)$$

con uno y otro tipo de entrehierro.

Para los alternadores de rotor cilíndrico con devanado inductor distribuido, K_f depende de la relación entre el arco polar común a todas las espiras que representaremos también por b_p y el paso polar τ_p. La curva (3) de la misma figura nos muestra la dependencia.

En los motores asincrónicos influye sobre la forma de la curva de campo, determinando su aplanamiento, el mayor o menor grado de saturación magnética, el cual se define numéricamente por el cociente de la f.m.m. consumida en el paso de dientes y entrehierro a la f.m.m. necesaria para el entrehierro sólo, cociente que recibe el nombre de «factor de saturación» k_s

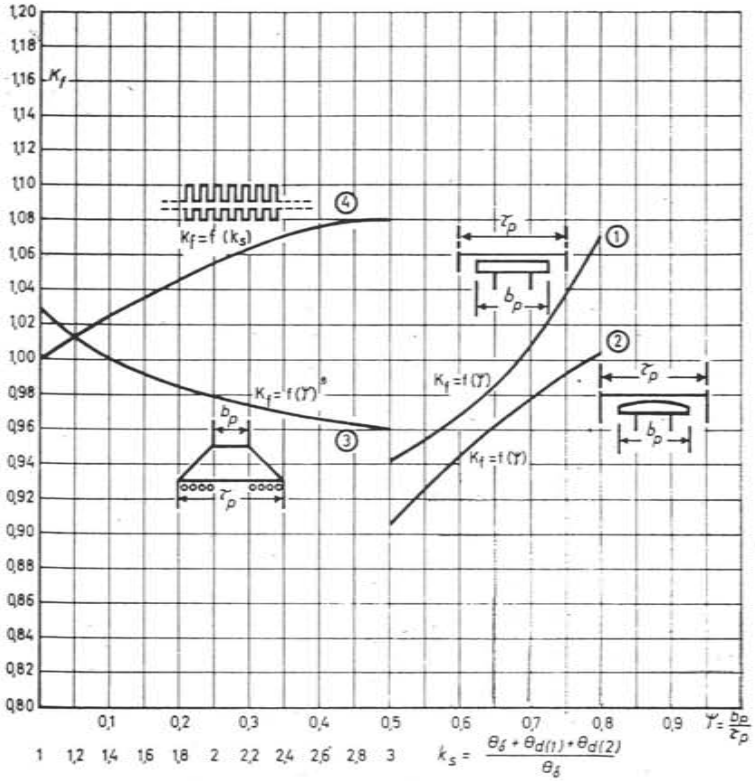


Fig. 1.04.06 a. Factor relativo de forma $K_f = 1{,}11/k_f$ para diversos tipos de sistemas polares.
1. Alternadores de polos salientes y entrehierro uniforme
2. » » » y » senoidal
3. » » inductor cilíndrico (turboalternadores)
4. Motores de inducción (estator y rotor ranurados).

$$k_s = \frac{\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_{d(1)} + \hat{\theta}_{d(2)}}{\theta_\delta} \qquad [1.04.06\ f]$$

$\hat{\theta}_\delta$ = f.m.m. para el entrehierro, en Av/polo

$\hat{\theta}_{d(1)}$ = » » los dientes del primario o estator en Av/polo.

$\hat{\theta}_{d(2)}$ = » » los » del secundario o rotor, en Av/polo

El factor de saturación no puede calcularse hasta conocer la excitación que precisamente se trata de buscar. Es necesario por tanto admitir un valor previo y revisarlo a posteriori si fuera necesario.

1.04.07. F.e.m. de los transformadores

En ellos no cabe considerar el factor de bobinado (1) y conserva también significado más claro el de espiras por fase N_f que el de conductores totales Z. Así la ecuación [1.04.05 c] se transforma simplemente en

$$E = 4\ k_f\ f\ \hat{\Phi}\ N_f \qquad \text{(V eficaces/fase)} \qquad [1.04.07\ a]$$

($\hat{\Phi}$ = flujo máximo por columna en Wb)

El factor de forma proviene ahora de la evolución temporal del flujo, no de su distribución prácticamente uniforme en el área abrazada por las bobinas, y viene impuesto por la naturaleza de la tensión aplicada al primario que es la que determina esencialmente la forma de onda de la f.e.m., mientras no lo impidan ciertas disposiciones de montaje que deben evitarse (2). Para el cálculo se admite siempre una evolución senoidal ($k_f = 1{,}11$) y entonces

$$E = 4{,}44 \cdot f\ \hat{\Phi}\ N_f \qquad \text{(V eficaces/fase)} \qquad [1.04.07\ b]$$

de donde

$$\boxed{\hat{\Phi} = \frac{E}{4{,}44\ f\ N_f}} \qquad \text{(Wb)} \qquad [1.04.07\ c]$$

o

$$\boxed{\hat{\Phi} = \frac{E \cdot 10^8}{4{,}44 \cdot f\ N_f}} \qquad \text{(M)} \qquad [1.04.07\ d]$$

(E en V eficaces/fase).

1.04.08. Inducción máxima en el entrehierro

Factor de corrección para la amplitud, con entrehierro liso, K_M

a) *Máquinas de corriente continua.*

Imaginemos primero un inducido perfectamente liso sin canales de ventilación radial entre los paquetes de chapa ni ranuras, y designemos por

$\bar{B}_\delta$ la inducción *media* en el entrehierro en T (1 T = 10 000 G), resultante del flujo real por polo $\hat{\Phi}_\delta$ en Wb

τ_p el paso polar en m

L la longitud total del inducido, incluídos los canales de ventilación radial, en m

(1) Aunque puede asimilarse a él la reducción de f.e.m. debida a un montaje en zigzag por ejemplo.

(2) Véase J. Corrales: «Teoría, Cálculo y Construcción de Transformadores»., capít. I-14 y II. Edit. Labor, Barcelona.

Evidentemente

$$\hat{\Phi}_\delta = \overline{B}_\delta \, \tau_p \, L \qquad \text{(Wb)}$$

$$\overline{B}_\delta = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{\tau_p \, L} \qquad \text{(T)} \qquad \text{[1.04.08 a]}$$

Interesa sobre todo el valor de la inducción máxima en el entrehierro $\hat{B}_\delta$. Esta la deduciremos calculando previamente la inducción máxima ideal

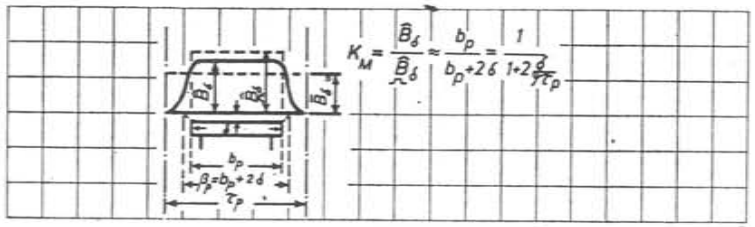


Fig. 1.04.08 a. Factor relativo de amplitud de una onda rectangular de inducción (máquinas de continua).

que correspondería a una onda de flujo perfectamente rectangular cuya base fuera igual al arco geométrico b_p (fig. 1.04.08 a). La representaremos por $\underset{\Omega}{\hat{B}}$. Por definición, pues,

$$\hat{\Phi}_\delta = \underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta \, b_p \, L \qquad \text{(Wb)}$$

o

$$\boxed{\underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta} = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{b_p \, L} = \boxed{\frac{\hat{\Phi}_\delta}{\psi \, \tau_p \, L}} \qquad \text{(T)} \qquad \text{[1.04.08 b]}$$

La inducción máxima efectiva, $\hat{B}_\delta$ es algo menor que la ideal $\underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta$ porque el flujo se extiende también, aunque debilitado, sobre las zonas interpolares. Con suficiente aproximación puede admitirse que esta expansión del flujo equivale, para los efectos de la inducción máxima real $\hat{B}_\delta$, a un ensanchamiento de la base rectangular en la cuantía de dos veces el entrehierro δ. Así, (véase figura citada 1.04.08 a)

$$\hat{\Phi}_\delta = \hat{B}_\delta (b_p + 2\,\delta) \, L = \hat{B}_\delta \, \beta_p \, L \qquad \text{(Wb)}$$

y

$$\hat{B}_\delta = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{\beta_p \, L} = K_M \, \underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta \qquad \text{(T)} \qquad \text{[1.04.08 c]}$$

$K_M = \dfrac{\hat{B}_\delta}{\underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta}$, «factor relativo de amplitud» viene dado, pues, para las máquinas de corriente continua por la fórmula simple

$$\boxed{K_M = \frac{b_p}{\beta_p} = \frac{b_p}{b_p + 2\,\delta} = \frac{\psi \, \tau_p}{\psi \, \tau_p + 2\,\delta} = \frac{1}{1 + \frac{2}{\psi}\frac{\delta}{\tau_p}}} \qquad \text{[1.04.08 d]}$$

b) *Máquinas de corriente alterna.* Aquí cabe distinguir como base de partida para calcular las inducciones máximas en el entrehierro liso los dos flujos considerados en el párrafo 1.04.06, a saber: el flujo real $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$ y el flujo ideal $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$ de la onda senoidal ficticia capaz de inducir la misma f.e.m. eficaz E por fase.

Siguiendo paralelamente ambos caminos, y en unidades M.K.S., tendremos

	Onda senoidal	*Onda real*
Flujo:	$\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \dfrac{m\,E}{2{,}22 \cdot f \, Z \, \xi}$ (Wb)	$\hat{\Phi}_\delta = \dfrac{m\,E}{2\,k_f\,f\,Z\,\xi} = K_f \, \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$ (Wb)

con $K_f = \dfrac{1{,}11}{k_f}$ según la fig. 1.04.06 a

Inducción media:

$$\underset{\sim}{\overline{B}}_\delta = \frac{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta}{\tau_p \, L} \qquad \text{(T)} \qquad\qquad \overline{B}_\delta = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{\tau_p \, L} = K_f \, \underset{\sim}{\overline{B}}_\delta \qquad \text{(T)}$$

Inducción máxima:

$$\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = \frac{\pi}{2} \, \underset{\sim}{\overline{B}}_\delta = 1{,}57 \, \frac{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta}{\tau_p \, L} \qquad \text{(T)}$$

$$\hat{B}_\delta = k_M \, \overline{B}_\delta = k_M \, K_f \, \frac{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta}{\tau_p \, L} = K_M \, \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta \qquad \text{(T)}$$

donde k_M es el factor de amplitud $\left(\dfrac{\hat{B}_\delta}{\overline{B}_\delta}\right)$ de la onda real de inducción y K_M el coeficiente de corrección a aplicar a la inducción máxima senoidal $\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$ para obtener el valor de la inducción máxima efectiva $\hat{B}_\delta$. Al coeficiente citado

$$\boxed{K_M} = \frac{\hat{B}_\delta}{\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta} = \frac{k_M \, K_f}{1{,}57} = \frac{k_M}{k_f} \, \frac{1{,}11}{1{,}57} = \boxed{\frac{k_M}{\sqrt{2}\,k_f}} \qquad \text{[1.04.08 e]}$$

lo denominaremos propiamente «factor relativo de amplitud». Mediante él deducimos enseguida

$$\hat{B}_\delta = K_M \, \hat{\underset{\sim}{B}}_\delta \qquad \text{(T)} \qquad [1.04.08\ f]$$

una vez calculada

$$\boxed{\hat{\underset{\sim}{B}}_\delta = \frac{\hat{\underset{\sim}{\Phi}}_\delta}{\tau_p \, L} \, 1{,}57.} \qquad \text{(T)} \qquad [1.04.08\ g]$$

partiendo de la f.e.m. por fase E (V) y de la frecuencia f (Hz) que nos dan, [1.04.06 b],

$$\hat{\underset{\sim}{\Phi}}_\delta = \frac{m \, E}{2{,}22 \, f \, Z \, \xi} \qquad \text{(Wb)} \qquad [1.04.08\ h]$$

El factor absoluto de amplitud k_M para la onda real de inducción depende de las mismas características del entrehierro que el factor absoluto de forma de la onda de f.e.m., k_f, y, por tanto, el factor relativo de amplitud K_M que

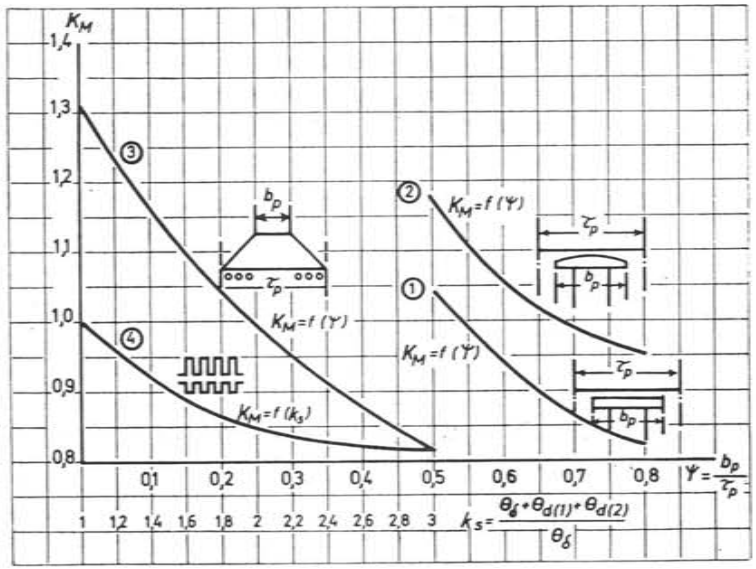


Fig. 1.04.08 b. Factor relativo de amplitud para máquinas de corriente alterna

$$K_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k_M}{k_f}$$

según el tipo de máquina

1. Alternadores de polos salientes y entrehierro uniforme
2. » » » » » senoidal
3. » » inductor cilíndrico
4. Motores de inducción (estator y rotor ranurados).

reúne a ambos coeficientes k_M y k_f podrá determinarse en función de las mismas variables que el factor relativo de forma K_f antes estudiado.

La figura 1.04.08 b muestra los valores de K_M según el tipo de máquina y la configuración del entrehierro.

Como complemento, la fig. 1.04.08 c trata de aclarar gráficamente los conceptos que acabamos de exponer aplicados a un alternador de polos salientes.

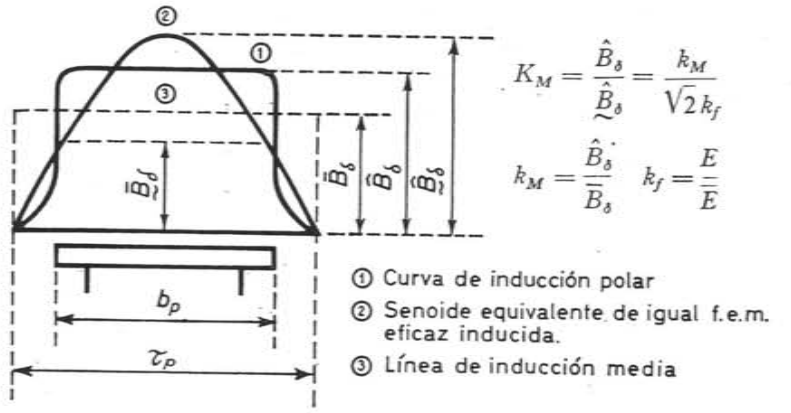


Fig. 1.04.08 c. Idea gráfica de las inducciones máximas senoidal $\hat{\underset{\sim}{B}}_\delta$ y efectiva $\hat{B}_\delta$ y de las inducciones medias respectivas $\bar{\underset{\sim}{B}}_\delta$ y $\bar{B}_\delta$ para el inducido liso de un alternador de polos salientes y entrehierro uniforme.

1.04.09. Corrección por canales radiales de ventilación

El inducido de las máquinas eléctricas no es liso, como hemos supuesto hasta ahora, sino dentado y, además, en múltiples construcciones se interrumpe por canales de ventilación radial, todo lo cual produce una concentración de flujo sobre las superficies cilíndricas de los paquetes de chapas dando origen a un aumento efectivo de la inducción máxima. Trataremos de hallar ahora la

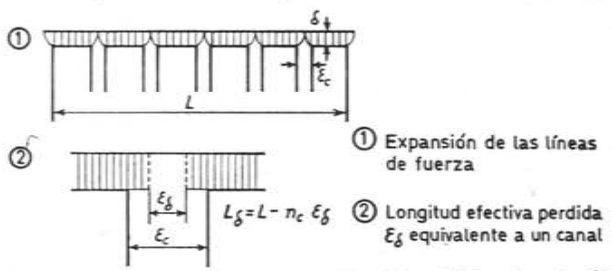


Fig. 1.04.09 a. Efecto de los canales de ventilación radial sobre la distribución del flujo en el entrehierro.

corrección a efectuar debida a la presencia de los canales de ventilación citados.

Si designamos por ε_c, cm, la anchura de uno de estos canales, la longitud perdida en el entrehierro para el paso radial del flujo será ε_δ, cm, algo menor que ε_c como consecuencia de la expansión natural de las líneas de fuerza frente a dichos canales (fig. 1.04.09 a); ε_δ depende, por una parte, del valor de ε_c y, por otra, de la altura δ, cm, del entrehierro así como de la forma y disposición de los canales en cuestión. Para δ se tomará siempre el entrehierro mínimo, correspondiente a la línea de inducción máxima, en el caso de polos salientes de entrehierro variable.

Las figuras 1.04.09 b y c muestran los valores de

$$\varepsilon_\delta = \mathrm{f}\ (\delta,\ \varepsilon_c)$$

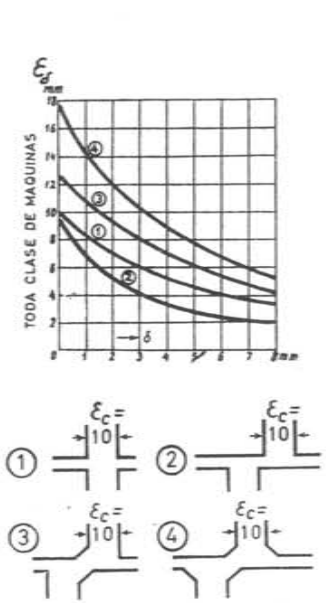


Fig. 1.04.09 b. Longitud perdida en el entrehierro, ε_δ por cada canal de ventilación radial de 10 mm de longitud ε_c.

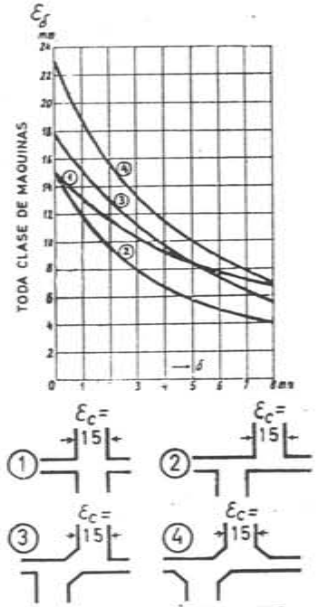


Fig. 1.04.09 c. Longitud perdida en el entrehierro ε_δ por cada canal de ventilación radial de 15 mm de longitud ε_c.

con distintas disposiciones de estos canales en su abertura sobre el entrehierro.

La longitud activa del entrehierro desciende así a

$$\boxed{L_\delta = L - n_c\ \varepsilon_\delta} \qquad [1.04.09\ a]$$

si uno solo de los dos elementos de la máquina, estator o rotor, va provisto de n_c canales de este género; si existen tanto en el rotor como en el estator,

identificadas las magnitudes respectivas por los subíndices adicionales 2 (secundario) y 1 (primario), la longitud efectiva del entrehierro se reducirá a

$$\boxed{L_\delta = L - (n_{c(1)}\ \varepsilon_{\delta(1)} + n_{c(2)}\ \varepsilon_{\delta(2)})} \qquad [1.04.09\ b]$$

La inducción máxima efectiva en el entrehierro $\hat{B}_\delta$ aumentará en razón inversa de las longitudes L y L_δ, es decir, si hacemos

$$\boxed{K_L = \frac{L}{L_\delta}} \qquad [1.04.09\ c]$$

tendremos, incluida esta corrección, en continua, [1.04.08 c],

$$\hat{B}_\delta = K_M\ K_L\ \hat{B}_\delta \qquad [1.04.09.\ d]$$

y en alterna, [1.04.08 f],

$$\hat{B}_\delta = K_M\ K_L\ \hat{\underset{\sim}{B}}_\delta \qquad [1.04.09\ e]$$

(todas las longitudes en la misma unidad, así como las inducciones).

1.04.10. Corrección por efecto de las ranuras. Coeficiente de Carter

La discontinuidad que éstas producen en el arco polar reduce nuevamente la superficie útil del entrehierro, fig. 1.04.10 a, aumentando la inducción má-

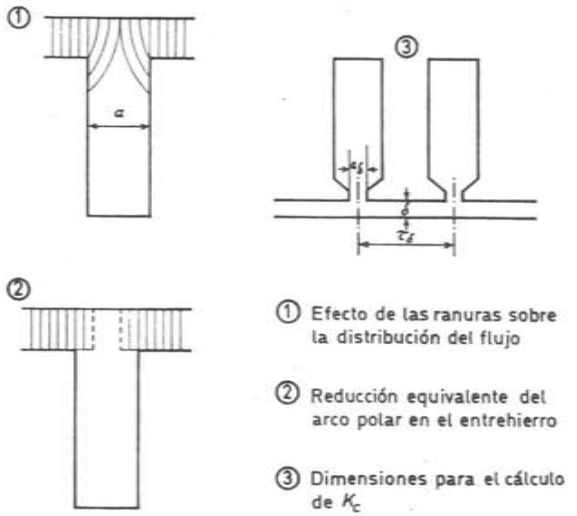


Fig. 1.04.10 a. Coeficiente de CARTER.

xima en la proporción del llamado coeficiente de CARTER K_C. Constituye, por regla general, una corrección muy importante. Fue determinada primero por CARTER (de donde recibe su nombre el coeficiente) acudiendo al método de la representación conforme y posteriormente por otros varios autores que han dado diversas expresiones analíticas y gráficas para el mismo, todas coincidentes en la práctica. De ellas, entresacamos estas dos

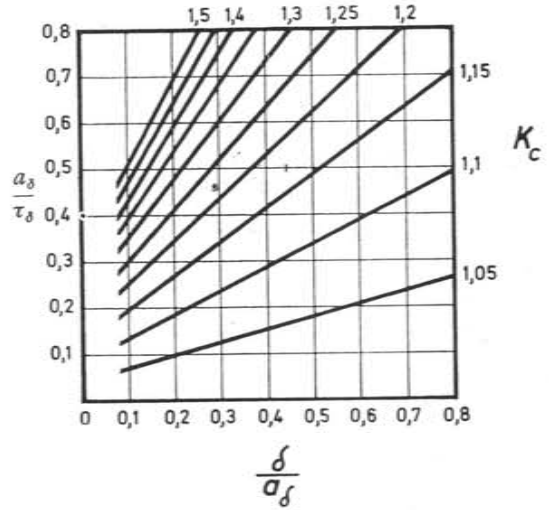


Fig. 1.04.10 b. Cálculo gráfico del coeficiente de CARTER K_C.

$$K_C = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta + \delta - \frac{3}{4} a_\delta} \qquad [1.04.10\ a]$$

y γ

$$K_C = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta - \frac{\left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{a_\delta}{\delta}} \delta} \qquad [1.04.10\ b]$$

así como las curvas de la fig. 1.04.10 b donde aparece K_C directamente en función de $\left(\frac{\delta}{a_\delta}\right)$ y de $\left(\frac{a_\delta}{\tau_\delta}\right)$.

$$K_C = f\left(\frac{\delta}{a_\delta}, \frac{a_\delta}{\tau_\delta}\right).$$

En las fórmulas anteriores, poniendo todas las longitudes en las mismas unidades,

δ es la altura radial del entrehierro (la mínima si el entrehierro fuese variable).

τ_δ el paso de ranuras medido sobre el mismo

a_δ la anchura de salida de la ranura en el entrehierro.

Si la máquina lleva dentados tanto el rotor como el estator (motores de inducción, por ejemplo), se calculan independientemente ambos factores, para cada uno de estos órganos como si el otro fuese liso obteniéndose así los coeficientes individuales respectivos $K_{C(1)}$ y $K_{C(2)}$. El coeficiente de CARTER combinado puede tomarse igual al producto de ambos.

$$K_C = K_{C(1)}\ K_{C(2)} \qquad [1.04.10\ c]$$

La inducción máxima en el entrehierro pasa a ser finalmente:
con corriente continua

$$\hat{B}_\delta = K_M\ K_L\ K_C\ \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta \qquad [1.04.10\ d]$$

y para máquinas de alterna

$$\hat{B}_\delta = K_M\ K_L\ K_C\ \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta \qquad [1.04.10\ e]$$

$\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$ y $\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$ se calculan según las ecuaciones respectivas [1.04.08 b] y [1.04.08 g].

1.04.11. Excitación para el entrehierro

Hallada la inducción máxima efectiva $\hat{B}_\delta$, todas las correcciones comprendidas, la f.m.m. por entrehierro de δ será, [1.04.02 c, d y b],

$$\hat{\theta}_\delta = \hat{H}_\delta\ \delta = (0{,}8 \cdot \hat{B}_\delta)\delta \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.04.11\ a]$$

(con $\hat{B}_\delta$ en G y δ en cm;)

o bien

$$\hat{\theta}_\delta = \hat{H}_\delta\ \delta = (800.000\ \hat{B}_\delta)\delta \quad \text{(Av/polo)} \qquad (1.04.11\ b]$$

(con $\hat{B}_\delta$ en T y δ en m.)

1.04.12. Ejemplo

Calcular la excitación, por cada entrehierro, necesaria para inducir la f.e.m. $E = 500$ V en una dinamo de 345 kw, $2p = 6$ polos, $N = 985$ r/m y dimensiones como sigue:

Diámetro del inducido: 60 cm $= D$
Longitud total del mismo: 36 cm $= L$
Recubrimiento polar: 0,62 $= \psi$
Canales de ventilación radial: $n_e = 4$ de $\varepsilon_e = 1$ cm de longitud axial cada uno
Número total de conductores: 600 $= Z$ (8 por ranura)
Número total de vías en paralelo: $6 = 2a$
Número total de ranuras: $75 = n$
Abertura de la ranura: 12 mm $= a_\delta = a = 12$ mm
Altura radial del entrehierro: 0,55 cm $= \delta$
El flujo máximo por polo deberá ser, [1.04.04 d],

$$\hat{\Phi}_\delta = \frac{E}{\frac{p}{a}\frac{N}{60}Z} = \frac{500}{\frac{6}{6}\frac{985}{60}600} = 0{,}0508 \text{ Wb}$$

La inducción máxima teórica, de onda rectangular, $\hat{B}_\delta$ [1.04.08 b],

$$\hat{B}_\delta = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{\psi\, \tau_p\, L} \quad \text{(T)};$$

como

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p} = \frac{\pi \cdot 0{,}6}{6} = 0{,}314 \text{ m},$$

es

$$\hat{B}_\delta = \frac{0{,}0508}{0{,}62 \cdot 0{,}314 \cdot 0{,}36} = 0{,}723 \text{ T}$$

Para hallar la inducción máxima efectiva calculemos los siguientes factores:

a) Factor relativo de amplitud K_M. Según [1.04.08 d],

$$K_M = \frac{1}{1 + \frac{2}{\psi}\frac{\delta}{\tau_p}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{0{,}62}\frac{0{,}55}{31{,}4}} = 0{,}947$$

b) Corrección por los canales de ventilación radial:

Para $\varepsilon_e = 10$ mm y $\delta = 5{,}5$ mm con la disposición (2) de la fig. 1.04.09 b (2) resulta $\varepsilon_\delta = 2{,}6$ mm

Longitud axial efectiva del entrehierro, [1.04.09 a],

$$L_\delta = L - n_e\, \varepsilon_\delta = 36 - 4 \cdot 0{,}26 = 34{,}96 \text{ cm}$$

y, [1.04.09 c],

$$K_L = \frac{L}{L_\delta} = \frac{36}{34{,}96} = 1{,}03$$

c) Factor de CARTER: Tomemos la ecuación [1.04.10 b]

$$K_c = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta - \frac{\left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)}\delta}$$

El paso de ranura es

$$\tau_\delta = \frac{\pi D}{n} = \frac{\pi \cdot 60}{75} = 2{,}51 \text{ cm};$$

luego,

$$K_c = \frac{2{,}51}{2{,}51 - \frac{(1{,}2/0{,}55)^2}{5 + (1{,}2/0{,}55)}0{,}55} = 1{,}17$$

La inducción máxima real en el entrehierro pasa a ser, [1.04.10 d],

$$\hat{B}_\delta = (K_M\, K_L\, K_c)\, \hat{B}_\delta = (0{,}947 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}17)\ 0{,}723 = 0{,}825 \text{ T}$$

Nótese que las correcciones hacen subir la inducción máxima del entrehierro en un 15 % aproximadamente.

Excitación por entrehierro, [1.04.11 a]:

$$\hat{\theta}_\delta = 0{,}8\ \hat{B}_\delta\ \delta = 0{,}8 \cdot 8\,250 \cdot 0{,}55 = 3\,630 \text{ Av/polo}$$

a razón de, [1.04.02 c],

$$\hat{H}_\delta = 0{,}8\ \hat{B}_\delta = 0{,}8 \cdot 8\,250 = 6\,600 \text{ Av/cm}$$

1.04.13. Factor de distribución

Considerando f.e.m. senoidales, las expresiones de ξ_d y ξ_y, o conjuntamente de ξ, son fáciles de determinar por la relación entre la suma geométrica y la suma aritmética de los vectores individuales que integran la f.e.m. total

$$\xi = \frac{\overrightarrow{\Sigma e}}{\Sigma e}$$

Con todas las ranuras uniformemente bobinadas, para la fundamental o cualquier armónico de orden superior ν se obtiene como factor de distribución de una máquina polifásica

$$\xi_{dv} = \frac{\operatorname{sen}\left(v\,\frac{90^o}{m}\right)}{n_{pf}\,\operatorname{sen}\left(v\,\frac{90^o}{m\,n_{pf}}\right)} \qquad [1.04.13\ a]$$

donde

n_{pf} = número de ranuras por polo y fase $= \dfrac{n}{2p\,m}$

m = número de fase

n = número total de ranuras de la máquina

p = número de pares de polos

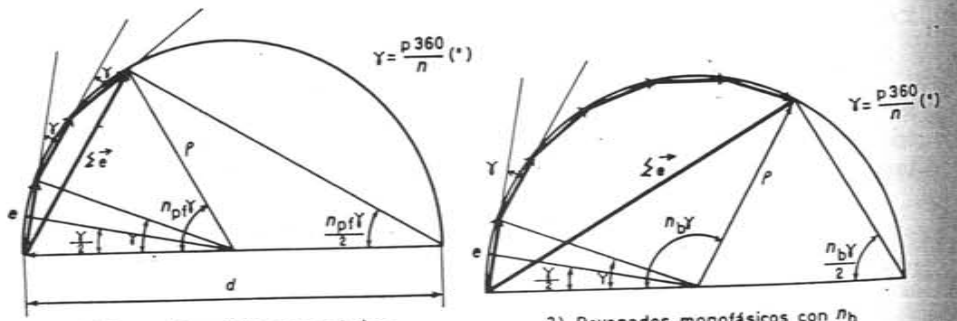
v = orden del armónico (1, para la fundamental)

En efecto: las f.e.m. inducidas en los conductores de dos ranuras consecutivas van desfasadas del ángulo electromagnético entre las mismas γ. A cada par de polos le corresponden 360º magnéticos, a la circunferencia completa de la máquina le corresponderán, pues ($p \times 360^o$) y siendo n el número de ranuras, entre cada dos de estas consecutivas existirán

$$\gamma = \frac{p \times 360}{n} \text{ (grados electromagn.)} \qquad [1.04.13\ b]$$

Si el número de ranuras por polo y fase es n_{pf} la f.e.m. resultante de los conductores en serie de estas n_{pf} ranuras será proporcional a la resultante geométrica $\overrightarrow{\Sigma e}$ de n_{pf} vectores iguales desfasados entre sí de $\gamma = \dfrac{p\ 360}{n}$ grados geométricos (fig. 1.04.13 a1). Designemos por e la magnitud de uno de estos vectores. La construcción de la figura citada nos muestra inmediatamente que

$$\overrightarrow{\Sigma e} = d = \operatorname{sen}\frac{n_{pf}\,\gamma}{2} = 2\,\rho\,\operatorname{sen}\frac{n_{pf}\,\gamma}{2} = 2\,\frac{\left(\frac{e}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}\operatorname{sen}\,n_{pf}\,\frac{\gamma}{2} = e\,\frac{\operatorname{sen}\,n_{pf}\,\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}$$



1) Devanados polifásicos con todas las ranuras bobinadas

2) Devanados monofásicos con n_b ranuras uniformemente bobinadas por polo

Fig. 1.04.13 a. Factor de distribución ξ_d.

Cuanto a la suma aritmética,

$$\Sigma\, e = n_{pf}\, e$$

de donde, teniendo en cuenta también [b]

$$\xi_d = \frac{\overrightarrow{\Sigma e}}{\Sigma e} = \frac{\operatorname{sen}\,n_{pf}\,\frac{\gamma}{2}}{n_{pf}\cdot\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\,n_{pf}\,\frac{p\cdot 360^o}{2\,n}}{n_{pf}\,\operatorname{sen}\frac{p\ 360^o}{2\,n}}$$

pero como

$$n = 2\,p\,(m\,n_{pf}) \quad \text{o} \quad \frac{n_{pf}\,p}{2\,n} = \frac{1}{4\,m} \quad \text{y} \quad \frac{p}{2\,n} = \frac{1}{4\,m\,n_{pf}},$$

resulta la ecuación [a] con $v = 1$.

Tabla 1.04.13 a. – Factores de distribución ξ_{dv} para los arrollamientos trifásicos

Armónico v	Ranuras por polo y fase n_{pf}								
	1	2	3	4	5	6	7	8	∞
1	**1,000**	**0,966**	**0,960**	**0,958**	**0,957**	**0,956**	**0,956**	**0,956**	**0,955**
3	1,000	0,707	0,667	0,653	0,647	0,644	0,642	0,641	0,637
5	1,000	0,259	0,218	0,205	0,200	0,197	0,196	0,194	0,191
7	1,000	−0,259	−0,177	−0,157	−0,149	−0,145	−0,143	−0,141	−0,136
9	1,000	−0,707	−0,333	−0,270	−0,248	−0,236	−0,229	−0,225	−0,212
11	1,000	−0,966	−0,177	−0,128	−0,109	−0,102	−0,097	−0,095	−0,087

Tabla 1.04.13 b. – Factores de distribución ξ_{dv} para los arrollamientos bifásicos.

Armónico v	Ranuras por polo y fase n_{pf}								
	1	2	3	4	5	6	7	8	∞
1	**1,000**	**0,924**	**0,910**	**0,906**	**0,905**	**0,904**	**0,902**	**0,902**	**0,902**
3	1,000	0,383	0,333	0,318	0,312	0,308	0,306	0,304	0,301
5	1,000	−0,383	−0,244	−0,212	−0,200	−0,194	−0,190	−0,188	−0,180
7	1,000	−0,924	−0,244	−0,180	−0,159	−0,149	−0,143	−0,139	−0,129
9	1,000	−0,924	0,333	0,180	0,143	0,128	0,119	0,114	0,100
11	1,000	−0,383	0,922	0,212	0,143	0,119	0,107	0,100	0,082

$$\xi_d = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{90^\circ}{m}\right)}{n_{pf}\operatorname{sen}\left(\frac{90^\circ}{m\ n_{pf}}\right)} \qquad [1.04.13\ c]$$

Para un número de fases dado, m, el factor de distribución sólo depende del número de ranuras por polo y fase n_{pf}

Si se trata de cualquier armónico de orden ν el desfase entre vectores simples pasa a ser $(\nu\gamma)$ en lugar de γ y la ecuación general del factor de distribución resulta así, según anunciamos,

$$\xi_{d\nu} = \frac{\operatorname{sen}\left(\nu\,\frac{90}{m}\right)}{n_{pf}\operatorname{sen}\left(\nu\,\frac{90^\circ}{m\ n_{pf}}\right)}$$

con $\nu = 1, 3, 5...$, etc.

La tabla 1.04.13 a da directamente los valores de $\xi_{d\nu}$ correspondientes a la fundamental y armónicos impares hasta el 11.º, en función del número de ranuras por polo y fase para las *máquinas trifásicas*, y la tabla 1.04.13 b para las *bifásicas*.

En las *máquinas monofásicas* y por razones de economía no se bobinan nunca uniformemente todas las ranuras llegándose como máximo a $\frac{2}{3}$ de las mismas, ya que el rebasar este número conduce a un factor de distribución muy reducido y por consiguiente a una mala utilización de la máquina. Si el número de ranuras por polo del inducido es n_p y de ellos sólo se aprovechan idénticamente bobinadas n_b ranuras por polo, el factor de distribución viene dado por

$$\boxed{\xi_{d\nu} = \frac{\operatorname{sen}\left[\nu\ (x\ 90^\circ)\right]}{x\ n_p \operatorname{sen}\left(\nu\,\frac{90^\circ}{n_p}\right)}} \qquad [1.04.13\ d]$$

siendo

$$x = \frac{n_b}{n_p} \qquad [1.04.13\ e]$$

Se demuestra de modo análogo en la fig. 1.04.13 a 2. El ángulo vectorial de ranuras seguirá siendo

$$\gamma = \frac{p \cdot 360^\circ}{n} \text{ (grados electromagnéticos)}$$

La resultante geométrica de n_b vectores en serie por polo ascenderá a

$$\overrightarrow{\Sigma e} = d\ \operatorname{sen}\frac{n_b\ \gamma}{2} = 2\ \varrho\ \operatorname{sen}\frac{n_b\ \gamma}{2} = 2\,\frac{\left(\frac{e}{2}\right)}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}\operatorname{sen}\frac{n_b\ \gamma}{2} = e\,\frac{\operatorname{sen}\frac{n_b\ \gamma}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}$$

La suma aritmética de los n_b vectores es

$$\Sigma\ e = n_b\ e$$

y nuevamente

$$\xi_d = \frac{\overrightarrow{\Sigma e}}{\Sigma\ e} = \frac{\operatorname{sen}\frac{n_b\ \gamma}{2}}{n_b\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\frac{n_b\ p}{2\ n}\ 360^\circ}{n_b\operatorname{sen}\frac{p}{2\ n}\ 360^\circ}$$

Pero

$$2\ p\ n_p = n \quad \text{o} \quad \frac{p}{2\ n} = \frac{1}{4\ n_p}$$

de donde

$$\xi_d = \frac{\operatorname{sen}\frac{n_b}{n_p}\,90^\circ}{n_b\operatorname{sen}\frac{90^\circ}{n_p}}$$

o designando por x la fracción de ranuras bobinadas

$$x = \frac{n_b}{n_p},$$

$$\xi_d = \frac{\operatorname{sen}\ (x\ 90^\circ)}{(x\ n_p)\operatorname{sen}\frac{90^\circ}{n_p}} \qquad [1.04.13\ f]$$

y si se considera en general un armónico de orden ν, como todos los ángulos de desfase aparecen multiplicados por ν, el factor de bobinado correspondiente valdrá

$$\xi_{d\nu} = \frac{\operatorname{sen}\ [\nu\ (x\ 90^\circ)]}{x\ n_p\ \operatorname{sen}\ \nu\,\frac{90^\circ}{n_p}}$$

según se pretendía demostrar.

La tabla 1.04.13 c da los valores de $\xi_{d\nu}$ en función del número de ranuras por polo n_p y de la fracción de ellas bobinadas $\frac{n_b}{n_p} = x$ para los armónicos impares 1 a 7.

En los *motores monofásicos fraccionales* las ranuras se reparten entre el bobinado de marcha y el de arranque (aunque éste pueda quedar también en servicio permanente en algunos tipos de motores) y para mejorar la forma de onda y en varios aspectos las características de funcionamiento, el número de conductores por ranura de uno y otro devanado suele variar en determi-

Tabla 1.04.13 c — Factores de distribución $\xi_{d\nu}$ de los arrollamientos monofásicos uniformes

$x = \left(\frac{n_b}{n_p}\right)$	$n_p = 3$ ranuras/polo				$n_p = 4$ ranuras/polo				$n_p = 6$ ranuras/polo			
	$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 7$	$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 7$	$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 7$
1/3 (0,333)	**1**	1	1	1					**0,965**	0,707	-0,259	-0,259
5/12 (0,416)												
4/9 (0,444)												
1/2 (0,500)					**0,925**	0,383	-0,382	-0,925	**0,910**	0,333	-0,244	-0,244
5/9 (0,555)												
7/12 (0,583)												
2/3 (0,667)	**0,866**	0	-0,866	-0,866					**0,836**	0,000	-0,224	0,224
3/4 (0,750)					**0,805**	-0,138	-0,138	0,805				
7/9 (0,779)												
5/6 (0,833)									**0,745**	-0,200	0,0536	0,0536
8/9 (0,889)												
11/12 (0,917)												
1	**0,667**	-0,333	0,667	0,667	**0,653**	-0,271	0,271	-0,653	**0,644**	-0,235	0,173	-0,017

para la fundamental y diversos armónicos ν, según el número de ranuras bobinadas por polo n_b

$n_p = 9$ ranuras/polo				$n_p = 12$ ranuras/polo				$n_p = \infty$ ranuras/polo			
$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 7$	$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 7$	$\nu = 1$	$\nu = 3$	$\nu = 5$	$\nu = 7$
0,960	0,667	0,217	-0,177	**0,958**	0,653	0,205	-0,157	**0,955**	0,636	0,191	-0,136
				0,932	0,482	-0,043	-0,250	**0,926**	0,671	-0,040	-0,216
0,925	0,433	-0,1115	-0,262					**0,921**	0,414	-0,098	-0,201
				0,903	0,307	-0,194	-0,148	**0,902**	0,300	-0,180	-0,129
0,882	0,200	-0,245	-0,037					**0,878**	0,191	-0,215	-0,028
				0,869	0,1425	-0,232	0,023	**0,865**	0,139	-0,216	0,020
0,831	0,000	-0,188	0,154	**0,830**	0,000	-0,178	0,136	**0,826**	0,000	-0,165	0,118
				0,786	-0,111	-0,070	0,129	**0,783**	-0,107	-0,065	0,112
0,772	-0,143	-0,032	0,116					**0,768**	-0,137	-0,028	0,090
				0,740	-0,184	-0,0475	0,033	**0,738**	-0,180	0,040	0,028
0,708	-0,217	0,105	-0,035					**0,705**	-0,207	0,092	-0,035
				0,690	-0,219	0,118	-0,073	**0,687**	-0,214	0,110	-0,060
0,040	-0,222	0,145	-0,012	**0,638**	-0,217	0,137	-0,011	0,636	-0,212	0,127	-0,091

Tabla 1.04.13 d. — Factores de distribución ξ_d para la fundamental de los distintos arrollamientos monofásicos empleados.

Ranuras por polo	Factor de distribución ξ_d	Ranura n.º												
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	0,8536	(1)	(1)	(0)	(1)	(1)								
	0,8047	(1)	(2)	(0)	(2)	(1)								
	1,0000	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)								
6	0,9659	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)							
	0,8365	(1)	(1)	(0)	(0)	(1)	(1)							
	0,6440	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)							
	0,8080	(1)	(2)	(1)	(0)	(1)	(2)	(1)						
	0,7887	(1)	(1)	(1)	(0)	(1)	(1)	(1)						
9	0,8186	(1)	(2)	(2)	(1)	(0)	(0)	(1)	(2)	(2)	(1)			
	0,8823	(1)	(2)	(2)	(0)	(0)	(0)	(0)	(2)	(2)	(1)			
	0,9114	(1)	(2)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(2)	(1)			
	0,9254	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)				
	0,9373	(3)	(2)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(2)	(2)				
	0,8689	(2)	(2)	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)	(2)	(3)				
	0,8312	(1)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)	(1)				
	0,8557	(3)	(3)	(2)	(0)	(0)	(0)	(2)	(3)	(3)				
	0,8581	(8)	(8)	(5)	(0)	(0)	(0)	(5)	(8)	(8)				
12	0,9250	(2)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)	(2)	
	0,8721	(2)	(2)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)	(2)	(2)	
	0,8294	(1)	(1)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)	(1)	(1)	
	0,7400	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(0)	(0)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	
	0,7763	(3)	(3)	(2)	(2)	(2)	(0)	(0)	(2)	(2)	(2)	(3)	(3)	
	0,8387	(1)	(2)	(2)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)	(2)	(2)	(1)
	0,9010	(1)	(2)	(1)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(1)	(2)	(1)
	0,8223	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)
	0,9495	(1)	(2)	(1)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)	(1)	(2)	(1)

nadas proporciones de ranura en ranura. Cuando se adoptan soluciones de este género, así como en el caso de los arrollamientos «fraccionarios» (con un número fraccionario de ranuras por polo y fase) que estudiaremos más adelante con los alternadores, no siempre es posible deducir ecuaciones generales del factor de distribución siendo necesario acudir entonces a determinarlo analítica o gráficamente en cada caso particular.

En la tabla 1.04.13 d se recogen los factores de bobinado para algunas soluciones corrientes de los motores monofásicos. Las cifras entre paréntesis indican los valores relativos del número de conductores por ranura Z_n.

Las ranuras vacías se ocupan desde luego con el devanado auxiliar de arranque y a veces éste llena también parte de las ranuras principales.

Nótese por las tablas *a* a *c* como los factores de distribución para las f.e.m. armónicas ($\nu = 3, 5, 7\ldots$), son casi siempre inferiores a los de la fundamental ($\nu = 1$). El devanado distribuido constituye, lo mismo que el acortamiento

del paso según veremos enseguida, un recurso muy práctico para mejorar la forma de onda de las tensiones. Los armónicos 5.º y 7.º por ejemplo se reducen a menos de la cuarta parte con cualquier distribución del arrollamiento.

1.04.14. Ejemplos

Ejemplo 1.º Calcular el factor de distribución correspondiente al 3.er armónico de un devanado trifásico con 3 ranuras por polo y fase.

Según [1.04.13 a],

$$\xi_{d\nu} = \frac{\operatorname{sen} \nu \dfrac{90}{m}}{n_{pf} \operatorname{sen} \nu \dfrac{90}{m\ n_{pf}}}$$

Con $m = 3$ fases, $n_{pf} = 3$ ranuras por polo y fase y $\nu = 3$

$$\xi_{d\nu} = \frac{\operatorname{sen} 3 \dfrac{90}{3 \cdot 0}}{\operatorname{sen} 3 \dfrac{90}{3 \cdot 3}} = \frac{\operatorname{sen} 90^\circ}{3 \operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{1}{3 \cdot 0{,}5} = 0{,}667$$

tal como figura en la tabla 1.04.13 a

Ejemplo 2.º Calcular: *a*) Los factores de distribución para la fundamental del motor anterior funcionando con corriente trifásica y con corriente monofásica; en este último caso, durante la marcha normal se utilizan en serie sólo dos de las tres fases del bobinado (la tercera interviene únicamente a la puesta en marcha). *b*) La relación en que variarán las inducciones de la máquina para una misma tensión de línea sabiendo que el arrollamiento trifásico va conectado en estrella. *c*) La relación de potencias del motor trabajando según una y otra modalidad

a) Con corriente trifásica, seg. [1.04.13 a],

$$\xi_{d\nu} = \frac{\operatorname{sen} \nu \dfrac{90}{m}}{n_{pf} \operatorname{sen} \nu \dfrac{90}{m\ n_{pf}}},$$

y para $m = 3$ fases $n_{pf} = 3$ ran. por polo y fase y $\nu = 1$

$$\xi_{d1} = \frac{\operatorname{sen} \dfrac{90}{3}}{3 \operatorname{sen} \dfrac{90}{3 \cdot 3}} = \frac{\operatorname{sen} 30^\circ}{3 \operatorname{sen} 10^\circ} = \frac{0{,}5}{3 \cdot 0{,}1736} = 0{,}960$$

como aparecen también en la tabla 1.04.13 a.

Al convertirlo en monofásico con solo dos de las tres fases en serie, el número de ranuras bobinadas pasa a ser $n_b = 6$ de las $n_p = 9$ totales por polo. El coeficiente de utilización del arrollamiento valdrá, [1.04.13 e],

$$x = \frac{n_b}{n_p} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

y el factor de distribución para la fundamental desciende a, [1.04.13 d],

$$\xi_d = \frac{\operatorname{sen} \nu\ (x \cdot 90)}{x\, n_p \operatorname{sen} \nu \dfrac{90}{n_p}},$$

poniendo $\nu = 1$, $n_p = 9$ ranuras por polo y $x = \frac{2}{3}$,

$$\xi_{d1} = \frac{\operatorname{sen} \frac{2}{3}\ 90^\circ}{\frac{2}{3}\ 9\ \operatorname{sen} \frac{90}{9}} = \frac{\operatorname{sen}\ 60^\circ}{6\ \operatorname{sen}\ 10^\circ} = \frac{0{,}866}{6 \cdot 0{,}1736} = 0{,}831$$

tal y como aparecen también en la tabla 1.04.13 c.

b) Si la máquina trabajaba como trifásica en estrella a la tensión de línea U, la tensión a que se hallaba sometida por fase era $\frac{U}{\sqrt{3}}$. Cuando funciona en monofásica, con dos de estas fases simplemente en serie, la tensión por fase pasará a ser $\frac{U}{2}$. Los factores de bobinado respectivos se reducen a los de distribución, supuesto el paso entero, y ascienden, respectivamente, según acabamos de ver, a $\xi_{d1} = 0{,}960$ en trifásica y $\xi_{d1} = 0{,}831$ en monofásica.

Ahora bien, las inducciones de trabajo son, desde luego, proporcionales a las f.e.m. y, por tanto, con bastante aproximación, a las tensiones, e inversamente proporcionales a los factores de bobinado, [1.04.05 d]; tendremos, pues:

$$\frac{\text{Inducciones en monofásica}}{\text{Inducciones en trifásica}} = \frac{\frac{U}{2}}{\frac{U}{\sqrt{3}}}\ \frac{0{,}960}{0{,}831} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{0{,}96}{0{,}831} = 1.$$

La situación magnética del motor apenas si se altera al pasar de trifásico a monofásico en las condiciones supuestas. De aquí viene la posibilidad corriente de utilizar los motores trifásicos de algunos CV sin modificación alguna en el bobinado estrella para funcionar como monofásicos. Sólo hay que preocuparse de conseguir el par de arranque para lo cual se utiliza la fase muerta añadiendo en serie un condensador o una resistencia adecuada.

c) La potencia aparente que podrá tomar de la línea el motor trifásico, designado por I la corriente nominal (igual a la corriente por fase en la conexión en estrella) será

$$P_a = \sqrt{3}\ U\ I \qquad \text{(VA)}$$

Como monofásico trabaja, según decimos, a la tensión U y la corriente admisible en el devanado seguirá siendo I, es decir, la potencia aparente que puede absorber ahora viene a ser

$$P_a = U\ I$$

La relación entre ambas potencias,

$$\frac{\text{Potencia aparente en monofásica}}{\text{Potencia aparente en trifásica}} = \frac{U\ I}{\sqrt{3}\ U\ I} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577 \approx 0{,}58$$

Si el rendimiento y el cos φ permanecieran invariables al pasar de uno a otro montaje, la potencia útil del motor variaría en la misma relación hallada. Como las pérdidas y el factor de potencia del motor monofásico son siempre más desfavorables, la potencia útil se reduce prácticamente a *la mitad* de la del motor trifásico.

Estos principios pueden servir de base al cálculo expeditivo de un motor de inducción monofásico. Basta tomar otro trifásico, en estrella, de doble potencia, previsto para la misma tensión de línea.

1.04.15. Factor de paso ξ_y

Si el paso de bobina no es diametral (eléctricamente), es decir, si abarca un arco polar superior o inferior a los 180° electromagnéticos de un paso polar aparece un desfase entre las f.e.m. de ambos lados de bobina que es causa de nueva reducción de la f.e.m. resultante, dando así origen al factor de paso ξ_y de naturaleza análoga al de distribución ξ_d. Como siempre, el nuevo factor viene dado por la relación de la suma vectorial a la suma aritmética de los vectores afectados.

$$\xi_y = \frac{\overrightarrow{\Sigma e}}{\Sigma e}$$

Si el acortamiento expresado en grados electromagnéticos es igual a α aparece este mismo desfase entre las f.e.m. en serie de los dos lados de bobina y tendremos, fig. 1.04.15 a,

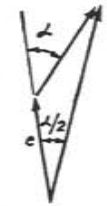


Fig. 1.04.15 a. Factor de paso ξ_y.

$$\xi_y = \frac{2\ e \cos \frac{\alpha}{2}}{2\ e} = \cos \frac{\alpha}{2} \qquad \text{[1.04.15 a]}$$

para la fundamental. Para cualquier armónico de orden ν el desfase pasa a ser $\nu\alpha$ y, de un modo general,

$$\boxed{\xi_{y\nu} = \cos\ \nu\ \frac{\alpha}{2}} \qquad \text{[1.04.15 b]}$$

La tabla 1.04.15 a da los valores de $\xi_{y\nu}$ correspondiente a los distintos armónicos en función del paso relativo

Tabla 1.04.15 a. — Factor de paso ξ_{yv} para la fundamental y armónicos de un devanado cualquiera de c.a.

Paso relativo $\overset{*}{y} = \frac{y_n}{n_p}$	Armónico $v =$					
	1	3	5	7	9	11
$\frac{1}{2}$ (0,500)	**0,707**	−0,707	−0,707	0,707	0,707	−0,707
$\frac{8}{15}$ (0,532)	**0,742**	−0,592	−0,862	0,418	0,946	−0,242
$\frac{5}{9}$ (0,555)	**0,766**	−0,500	−0,940	0,174	1,000	0,174
$\frac{2}{12}$ (0,583)	**0,793**	−0,384	−0,991	0,127	0,924	0,643
$\frac{6}{10}$ (0,600)	**0,809**	−0,309	−1,000	−0,309	0,809	0,906
$\frac{5}{8}$ (0,625)	**0,831**	−0,194	−0,981	−0,559	0,555	0,980
$\frac{2}{3}$ (0,667)	**0,866**	−0,000	−0,866	−0,867	0,000	0,866
$\frac{7}{10}$ (0,700)	**0,891**	−0,156	−0,707	−0,988	0,454	0,454
$\frac{11}{15}$ (0,733)	**0,913**	0,309	−0,500	−0,978	−0,809	−0,105
$\frac{3}{4}$ (0,750)	**0,924**	0,383	−0,0436	−0,924	−0,924	−0,383
$\frac{7}{9}$ (0,778)	**0,940**	0,500	−0,174	−0,766	−1,000	−0,766
$\frac{8}{10}$ (0,800)	**0,951**	0,588	0,000	−0,588	−0,951	−0,948
$\frac{5}{6}$ (0,833)	**0,966**	0,707	0,259	−0,259	−0,707	−0,966
$\frac{13}{15}$ (0,867)	**0,978**	0,809	0,500	0,105	−0,309	−0,669
$\frac{7}{8}$ (0,875)	**0,981**	0,832	0,555	0,196	−0,194	−0,560
$\frac{8}{9}$ (0,889)	**0,985**	0,867	0,643	0,342	0,000	−0,342
$\frac{9}{10}$ (0,900)	**0,988**	0,891	0,707	0,454	0,156	−0,156
$\frac{11}{12}$ (0,917)	**0,991**	0,924	0,793	0,609	0,383	0,130
$\frac{14}{15}$ (0,933)	**0,995**	0,950	0,867	0,743	0,588	0,407
1 (1,000)	**1,000**	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

BIBLIOTECA
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

$$\overset{*}{y} = \frac{y_n}{n_p} \qquad [1.04.15\ c]$$

siendo y_n el paso de bobinado medido en ranuras y n_p el de ranuras por polo Dicha tabla responde a la ecuación

$$\xi_{yv} = \cos\ v\,\frac{\alpha}{2} = \cos\ v\left[(n_p - y_n)\frac{90^o}{n_p}\right] =$$

$$\boxed{\xi_{yv} = \cos\left[v\left(1 - \frac{y_n}{n_p}\right)90^o\right]} \qquad [1.04.15\ d]$$

que es otra expresión del factor de paso ξ_{yv} ya que $\frac{180^o}{n_p} = \gamma$ es el ángulo electromagnético entre ranuras y $(n_p - y_n)$ el acortamiento del paso medido en ranuras. Si, por ejemplo, $y_n = 5$ y $n_p = 6$, el 5.º armónico nos da, [d], $\xi_{v5} = \cos\ 75^o = 0{,}259$.

Para introducir el valor correcto de y_n en estas fórmulas conviene en

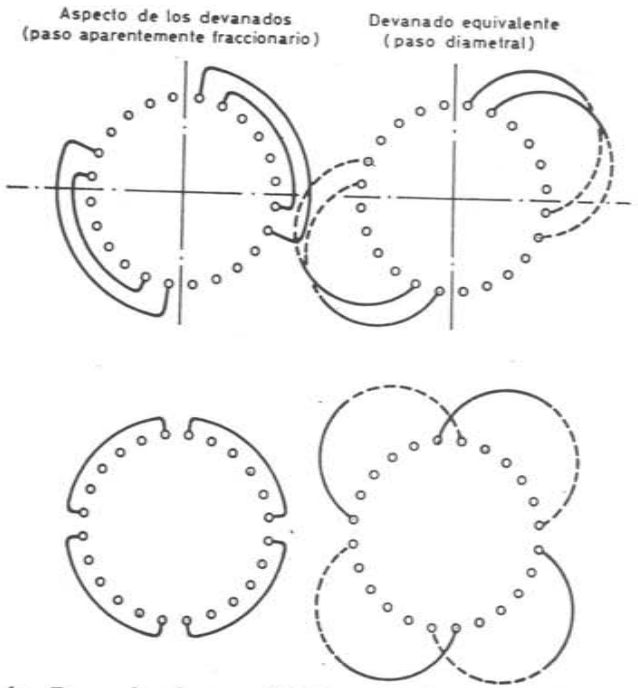


Fig. 1.04.15 b. Devanados de paso eléctricamente diametral (a la derecha), aunque de ejecución real con paso distinto (a la izquierda).

ciertas ocasiones prescindir de la forma geométrica de las cabezas de bobina y atender únicamente a la posición de los haces activos en las ranuras según la distribución del arrollamiento. La fig. 1.04.15 b muestra, por ejemplo, dos arrollamientos de cuatro polos, distribuidos, de paso diametral a efectos del factor de bobinado, aunque en ninguno de ellos lo sea el paso de bobinas; a la derecha se han dibujado los arrollamientos ideales que justifican esta afirmación.

Las ecuaciones [a] a [c] valen también numéricamente para arrollamientos de paso alargado, que aunque no suelen elegirse, resultan inevitables en ciertos casos (motores de dos velocidades en conexión DAHLANDER, por ejemplo).

El acortamiento del paso en una ranura, en los motores trifásicos asincrónicos de 6 ranuras por polo (2 ranuras por polo y fase) reduce el 7.º armónico, muy perturbador durante el arranque, a la cuarta parte; en los de 9 ranuras por polo (3 por polo y fase) el acortamiento de una ranura lo rebaja al 34 %. La distribución del devanado lo reduce previamente a 1/4 y 1/6 de su valor aritmético (tabla 1.04.13 a).

1.04.16. Ejemplo

Calcular la excitación requerida en el entrehierro para generar en vacío la f.e.m. de 8 200 V entre fases $\left(\frac{8\,200}{\sqrt{3}} = 4\,730 \text{ V entre activo y neutro}\right)$ de un alternador trifásico en estrella de 1 800 kVA, 94 r/m, 50 Hz cuyas dimensiones y datos constructivos que interesan son los siguientes:

Diámetro del inducido $D = 500$ cm
Longitud total $L = 30{,}6$ cm
Recubrimiento polar $\psi = 0{,}665$
Canales de ventilación radial $n_c = 3$
Longitud axial por canal $\varepsilon_c = 1$ cm
Número total de conductores $z = 3\,456$ (9 por ranura)
Número total de ranuras $n = 384$
Abertura de ranura $a_\delta = 1{,}6$ cm
Entrehierro $\delta = 0{,}35$ cm (uniforme)
Paso de bobinas: diametral ($y_n = 6$ ranuras : 1 — 7)

El flujo por polo viene dado por [1.04.06 a], supuesta la onda distribuída senoidalmente en el espacio

$$\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \frac{m\,E}{2{,}22 \cdot f \cdot Z\,\xi} \quad \text{(Wb)} \qquad [1.04.16\text{ a}]$$

$m = 3$ fases, $E = 4\,730$ V eficaces/fase, $f = 50$ Hz, $Z = 3\,456$ conductores. Cuanto a ξ, que depende del número de ranuras por polo y fase n_{pf} y del paso de bobina y_n en relación con el número de ranuras por polo, es decir, de $\overset{*}{y} = \frac{y_n}{n_p}$, tendremos:

pares de polos de la máquina; como $f = pN/60$,

$$p = \frac{60 \cdot f}{N} = \frac{60 \cdot 50}{94} = 32$$

$2p = 2 \cdot 32 = 64$ polos.

ranuras por polo : $n_p = \frac{n}{2p} = \frac{384}{64} = 6$

ranuras por polo y fase : $n_{pf} = \frac{n_p}{m} = \frac{6}{3} = 2$

Para $m = 3$ fases y $n_{pf} = 2$ ranuras por polo y fase la tabla 1.04.13 a nos da como factor de distribución para la fundamental $\xi_d = 0{,}966$.

Con un paso de ranuras $y_n = 6$ y un número de ranuras por polo n_p también igual a 6, el paso relativo, [1.04.15 c],

$$\overset{*}{y} = \frac{y_n}{n_p} = \frac{6}{6} = 1 \text{ (diametral.)}$$

y el factor de acortamiento $\xi_y = 1$ (tabla 1.04.15.a).

Luego, el factor de bobinado, [1.04.05 b],

$$\xi = \xi_d\,\xi_y = 0{,}966 \cdot 1 = 0{,}966$$

Sustituyendo valores en [a],

$$\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \frac{3 \cdot 4\,730}{2{,}22 \cdot 50 \cdot 3\,456 \cdot 0{,}966} = 0{,}0383 \qquad \text{Wb}$$

A este flujo le corresponde una inducción senoidal en el entrehierro, de valor máximo [1.04.08 g]

$$\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = 1{,}57\,\frac{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta}{L\,\tau_p} \qquad \text{(T)}$$

$$L = 0{,}306 \text{ m}, \qquad \tau_p = \frac{\pi D}{2p} = \frac{\pi \cdot 5}{64} = 0{,}245 \text{ m}$$

$$\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = 1{,}57 \cdot \frac{0{,}0383}{0{,}306 \cdot 0245} = 0{,}803 \quad \text{T}$$

La inducción máxima efectiva resultará de aplicar los factores de corrección K_M K_L y K_C.

Factor relativo de amplitud $K_M = \frac{k_M}{\sqrt{2}\,k_f}$ [1.04.08 e]. La figura 1.04.08 b, curva (1) correspondiente a alternadores de polos salientes y entrehierro uniforme nos da para $\psi = 0{,}665$ $K_M = 0{,}885$.

Factor de corrección axial K_L. Con el entrehierro de 3,5 mm y canales de 10 mm, la curva (2) de la fig. 1.04.09 b nos indica una pérdida de longitud axial por canal $\varepsilon_\delta = 3{,}6$ mm. La longitud efectiva L_δ pasa a ser, [1.04.09 a],

$$L_\delta = L - n_c\,\varepsilon_\delta = 306 - 3 \cdot 3{,}6 = 295{,}2 \text{ mm.}$$

y, [1.04.09 c],

$$K_L = \frac{L}{L_\delta} = \frac{306}{295{,}2} = 1{,}036.$$

Factor de CARTER. Comparemos las dos ecuaciones [1.04.10 a y b]. La abertura de las ranuras en el entrehierro es $a_\delta = 16$ mm y el paso

$$\tau_\delta = \frac{\pi\ D}{n} = \frac{\pi \cdot 5\,000}{384} = 40{,}9 \text{ mm.}$$

Según [1.04.10 a],

$$K_c = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta + \delta - \frac{3}{4}\ a_\delta} = \frac{40{,}9}{40{,}9 + 3{,}5 - \frac{3}{4}\ 16} = 1{,}26$$

y según [1.04.10 b],

$$K_c = \frac{\tau_\delta}{\tau_c - \frac{\left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)^2}\delta} = \frac{40{,}9}{40{,}9 - \frac{\left(\frac{16}{3{,}5}\right)^2}{5 + \left(\frac{16}{3{,}5}\right)^2}3{,}5} = 1{,}23.$$

Como la segunda fórmula se aproxima más al valor que se deduciría del gráfico 1.04.10 b donde

para $\frac{\delta}{a_\delta} = \frac{3{,}5}{16} = 0{,}219$ y $\frac{a_\delta}{\tau_\delta} = \frac{16}{40{,}9} = 0{,}367$ nos da $K_c = 1{,}2$,

adoptaremos el resultado de la fórmula mencionada

$$K_c = 1{,}23$$

De este modo, la inducción máxima efectiva en el entrehierro pasa a ser, [1.04.10 e],

$$\hat{B}_\delta = K_M\ K_L\ K_c\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta} = 0{,}885 \cdot 1{,}036 \cdot 1{,}23 \cdot 0{,}803 = 0{,}905\ T,$$

la intensidad de campo, [1.04.02 c],

$$H_\delta = 0{,}8\ \hat{B}_\delta \text{ con } \hat{B}_\delta \text{ en G y } H_\delta \text{ en Av/cm}$$

$$H_\delta = 0{,}8 \cdot 9\,050 = 7\,240\ \frac{\text{Av}}{\text{cm}}$$

y la excitación necesaria, [1.04.11 a],

$$\hat{\theta}_\delta = H_\delta\ \delta = 7\,240 \cdot 0{,}35 = 2\,540 \text{ Av/polo.}$$

1.04.17. Inducción aparente en los dientes e inducción real

Anteriormente hemos deducido las expresiones sucesivas [1.04.08 c y f], [1.04.09 d y e] y [1.04.10 d y e] de la inducción efectiva $\hat{B}_\delta$ en el entrehierro de una máquina de continua o de alterna según las varias correcciones a introducir sobre las inducciones máximas ideales respectivas $\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}$ o $\underset{\sim}{\hat{B}_\delta}$ que existirían suponiendo el inducido liso y la distribución del campo rectangular

de base b_p en el primer caso (máquinas de continua) y senoidal de período espacial $2\ \tau_p$ en el último (máquinas de alterna).

Volvamos al inducido *liso* pero teniendo en cuenta, no obstante, la deformación de la onda de campo introducida por la presencia de las superficies polares limitadas de los polos salientes, la distribución del arrollamiento inductor en los turboalternadores o el aplanamiento debido a la saturación en las máquinas asincrónicas. Estos efectos se traducen en el coeficiente relativo de amplitud K_M.

Atendiendo exclusivamente a la deformación citada tendríamos para un inducido completamente liso las inducciones máximas en el entrehierro, [1.04.08 c y f],

$$(K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}) \quad \text{(máquinas de continua)}$$

o

$$(K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta}) \quad (\quad \text{»} \quad \text{» alterna)}$$

Consideremos ahora el arco de entrehierro τ_δ abrazado por un paso de ranura, fig. 1.04.17 a y admitamos, de momento, que todo el flujo sobre dicho arco se concentra seguidamente en el hierro del diente asociado sin que circule

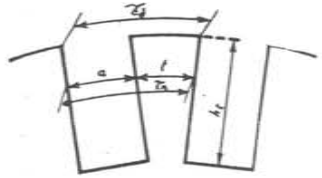


Fig. 1.04.17 a. Inducción en los dientes.

línea de fuerza alguna en paralelo según el camino radial ofrecido por las ranuras y por el aislamiento entre las planchas magnéticas. Despreciemos también la variación que pueda experimentar la inducción alrededor del máximo $\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}$ o $\underset{\sim}{\hat{B}_\delta}$ sobre el arco τ_δ del inducido liso.

El flujo en toda la extensión axial L de τ_δ frente a la zona de máxima inducción vendrá dado, así, de una parte (entrehierro liso) por

$$(K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta})\ \tau_\delta\ L \qquad [1.04.17 \text{ a}]$$

o

$$(K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta})\ \tau_\delta\ L \qquad [1.04.17 \text{ b}]$$

y, de otra, si designamos por $\hat{B}'_d$ la inducción aparente en cualquier zona del diente donde su anchura alcance el valor t, por la expresión que se desprende de la conservación del flujo,

$$\hat{B}'_d\ t\ L_{Fe}. \qquad [1.04.17 \text{ c}]$$

L_{Fe} es la longitud neta de hierro en el inducido. Con respecto a la longitud bruta del conjunto de paquetes de chapa L_h y a la longitud total L se tiene

$$\left.\begin{aligned} L_h &= L - n_c\ \varepsilon_c \\ L_{Fe} &= k_{Fe}\ L_h = k_{Fe}\ (L - n_c\ \varepsilon_c) \end{aligned}\right\} \qquad [1.04.17\ d]$$

siendo

$$\boxed{k_{Fe} = \frac{L_{Fe}}{L_h}} \qquad [1.04.17\ e]$$

el «factor de empilado de la plancha», siempre $k_{Fe} < 1$, debido al aislamiento entre chapas y al asiento de montaje de las mismas nunca perfecto. Con planchas de 0,5 mm de grueso, $k_{Fe} \approx 0{,}9$

Igualando [a] o [b] y [c]

$$\hat{B}'_d\ t\ L_{Fe} = (K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta})\ \tau_\delta\ L \text{ (maq. de continua)}$$

o

$$\hat{B}'_d\ t\ L_{Fe} = (K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta})\ \tau_\delta\ L \text{ (» » alterna)}$$

de donde se desprenden las inducciones aparentes

$$\boxed{\hat{B}'_d} = (K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta})\ \frac{\tau_\delta}{t}\ \frac{L}{L_{Fe}} = \boxed{K_{Fe}\ \frac{\tau_\delta}{t}\ (K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta})} \qquad [1.04.17\ f]$$

para máquinas de continua; y

$$\boxed{\hat{B}'_d} = (K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta})\ \frac{\tau_\delta}{t}\ \frac{L}{L_{Fe}} = \boxed{K_{Fe}\ \frac{\tau_\delta}{t}\ (K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta})} \qquad [1.04.17\ g]$$

para las de alterna.

Como primera aproximación interesa también considerar las inducciones en los dientes sin la corrección debida a la forma de onda real, es decir, otras tantas inducciones aparentes definidas en uno y otro caso por

$\underset{\Omega}{\hat{B}'_d} = K_{Fe}\ \frac{\tau_\delta}{t}\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}$	$\hat{B}'_d = K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}'_d}$ [1.04.17 h]
$\underset{\sim}{\hat{B}'_d} = K_{Fe}\ \frac{\tau_\delta}{t}\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta}$	$\hat{B}'_d = K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}'_d}$ [1.04.17 i]

El coeficiente

$$\boxed{K_{Fe} = \frac{L}{L_{Fe}} = \frac{L}{k_{Fe}\ L_h} = \frac{L}{k_{Fe}\ (L - n_c\ \varepsilon_c)}} \qquad [1.04.17\ j]$$

constituye un factor de corrección sobre la longitud axial para el hierro

Inducción real en los dientes

Cuando las inducciones $\hat{B}'_d$ así calculadas no rebasan de unos 18 kG (1,8 T) la tensión magnética en el hierro de los dientes es bastante reducida y el flujo que deriva radialmente en paralelo por el espacio de las ranuras y del aislamiento entre chapas resulta despreciable. La inducción aparente $\hat{B}'_d$ se confunde con la real $\hat{B}_d$ en la sección de grueso t.

Si las inducciones $\hat{B}'_d$ exceden de aquel valor, el flujo derivado por los espacios en paralelo mencionados comienza a hacerse apreciable disminuyendo con ello la inducción efectiva en los dientes, $\hat{B}_d$, lo cual debe tenerse en cuenta para no exagerar la cifra de amperios-vueltas requerida por los mismos en el cálculo de la excitación de la máquina.

La corrección se efectúa como sigue. Designemos por $\hat{B}_a$ la inducción en la ranura y aislantes alrededor de cada diente, sustancias todas paramagnéticas que se caracterizan por tener una permeabilidad relativa constante igual a la del aire, $\mu = 1$.

La conservación del flujo permite plantear ahora las ecuaciones

$$(K_M\ \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta})\ \tau_\delta\ L = \hat{B}_d\ t\ L_{FE} + \hat{B}_a\ (\tau_n\ L - t\ L_{FE}) = \hat{B}'_d\ t\ L_{FE}$$

para máquinas de continua; o

$$(K_M\ \underset{\sim}{\hat{B}_\delta})\ \tau_\delta\ L = \hat{B}_d\ t\ L_{FE} + \hat{B}_a\ (\tau_n\ L - t\ L_{FE}) = \hat{B}'_d\ t\ L_{FE}$$

en las de alterna, de donde

$$\hat{B}_d = \hat{B}'_d - \hat{B}_a \left(\frac{\tau_n}{t}\ \frac{L}{L_{FE}} - 1\right) = \hat{B}'_d - \hat{B}_a \left(K_{FE}\ \frac{\tau_n}{t} - 1\right). \qquad [1.04.17\ k]$$

Cuanto al valor de $\hat{B}_a$, inducción en un medio de permeabilidad relativa $\mu = 1$ se tiene:

$$B_a = \frac{4\ \pi}{10}\ \hat{H}_d = 1{,}25\ \hat{H}_d \quad \text{(G)}$$

con H_d en $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$; o

$$\hat{B}_a = 4\ \pi \cdot 10^{7-}\ \hat{H}_d \quad \text{(T)}$$

con H_d en $\frac{\text{Av}}{\text{m}}$.

Finalmente,

$$\boxed{\hat{B}_d = \hat{B}'_d - 1{,}25\ \hat{H}_d\ k_t} \quad \text{(G)} \quad \text{con } \hat{H}_d \text{ en } \left(\frac{\text{Av}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.04.17\ \text{l}]$$

o bien

$$\hat{B}_d = \hat{B}'_d - 4\pi \cdot 10^{-7}\ \hat{H}_d\, k_t \ \text{(T)} \ \text{con } H_d \text{ en } \left(\frac{\text{Av}}{\text{m}}\right) \qquad [1.04.17\ \text{m}]$$

siendo

$$\boxed{k_t = K_{Fe}\,\frac{\tau_n}{t} - 1} \qquad [1.04.17\ \text{n}]$$

1.04.18. Cálculo del campo necesario para los dientes

El método a emplear puede ser uno u otro de los que se indican a continuación.

1.º Dada la característica magnética del hierro $B = \text{f}(H)$ con B en G y H en $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$ (fig. 1.04.18 a) se trazan una serie de rectas por el origen

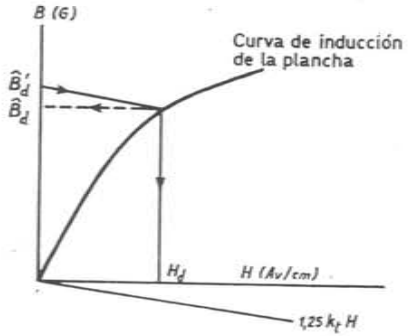


Fig. 1.04.18 a. Determinación del campo para los dientes (1.er método).

según la ecuación

$$y = -1{,}25\ H\ k_t$$

tomando distintos valores de k_t como parámetro.

Calculada la inducción aparente $\hat{B}'_d$, [1.04.17 f o g] se dibuja por el eje de ordenadas una paralela a la recta de parámetro k_t correspondiente a la ranura en cuestión y por su intersección con la característica magnética nos da la inducción efectiva y en abscisas el

campo $\hat{H}_d$ en $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$ para la inducción real consiguiente.

La fig. 1.04.18 b muestra el gráfico de aplicación del método a una curva corriente de chapa tipo dinamo.

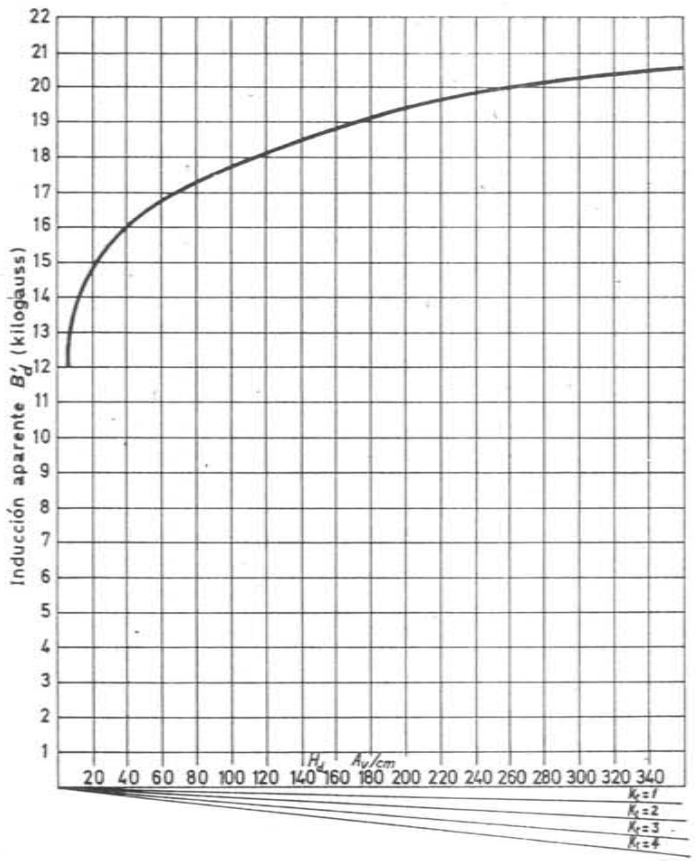


Fig. 1.04.18 b. Curva para el cálculo del campo en los dientes con chapa de dinamo corriente. (1.er método).

2.º Dada la característica magnética del hierro $B = \text{f}(H)$ en las unidades antedichas (B en G y H en $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$) se trazan una serie de curvas $B' = B + 1{,}25\ H\ k_t$ con distintos valores de k_t como parámetro (fig. 1.04.18 c).

Señalando sobre la curva pertinente al parámetro k_t de la sección

en cuestión de los dientes, el valor de la inducción $\hat{B}'_d$, se leen directamente en abscisas los $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$.

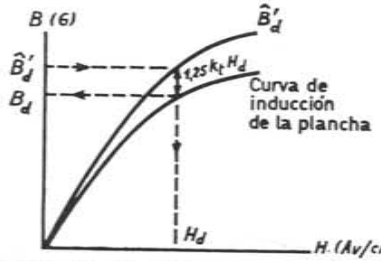


Fig. 1.04.18 c. Determinación del campo para los dientes (2.º método).

La fig. 1.04.18 d muestra un haz de curvas de este género que pueden emplearse para la chapa normal tipo dinamo.

3.º Se puede establecer la relación entre B_d' y B_d, [I],

$$\hat{B}'_d = \hat{B}_d + 1{,}25\ \hat{H}_d\ k_t \quad \text{(G)}; \quad \hat{H}_d \text{ en } \frac{\text{Av}}{\text{cm}}$$

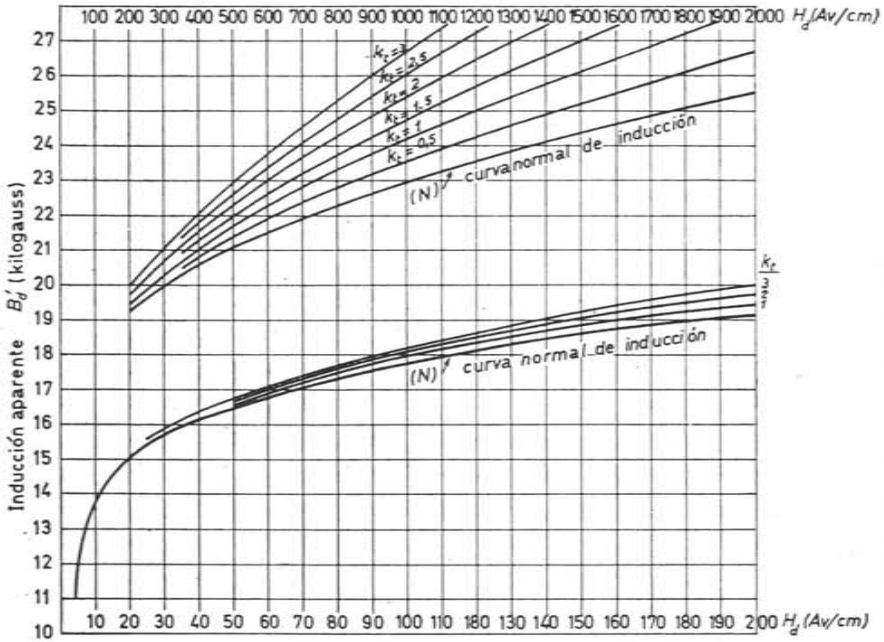


Fig. 1.04.18 d. Curvas para el cálculo del campo en los dientes con chapa tipo dinamo (2.º método).

con distintos valores arbitrarios de k_t para un tipo determinado de chapa caracterizado por una cierta curva de inducción normal $B = \text{f}(H)$ y tomar después como general la relación $\hat{B}'_d = f(\hat{B}_d)$ que de aquí se desprende, la cual a su vez cabe traducirla en un haz de curvas.

$\hat{B}_d$ sirve entonces como inducción real para la lectura de $\hat{H}_d$ en cualquier curva normal de inducción.

A este método corresponde el gráfico de la fig. 1.04.18 e.

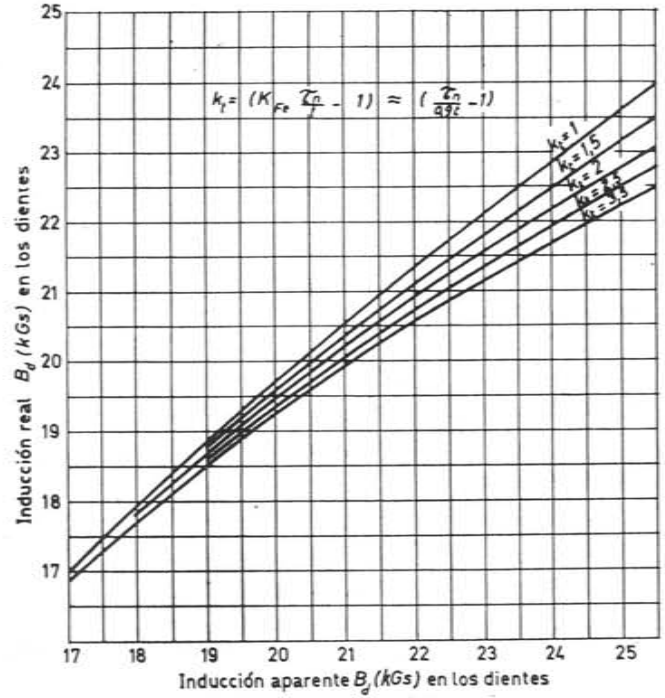


Fig. 1.04.18 e. Relación entre la inducción aparente $\hat{B}'_d$ y la inducción efectiva $\hat{B}_d$ en los dientes según el parametro k_t. (3.er método).

Cualquiera de estos principios es aplicable prácticamente dado el orden de escasa precisión con que pueden calcularse en general las características magnéticas.

1.04.19. Cálculo de la excitación para los dientes

Si los dientes son de grueso tangencial uniforme, se obtendrá la inducción máxima aparente en los mismos según la ecuación, [1.04.17 f o g],

$$\hat{B}'_d = K_{Fe}\,\frac{\tau_\delta}{t}\,(K_M\,\hat{B}_\delta) \qquad \text{(maq. de continua)}$$

$$\hat{B}'_d = K_{Fe}\,\frac{\tau_\delta}{t}\,(K_M\,\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}) \qquad (\ \text{»}\ \ \text{»}\ \ \text{alterna})$$

siendo, [1.04.17 j],

$$K_{Fe} = \frac{L}{L_{Fe}} = \frac{L}{k_{Fe}\,L_h} = \frac{L}{k_{Fe}\,(L - n_c\,\varepsilon_c)}$$

Se calcula a continuación el parámetro [1.04.17 n]

$$k_t = (K_{Fe}\,\frac{\tau_n}{t} - 1)$$

Siguiendo el 2.º procedimiento, se señala sobre el eje de ordenadas figura 1.04.18 d la inducción $\hat{B}'_d$ y la curva de índice k_t nos marcará en abscisas el valor $\hat{H}_d$ de los $\frac{\text{Av}}{\text{cm}}$ necesarios para mantener la inducción real $\hat{B}_d$ que se deriva de $\hat{B}'_d$. Designando por h_t la longitud total del diente en cm tendremos la excitación necesaria para los mismos, por polo,

$$\hat{\theta}_d = \hat{H}_d\,h_t\ \text{(Av)} \qquad [1.04.19\ a]$$

Si acudimos el 1.er método, llevaremos el valor de $\hat{B}'_d$ en ordenadas de la figura 1.04.18 b y trazaremos por este punto una paralela a la recta según el valor antes calculado del parámetro k_t. Su intersección con la curva normal de inducción nos facilita en abscisas $\hat{H}_d$ y con ello

$$\hat{\theta}_d = \hat{H}_d\,h_t \qquad \text{(Av)}$$

Análogamente puede emplearse el 3.er método (fig. 1.04.18 e).

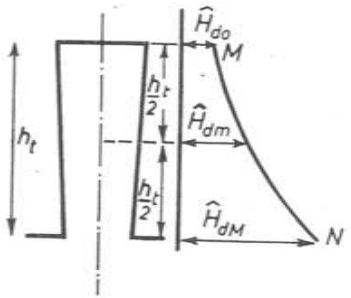


Fig. 1.04.19 a Cálculo del valor medio $\hat{H}_d$ de la intensidad de campo en los dientes.

$$\hat{H}_d = \frac{\hat{H}_{do} + 4\,\hat{H}_{dm} + \hat{H}_{dM}}{6} \qquad \text{(Av/cm)}$$

Cuando el diente es de grueso tangencial variable, fig. 1.04.19 a, la inducción, el campo, y la excitación también varían a lo largo del diente y el cálculo más exacto nos llevaría a subdividir el trayecto del mismo en una serie de trapecios elementales de pequeña altura en los cuales podría considerarse la inducción como constante, y sumar después todas las excitaciones parciales que se derivan de aplicar uno u otro de los métodos anteriores a cada uno de los trapecios en cuestión.

El proceso resultaría así excesivamente laborioso, pudiendo abreviarse de la siguiente manera:

Si imaginamos trazada la curva de intensidades de campo a lo largo del diente, como acabamos de decir, obtendríamos una línea análoga a la MN de la figura 1.04.19 a. De ella se podrá deducir el valor de la altura media $\hat{H}_d$ por un cálculo geométrico de las áreas pero es suficiente aplicar la siguiente ecuación deducida de la fórmula de SIMPSON, tomando exclusivamente los valores correspondientes a la cabeza, a la raíz y al centro del diente.

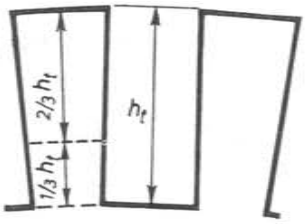


Fig. 1.04.19 b. Inducción a 1/3 de la altura del diente contada desde la raíz.

$$\boxed{\hat{H}_d = \frac{\hat{H}_{ao} + 4\,\hat{H}_{dm} + \hat{H}_{dM}}{6}}\left(\frac{\text{Av}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.04.19\ b]$$

En muchas ocasiones, basta tomar para $\hat{H}_d$ la intensidad de campo única correspondiente a una cota determinada del diente y suele resultar muy apropiada la que se desprende para la sección situada a 1/3 de la altura del mismo contada a partir de la base más estrecha del trapecio, fig. 1.04.19 b.

1.04.20. Ejemplo

Calcular la excitación por polo para los dientes de la máquina propuesta en el ejemplo del párrafo 1.04.12. Las dimensiones de la ranura son $a \times h_t = 12$ mm de ancho × 35 de profundidad.

De todo el estudio nos basta retener la inducción ideal máxima en el entrehierro $\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta} = 0{,}723$ T y el factor relativo de amplitud $K_M = 0{,}947$ (párr. citado), las longitudes del entrehierro $L = 36$ cm y los canales de ventilación radial (4 de 1 cm cada uno), y calcular las dimensiones del diente que resultan ser las que se deducen a continuación:

Número de ranuras $n = 75$

Diámetro del entrehierro $D = 600$ mm

Paso de ranura en el entrehierro $\tau_\delta = \frac{\pi\,D}{n} = \frac{\pi \cdot 600}{75} = 25{,}1$ mm

Profundidad de ranura $h_t = 35$ mm

Diámetro a mitad de la profundidad $D_m = 600 - 35 = 565$ mm

» en el fondo de las ranuras $D_o = 600 - 70 = 530$ »

Paso máximo de diente $\tau_M = \tau_\delta = \frac{\pi\,D_M}{n} = \frac{\pi\,D}{n} = \frac{\pi \cdot 600}{75} = 25{,}1$ mm

» medio » » $\tau_m = \frac{\pi\,D_m}{n} = \frac{\pi \cdot 565}{75} = 23{,}65$ mm

» mínimo » » $\tau_o = \frac{\pi\,D_o}{n} = \frac{\pi \cdot 530}{75} = 22{,}3$ mm

Grueso máximo del diente $t_M = \tau_M - a = 25{,}1 - 12 = 13{,}1$ mm
» medio » » $t_m = \tau_m - a = 23{,}65 - 12 = 11{,}65$ mm
» mínimo » » $t_o = \tau_o - a = 22{,}2 - 12 = 10{,}2$ mm

Longitudes bruta y neta de paquetes, [1.04.17 d]:

$$L_h = L - n_c\, \varepsilon_c = 360 - 4 \cdot 10 = 320 \text{ mm}$$

$$L_{Fe} = k_{Fe}\, L_h = 0{,}9 \cdot 320 = 288 \text{ mm}$$

el factor de empilado supuesto es $k_{Fe} = 0{,}9$.

Coeficiente de longitud axial del hierro, [1.04.17 j]

$$K_{Fe} = \frac{L}{L_{Fe}} = \frac{360}{288} = 1{,}25.$$

Inducciones máximas aparentes, en la cabeza, a media altura y en la raíz del diente [1.04.17 f],

$$\hat{B}_d' = (K_M \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta})\; K_{Fe}\, \frac{\tau_\delta}{t} = (0{,}947 \cdot 0{,}723)\; 1{,}25 \cdot \frac{25{,}1}{t} = \frac{21{,}5}{t} \qquad \text{T}$$

Sustituyendo los valores de t hallamos

$$\hat{B}'_{do} = \frac{21{,}5}{t_M} = \frac{21{,}5}{13{,}1} = 1{,}64 \qquad \text{T}$$

$$\hat{B}'_{dm} = \frac{21{,}5}{t_m} = \frac{21{,}5}{11{,}65} = 1{,}84 \qquad \text{T}$$

$$\hat{B}'_{dM} = \frac{21{,}5}{t_o} = \frac{21{,}5}{10{,}2} = 2{,}1 \qquad \text{T}$$

Las dos últimas inducciones exceden de 18 kG. Calculemos para ellas los parámetros k [1.04.17 n]

$$k_i = K_{Fe}\, \frac{\tau_n}{t} - 1$$

o sea

$$k_{im} = 1{,}25\, \frac{23{,}65}{11{,}65} - 1 = 1{,}54$$

$$k_{iM} = 1{,}25\, \frac{22{,}2}{10{,}2} - 1 = 1{,}72$$

Según las curvas, fig. 1.04.18 d,

para $\hat{B}'_{do} = 1{,}64$ T $\qquad \hat{H}_{do} = 45 \quad \frac{\text{Av}}{\text{cm}}$
» $\hat{B}'_{dm} = 1{,}84$ T y $k_{im} = 1{,}54$, $\qquad \hat{H}_{dm} = 120$ »
» $\hat{B}'_{dM} = 2{,}10$ T y $k_{iM} = 1{,}72$, $\qquad \hat{H}_{dM} = 360$ »

de donde el valor medio de la intensidad máxima de campo en los dientes, [1.04.19 b],

$$\hat{H}_d = \frac{\hat{H}_{do} + 4\,\hat{H}_{dm} + \hat{H}_{dM}}{6} = \frac{45 + 4 \cdot 120 + 360}{6} = 148 \quad \frac{\text{Av}}{\text{cm}}$$

Este campo según la figura citada 1.04.18 d equivale a una inducción efectiva por término medio $\hat{B}_d = 1{,}86$ T (curva inferior).

Como la longitud de un diente es $h_i = 3{,}5$ cm, la excitación requerida por los mismos bajo cada polo asciende a, [1.04.19 a],

$$\hat{\theta}_d = \hat{H}_d\, h_i = 148 \cdot 3{,}5 = 517 \text{ Av/polo}$$

Si hubiéramos tomado como valor del campo medio el correspondiente a 1/3 de la altura del diente hubiéramos obtenido:

Diámetro a 1/3 de la altura $D_{1/3} = D - \frac{4}{3}\, h_i = 600 - \frac{4}{3}\, 35 = 553{,}3$ mm

Paso del diente a 1/3 de la altura $\tau_{1/3} = \frac{\pi\, D_{1/3}}{n} = \frac{\pi \cdot 553{,}3}{75} = 23{,}2$ mm

Grueso de » » 1/3 » » » $t_{1/3} = \tau_{1/3} - a = 23{,}2 - 12 = 11{,}2$ mm.

Inducción aparente a 1/3 de la altura

$$\hat{B}'_{1/3} = \frac{21{,}5}{t_{1/3}} = \frac{21{,}5}{11{,}2} = 1{,}92 \quad T$$

$$k_{1/3} = K_{Fe}\, \frac{\tau_{1/3}}{t_{1/3}} - 1 = 1{,}25 \cdot \frac{23{,}2}{11{,}2} - 1 = 1{,}59.$$

Para $\hat{B}'_d = 19{,}2$ kG y $k_i = 1{,}59$ las curvas de la misma figura 1.04.18 d utilizada anteriormente, nos dan $\hat{H}_i = 165\ \frac{\text{Av}}{\text{cm}}$ y

$$\hat{\theta}_d = 165 \times 3{,}5 = 593 \text{ Av/polo}$$

Este procedimiento simplificado proporciona valores no muy aproximados cuando las inducciones de los dientes son algo elevadas (compárese con los 517 Av obtenidos por el método más exacto de la fórmula de SIMPSON).

1.04.21. Excitación para la corona del inducido

Por esta corona circula todo el flujo efectivo del entrehierro $\hat{\Phi}_\delta$ y además el de dispersión de ranuras del inducido Φ_{or} concatenado únicamente con los conductores de este órgano de la máquina. Al mantenimiento del flujo total en dicha corona contribuyen a su vez la f.m.m. del sistema inductor y la del sistema inducido y, si no existiese el fenómeno de saturación, podría evaluarse independientemente la f.m.m. principal para la corona en cuestión contando únicamente con el flujo del entrehierro $\hat{\Phi}_\delta$. Como quiera que las inducciones en la mencionada corona no se eligen muy altas por razón misma

de las pérdidas en el hierro, bastante importantes en dicha zona, el error que se comete operando de este modo, es decir, calculando la excitación principal a base de suponer que el flujo en la corona del inducido es igual al flujo del entrehierro no es nunca considerable (si acaso, como coeficiente de seguridad se aumenta $\hat{\Phi}_\delta$ en un 2 a 5 %).

Tendremos, pues, designado por S_c la sección axial neta de dicha corona y dada la bifurcación que el flujo experimenta al llegar a ella

$$\boxed{\hat{B}_c = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{2\ S_c}} \quad \left(\frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}\right) \text{ o (T)} \qquad [1.04.21\text{ a}]$$

Si la máquina es de corriente continua el flujo efectivo del entrehierro por polo se deduce directamente de la fórmula [1.04.04 d]

$$\hat{\Phi}_\delta = \frac{E}{\left(\frac{p}{a}\right)\left(\frac{N}{60}\right) Z} \qquad \text{(Wb)}$$

y si es de alterna, [1.04.06 c, d y a],

$$\hat{\Phi}_\delta = K_f\ \hat{\underset{\sim}{\Phi}}_\delta \text{ (Wb), con } K_f = \frac{1{,}11}{k_f} \text{ y } \hat{\underset{\sim}{\Phi}}_\delta = \frac{m\ E}{2{,}22\ f\ Z\ \xi}$$

Cuanto a la sección neta S_c de la corona, siempre de chapa magnética, [1.04.17 j],

$$S_c = L_{Fe}\ h_c = \frac{L}{K_{Fe}}\ h_c = k_{Fe}\ L_h\ h_c = k_{Fe}\ (L - n_c \varepsilon_c)\ h_c. \text{ (m}^2\text{)} \qquad [1.04.21\text{ b}]$$

k_{Fe} suele valer, como hemos dicho, alrededor de 0,9.

L_{Fe} es la longitud neta de hierro derivada de la longitud bruta o geométrica de los paquetes de chapa L_h, en m; h_c es la altura radial de la corona, en m. K_{Fe}, según [1.04.17 j].

Hallada la inducción $\hat{B}_c$ las curvas de excitación de la chapa nos darán la intensidad de campo necesario $\hat{H}_c \left(\frac{\text{Av}}{\text{cm}}\right)$ y deduciremos la excitación por polo $\hat{\theta}_c$ que se requiere multiplicando el valor de $\hat{H}_c$ por la longitud media de la línea de fuera l_c en cm referida a un polo para la cual puede tomarse la mitad del arco polar en la circunferencia exterior de la corona (fig. 1.04.21 a).

$$\boxed{\hat{\theta}_c = \hat{H}_c\ l_c} \text{ (Av/polo)} \qquad [1.04.21\text{ c}]$$

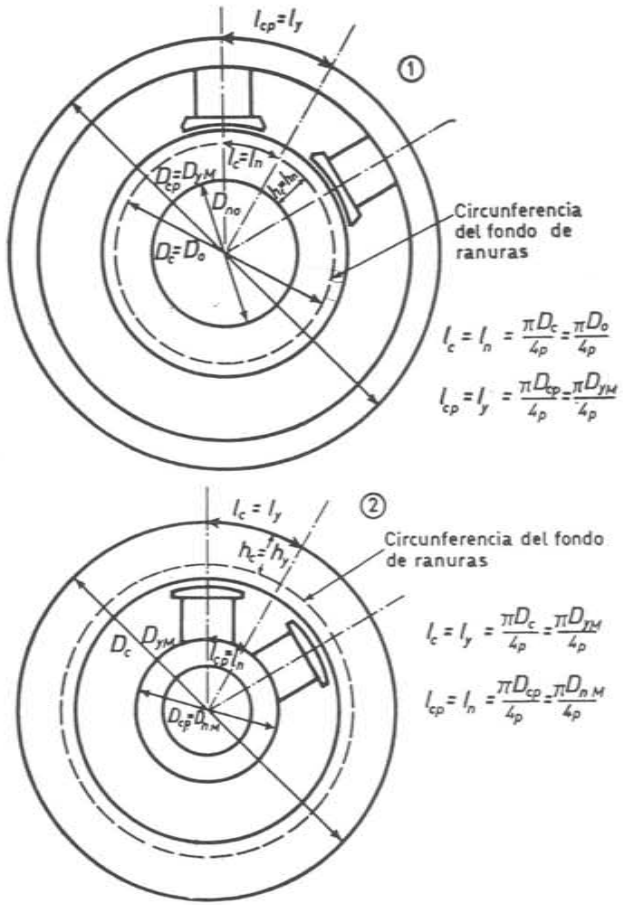


Fig. 1.04.21 a. Longitudes de corona inducida l_c y de corona polar l_{cp} en máquinas de inducido rotórico (1) y de inducido estatórico (2).

$$\boxed{l_c = \frac{\pi\ D_c}{4\ p}} \text{ (cm/polo)} \qquad [1.04.21\text{ d}]$$

En el caso de los motores asincrónicos, teniendo en cuenta el rápido decrecimiento de la inducción a partir del máximo de la onda, se suele tomar

$$\boxed{l_c = \frac{\pi\ D_c}{8\ p}} \left(\frac{\text{cm}}{\text{polo}}\right) \qquad [1.04.21\text{ e}]$$

También puede expresarse $\hat{B}_c$ directamente en función de las inducciones máximas ideales $\hat{B}_\delta$ o $\underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta$ y real $\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$ en el entrehierro.

De [1.04.08 b], [1.04.10 d] y [1.04.21 a y b], se tiene para las máquinas de continua

$$\hat{\Phi}_\delta = \psi\ \tau_p\ L\ \underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta = \psi\ \tau_p\ L\ \frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C} = 2\ S_c\ \hat{B}_c = 2\ \frac{L\ h_c}{K_{Fe}}\ \hat{B}_c$$

y con $\tau_p = \dfrac{\pi\ D}{2\ p}$, resulta

$$\boxed{\hat{B}_c = \left|\left(\frac{\psi\ K_{Fe}}{1{,}27}\right)\frac{D/p}{h_c}\right|\ \underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta = \left(\frac{\psi\ K_{Fe}}{1{,}27}\ \frac{D/p}{h_c}\right)\frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C}} \qquad [1.04.21\ f]$$

Para las máquinas de alterna cabe considerar una primera inducción en la corona, $\underset{\sim}{\hat{B}}_c$, teniendo en cuenta la onda senoidal de campo en el entrehierro capaz de inducir una f.e.m. del mismo valor eficaz E. Entonces $\underset{\sim}{B}_c$ puede relacionarse con la correlativa $\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$, de acuerdo con el párrafo 1.04.08 b, escribiendo

$$\hat{\Phi}_\delta = \tau_p\ L\ \frac{\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta}{1{,}57} = \frac{\pi\ D}{2\ p}\ L\ \frac{\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta}{1{,}57} = 2\ S_c\ \underset{\sim}{\hat{B}}_c = 2\ \frac{L\ h_c}{K_{Fe}}\ \underset{\sim}{\hat{B}}_c$$

de donde

$$\boxed{\underset{\sim}{\hat{B}}_c = \left(\frac{K_{Fe}}{2}\ \frac{D/p}{h_c}\right)\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta} \qquad [1.04.21\ g]$$

Cuanto a la inducción real en la corona, $\hat{B}_c$, bastará hacer sobre $\underset{\sim}{\hat{B}}_c$ la misma corrección K_f que se aplica al flujo senoidal $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$ para pasar al flujo efectivo $\hat{\Phi}_\delta$. Así,

$$\boxed{\hat{B}_c = \left(\frac{K_f\ K_{Fe}}{2}\ \frac{D/p}{h_c}\right)\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = \left(\frac{K_f\ K_{Fe}}{2}\ \frac{D/p}{h_c}\right)\frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C} = K_f\ \underset{\sim}{\hat{B}}_c} \qquad [1.04.21\ h]$$

Las ecuaciones [a] [f] [g] y [h] nos proporcionan distintos modos de hallar la inducción en la corona inducida de las máquinas de continua y de alterna según los datos de partida. Oportunamente haremos uso de unas y otras fórmulas.

La corona del inducido se presenta constructivamente unas veces como núcleo cilíndrico bajo los dientes (máquinas de continua y en general inducidos rotóricos) y otras como yugo exterior a los dientes (alternadores, y en general máquinas de inducido estatórico), por lo cual, según los casos, las magnitudes respectivas irán afectadas de los subíndices correspondientes n (núcleo) o y (yugo) en lugar de c (corona inducida).

1.04.22. Ejemplo

Calcular la excitación por polo en vacío, para la corona inducida (el núcleo) de la máquina de 345 kW, 500 V, 6 polos, 985 r/m, objeto de los ejemplos anteriores (párrafos 1.04.12 y 1.04.20).

Recordemos que las dimensiones del inducido eran

Diámetro exterior $D = 60$ cm

Longitud bruta de los paquetes de chapa $L_a = 32$ cm

Profundidad de la ranura $h_t = 3{,}5$ cm

Además, el diámetro interior del núcleo $D_{ne} = 27$ cm

Retengamos también de los cálculos precedentes,

Flujo máximo en el entrehierro $\hat{\Phi}_\delta = 0{,}0508$ Wb

De los datos anteriores resulta

Diámetro exterior de la corona del inducido

$$D_e = D - 2\ h_t = 60 - 2 \cdot 3{,}5 = 53 \text{ cm}$$

Altura radial de la misma (núcleo)

$$h_n = \frac{D_e - D_{ne}}{2} = \frac{53 - 27}{2} = 13 \text{ cm}$$

Sección neta de corona inducida (núcleo), [1.04.21 b],

$$S_n = k_{Fe}\ L_a\ h_n = 0{,}9 \cdot 32 \cdot 13 = 374 \text{ cm}^2 = 0{,}0374 \text{ m}^2$$

Inducción en la corona, [1.04.21 a],

$$\hat{B}_n = \frac{\hat{\Phi}_\delta}{2\ S_n} = \frac{0{,}0508}{2 \cdot 0{,}0374} = 0{,}68 \quad \text{T}$$

(Esta inducción es extraordinariamente baja como consecuencia del interés por aprovechar un determinado tipo de planchas existente).

Intensidad de campo necesaria $\hat{H}_n$ (fig. 1.04.18 d)

para $$\hat{B}_n = 6{,}8 \text{ kG} \quad , \quad \hat{H}_n = 2\ \frac{\text{Av}}{\text{cm}}$$

Longitud de la línea de fuerza, por polo, [1.04.21 d],

$$l_n = \frac{\pi\ D_e}{4\ p} = \frac{\pi \cdot 53}{4 \cdot 3} = 13{,}9 \text{ cm}$$

Excitación para la corona inducida [1.04.21 c]

$$\hat{\theta}_n = \hat{H}_n\ \ l_n = 2 \cdot 13{,}9 = 28 \text{ Av/polo}$$

prácticamente despreciable, en este caso.

1.04.23. Inducción en los polos

El flujo Φ_p que atraviesa la sección de un polo S_p está constituído por el flujo total efectivo del entrehierro $\hat{\Phi}_\delta$ y el flujo de dispersión polar Φ_{op} entre las expansiones y núcleos polares;

El flujo efectivo del entrehierro $\hat{\Phi}_\delta$ vale, [1.04.04 d], $\hat{\Phi}_\delta = \dfrac{E}{\left(\frac{p}{a}\right)\left(\frac{N}{60}\right)}$ (Wb) para máquinas de corriente continua y, [1.04.06 c, a y d], $\hat{\Phi}_\delta = K_f\,\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$ (Wb) siendo $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \dfrac{m\,E}{2{,}22 \cdot f\,Z\,\xi}$ (Wb) y $K_f = \dfrac{1{,}11}{k_f}$ para máquinas de alterna. K_f surge directamente de la fig. 1.04.06 a según el tipo constructivo de la máquina.

El flujo de dispersión polar, mostrado esquemáticamente de puntos en las figuras 1.04.01 a, 1) y 2), provoca una inducción variable a lo largo del polo y el calcular de un modo riguroso su influencia sobre cada estrato del núcleo polar constituiría un proceso laborioso que conviene evitar adoptando un valor medio adecuado de Φ_{op}. El flujo en el núcleo polar Φ_p se toma, así, igual a

$$\Phi_p = \hat{\Phi}_\delta + \Phi_{op} \quad \text{(Wb)} \qquad [1.04.23\ a]$$

y la inducción resultante, con la sección neta de este núcleo S_p en m²

$$B_p = \frac{\Phi_p}{S_p} \qquad \text{(T)} \qquad [1.04.23\ b]$$

Conocida B_p la curva de inducción normal para el material ferromagnético de los polos, nos proporciona el campo H_p requerido por esta inducción en $\dfrac{\text{Av}}{\text{cm}}$ por ejemplo, y si l_p es la longitud de un polo desde la raíz al entrehierro, fig. 1.04.23 a, podemos adoptar como valor de la excitación exigida por el núcleo polar

$$\theta_p = H_p\ l_p \qquad \text{(Av/polo)} \qquad [1.04.23\ c]$$

La relación entre el flujo por núcleo Φ_p así calculado y el flujo en el entrehierro $\hat{\Phi}_\delta$ se denomina «coeficiente de dispersión polar» σ_p

$$\sigma_p = \frac{\Phi_p}{\hat{\Phi}_\delta} = \frac{\hat{\Phi}_\delta + \Phi_{op}}{\hat{\Phi}_\delta} = 1 + \frac{\Phi_{op}}{\hat{\Phi}_\delta} \qquad [1.04.23\ d]$$

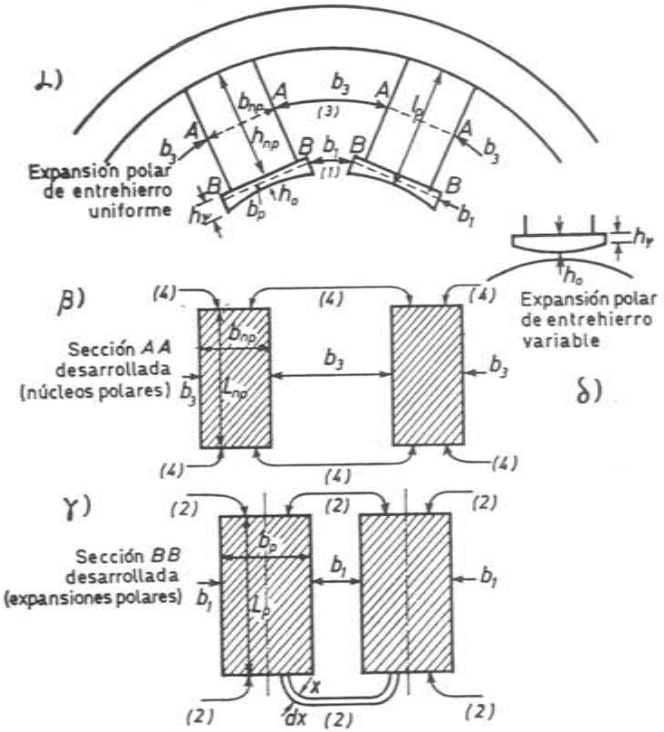


Fig. 1.04.23 a. Zonas de dispersión polar.

1. Entre caras internas de las expansiones polares
2. » » frontales de las expansiones polares
3. » » internas de los núcleos
4. » » frontales de los núcleos polares

La experimentación directa con máquinas construídas proporciona datos aproximados sobre σ_p válidos para nuevos proyectos, lo cual permite a veces prescindir del cálculo, siempre entretenido, del flujo de dispersión Φ_{op}. El coeficiente σ_p suele variar entre 1.1 y 1.25 siendo tanto más elevado cuanto mayor es el recubrimiento polar ψ y el número de polos de la máquina y superior para los sistemas de polos rotóricos.

Es posible también expresar la inducción polar directamente en función de las inducciones real $\hat{B}_\delta$ en el entrehierro o teóricas $\underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta$ y $\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$ según se trate de máquinas de continua o de alterna.

Para una máquina de continua, siendo L_{np} la longitud geométrica axial del núcleo polar, b_{np} su anchura y k_{Fe} el coeficiente de empilado,

$$\Phi_p = (k_{Fe}\ L_{np})\ b_{np}\ B_p = \sigma_p\ \hat{\Phi}_\delta = \sigma_p \cdot \psi\ \tau_p\ L\ \underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta = \sigma_p \cdot \psi\ \frac{\pi\ D}{2\ p} \cdot L\ \underset{\Omega}{\hat{B}}_\delta$$

de donde haciendo $$\boxed{K_p = \frac{L}{k_{Fe}\ L_{np}}} \qquad [1.04.23\ e]$$

$$\boxed{B_p = \frac{\sigma_p \cdot \psi\ K_p}{0{,}636}\ \frac{D/p}{b_{np}}\ \underset{\sim}{\hat{B}}_\Omega = \frac{\sigma_p\ \psi\ K_p}{0{,}636}\ \frac{D/p}{b_{np}}\ \frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C}} \qquad [1.04.23\ f]$$

B_p, $\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$ y $\hat{B}_\delta$ en las mismas unidades, así como D y b_{np}.

Para una máquina de alterna, generador o motor de polos salientes cabe operar provisionalmente con la inducción polar que correspondería al flujo inductor de distribución senoidal en el entrehierro, $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$, introduciendo paralelamente una inducción que representaremos por $\underset{\sim}{B}_p$ tal que

$$(k_{Fe}\ L_{np})\ b_{np}\ \underset{\sim}{B}_p = \sigma_p\ \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \sigma_p\ \tau_p\ L\ \frac{\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta}{1{,}57} = \sigma_p\ \frac{\pi\ D}{2\ p}\ L\ \frac{\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta}{1{,}57}$$

con lo cual

$$\boxed{\underset{\sim}{B}_p = \sigma_p\ K_p\ \frac{D/p}{b_{np}}\ \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = \sigma_p\ K_p\ \frac{D/p}{b_{np}}\ \frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C}} \qquad [1.04.23\ g]$$

La inducción real en los polos B_p se obtendrá multiplicando este valor $\underset{\sim}{B}_p$ por el factor de forma relativo K_f que servía para pasar de la onda senoidal de campo a la onda efectiva

$$\boxed{B_p = \sigma_p\ K_p\ K_f\ \frac{D/p}{b_{np}}\ \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = \sigma_p\ K_p\ K_f\ \frac{D/p}{b_{np}}\ \frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C}} \qquad [1.04.23\ h]$$

con las inducciones siempre en las mismas unidades, y otro tanto respecto a las longitudes y el diámetro.

1.04.24. Cálculo del flujo y del coeficiente de dispersión polares

Tomemos como referencia el caso de una máquina de polos exteriores, figura 1.04.23 a con las dimensiones representadas en dicha figura. Puesto que el flujo de dispersión transcurre a lo largo de amplios espacios de aire, despreciaremos la reluctancia de los trayectos ferromagnéticos por donde completa su circuito ya que la permeabilidad de estos últimos es de un orden mucho más elevado que la del aire. Distinguiremos cuatro zonas de dispersión polar identificadas por los subíndices 1 a 4 respectivamente, a saber:

dispersión longitudinal entre las expansiones polares (1)
» frontal » » » » (2)
» longitudinal » » caras polares (3)
» » » » » » (4)

a) *Zona* (1) *axial entre expansiones polares.* Sea $\mathcal{E}_{\sigma_p}$ (Gb) la f.m.m. que actúa sobre una línea de fuerza de la zona (1) y Λ_1 la permeancia de dicha zona en $\frac{M}{Gb}$. El flujo de dispersión entre dos de las superficies que se extienden axialmente vale

$$\Phi_{\sigma 1} = \mathcal{E}_{\sigma_p}\ \Lambda_1 \qquad (M)$$

y, por cada polo, el doble ya que la dispersión aparece en ambas caras de un mismo polo.

$$\Phi_{\sigma 1} = 2\ \mathcal{E}_{p\sigma}\ \Lambda_1 \qquad (M/polo)$$

Designando por θ_δ la excitación necesaria para el entrehierro, θ_d para los dientes y θ_c para la corona del inducido, en Av/polo; y por $\Delta\theta_I$ el suplemento de excitación también en Av/polo requerido para compensar la reacción de inducido, tendremos:

En vacío

$$\mathcal{E}_{\sigma_0} = \frac{4\ \pi}{10} \cdot 2\ (\theta_\delta + \theta_d + \theta_c) \qquad (Gb)$$

y a P.C.

$$\mathcal{E}_{\sigma_p} = \frac{4\ \pi}{10}\ [2\ (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_c + \Delta\theta_I)]. \qquad (Gb)$$

Designando en cualquier caso por θ_{σ_p} la suma de estas excitaciones por polo en Av, es decir, si hacemos

$$\boxed{\theta_{\sigma_p} = \hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_z + \hat{\theta}_c} \quad (Av/polo) \quad \text{en vacío y} \qquad [1.04.24\ a]$$

$$\boxed{\theta_{\sigma_p} = (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_c) + \Delta\theta_I} \quad (Av/polo), \text{ en carga.} \qquad [1.04.24\ b]$$

tendremos, con todas las dimensiones lineales en cm,

$$\Phi_{\sigma 1} = (2\ \frac{4\ \pi}{10}\ 2\ \theta_{\sigma_p}) \left(\frac{L_p\ h_\psi}{b_1}\right)$$

$$\Phi_{\sigma 1} = (5{,}024 \cdot \theta_{\sigma_0}) \left(\frac{L_p\ h_\psi}{b_1}\right) (M/polo). \qquad [1.04.24\ c]$$

b) *Zona* (2) *frontal entre expansiones polares.* La f.m.m. que actúa sobre estas líneas de fuerza es la misma $\mathcal{E}_{\sigma_0}$ que el caso anterior. La permeancia de la zona, supuesta una trayectoria geométrica simple formada de trazos rectilíneos terminados por arcos de circunferencia como se muestra en la figura 1.04.23 a,(γ) valdrá, para la mitad de la cara frontal de una expansión, admitido, por el momento, que la altura h_ψ de la misma fuera constante

$$\Lambda_2 = \int_0^{b_p/2} \frac{h_\psi\ dx}{b_1 + \pi\ x} = h_\psi\ \frac{1}{\pi} \left[\log\ (b_1 + \pi\ x)\right]_0^{b_p/2} =$$

$$= \frac{h_\psi}{\pi} \left[\log_e \left(b_1 + \pi\ \frac{b_p}{2}\right) - \log_e\ b_1\right] = \frac{h_\psi}{\pi}\ \log_e \left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_p}{b_1}\right) \qquad \left(\frac{M}{Gb}\right)$$

Lo que nos da *por polo* con 4 zonas de esta misma permeancia en paralelo,

$$\Phi_{\sigma 2} = \left(\frac{4\ \pi}{10} 2\ \theta_{\sigma p}\right)\left[4\ \frac{h_\varphi}{\pi}\ \log_e\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_p}{b_1}\right)\right]$$

$$= 7{,}36\ \theta_{\sigma p}\ h_\varphi\ \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_p}{b_1}\right) \quad \text{(M/polo)} \qquad [1.04.24\ \text{d}]$$

c) *Zona* (3) *entre las caras longitudinales de los núcleos polares.* La excitación para esta zona varía casi linealmente, desde la raíz hasta la cabeza del núcleo polar, entre los valores $2\ \theta_{\sigma p}$ y $2\ \theta_{\sigma p}$, (Av) respectivamente, siendo $\theta_{\sigma p}$ la excitación requerida por la mitad del arco o corona de respaldo entre ejes polares, es decir, la excitación para el yugo en las máquinas de polos estatóricos, en Av. El valor medio viene a ser

$$\frac{2\ \theta_{\sigma p} + 2\ \theta_{\sigma f}}{2} = \theta_{\sigma p} + \theta_{\sigma p} \qquad \text{(Av)}$$

Es admisible prácticamente simplificar esta expresión prescindiendo de la caída de tensión magnética en la corona polar y tomar como valor de la excitación media que actúa sobre la zona (3), simplemente, $\theta_{\sigma p}$, o sea, una f.m.m. de dispersión igual a

$$\left(\frac{4\ \pi}{10}\ \theta_{\sigma p}\right) \qquad \text{(Gb)}.$$

De la misma manera podemos admitir simplemente que la permeancia entre dos caras internas polares sea

$$\Lambda_3 = \frac{L_{n_1}\ h_{n_2}}{b_3} \qquad \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

tomando para b_3 la longitud del arco medio entre dichas superficies.

Por polo, se presentan dos de estas zonas en paralelo y por tanto

$$\Phi_{\sigma 3} = \frac{4\ \pi}{10}\ \theta_{\sigma p} \cdot 2\ \frac{L_{np}\ h_{np}}{b_3}$$

$$= 2{,}512\ \theta_{\sigma p}\ \frac{L_{np}\ h_{np}}{b_3} \quad \text{(M/polo)} \qquad [1.04.24\ \text{e}]$$

d) *Zona* (4) *entre las caras frontales de los núcleos polares* La f.m.m. es la misma que para la zona anterior es decir, que la excitación media efectiva sobre esta zona puede admitirse que vale $\theta_{\sigma p}$ Av. y la permeancia, como en el caso *b*), para cuatro zonas en paralelo,

$$4\ \Lambda_4 = 4 \cdot \frac{h_{np}}{\pi}\ \log_e\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_{np}}{b_3}\right),$$

de donde el flujo de dispersión *por polo*

$$\Phi_{\sigma 4} = \left(\frac{4\ \pi}{10}\ \theta_{\sigma p}\right)\left[4\ \frac{h_{np}}{\pi}\ \log_e\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_{np}}{b_3}\right)\right)$$

$$= 3{,}68\ \theta_{\sigma p}\ h_{n}\ \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_{np}}{b_3}\right) \quad \text{(M/polo)} \qquad [1.04.24\ \text{f}]$$

e) *Flujo y coeficiente de dispersión polares.* Sumando las expresiones de los flujos parciales de dispersión [c], [d], [e] y [f], tenemos para el flujo *disperso por polo*

$$\boxed{\Phi_{\sigma p}} = \theta_{\sigma p}\left[5{,}024\ \frac{L_p\ h_\varphi}{b_1} + 2{,}512\ \frac{L_{np}\ h_{np}}{b_3} + 7{,}36\ h_\varphi\ \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_p}{b_1}\right) + \right.$$

$$\left. + 3{,}68\ h_{np}\ \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_{np}}{b_3}\right)\right] = \boxed{\theta_{\sigma p}\ \Lambda_{\sigma p}} \quad \text{(M)/polo)} \qquad [1.04.24\ \text{g}]$$

Aquí, $\Lambda_{\sigma p}$ representa una cierta permeancia combinada de dispersión polar en maxwells por amperio-vuelta de excitación efectiva por polo $\theta_{\sigma p}$ que actúa sobre el circuito magnético disperso.

$$\boxed{\Lambda_{\sigma p} = 5{,}024\ \frac{L_p\ h_\varphi}{b_1} + 2{,}512\ \frac{L_{np}\ h_{np}}{b_3} + 7{,}36\ h_\varphi\ \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_p}{b_1}\right) + \boxed{+ 3{,}68\ h_{np}\ \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\ \frac{b_{np}}{b_3}\right)}} \quad \left(\frac{M}{\text{Av}}\right) \qquad [1.04.24\ \text{h}]$$

Cuando la expansión polar es abierta (figura 1.04.23 a *δ*) conviene poner en vez de h_φ

$$h_{\varphi\ eq} = \frac{2\ h_\varphi + h_o}{3} \qquad [1.04.24\ \text{i}]$$

Si los polos son interiores, valen las ecuaciones [g], [h], [a] y [b] sin más que sustituir en las dos últimas $\hat{\theta}_y$ en lugar de $\hat{\theta}_c$ y si son exteriores $\hat{\theta}_c$ se identifica con $\hat{\theta}_n$, es decir, considerar las excitaciones para la mitad de arco polar en el yugo o en el núcleo respectivamente ya que uno u otro elemento constituyen la zona que enlaza entonces el circuito magnético de los dientes.

Si la máquina va provista de polos de conmutación el cálculo del flujo disperso $\Phi_{\sigma p}$ o del coeficiente de dispersión polar $\sigma_{\sigma p}$ se efectúa exactamente de la misma manera descontando simplemente de los arcos b_1 y b_3 las anchuras respectivas de los polos de conmutación sobre estos arcos.

La dispersión polar depende de la excitación $\theta_{\sigma p}$, la cual a su vez es función de la carga de la máquina ya que las caídas de tensión y la reacción de inducido obligan a aumentar la corriente inductora para mantener la tensión en bornes de un generador; o a disminuirla, en el caso de un motor, si ha de conservarse la velocidad constante. En el estudio de las máquinas es conveniente a veces calcular la característica magnética en vacío con el coeficiente de dispersión en carga.

En este caso como en otras muchas etapas del cálculo de máquinas eléc-

tricas las magnitudes que se calculan influyen sobre los datos que han de servir para calcularlas y se hace por ello necesario admitir a priori un cierto valor de partida que habrá de ser comprobado más tarde rectificándolo si la discrepancia fuese exagerada. Este método de tanteos o aproximaciones sucesivas resulta, a veces, incluso más cómodo que la aplicación de ecuaciones directas excesivamente complicadas.

1.04.25. **Ejemplo**

Calcular la excitación en vacío para los polos de la máquina de corriente continua, 345 kW, 500 V, 985 r/m, 6 polos, estudiada en los párrafos 1.04.12, 1.04.20 y 1.04.22, a tensión nominal.

Retengamos las únicas cifras que nos interesan de los cálculos precedentes.

Flujo efectivo en el entrehierro por polo	$\hat{\Phi}_\delta = 0{,}0508$ Wb
Excitación para el entrehierro	$\hat{\theta}_\delta = 3\,630$ Av/polo
» » los dientes	$\hat{\theta}_d = 517$ »
» » el núcleo	$\hat{\theta}_n = 28$ »

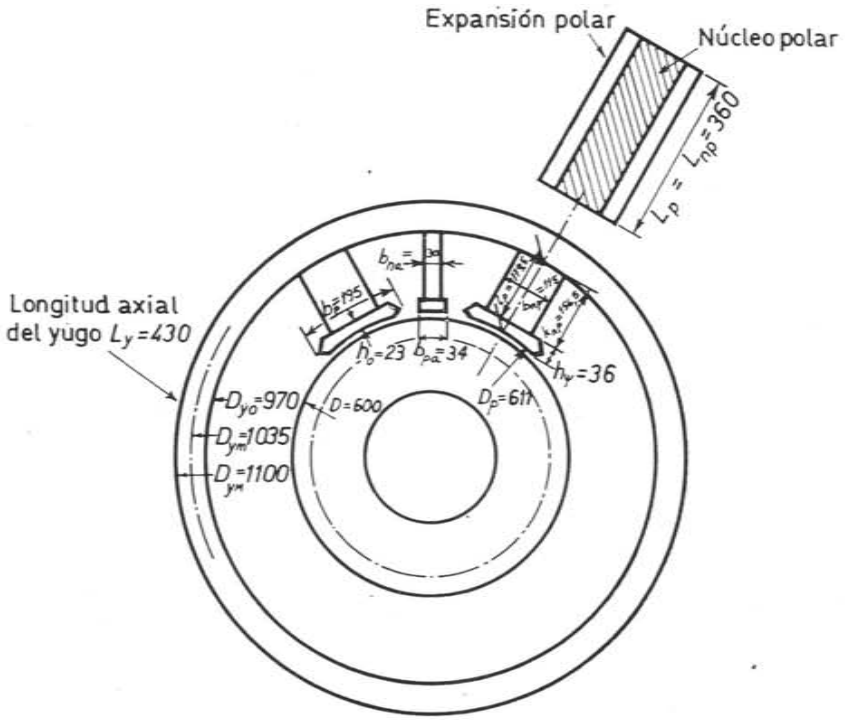


Fig. 1.04.25 a. Sistema polar de una dinamo de 345 kW, 500 V, 985 r/m, 6 polos, para el cálculo de la dispersión polar.

Las dimensiones del sistema polar se dan en la fig. 1.04.25 a y de ella vamos a deducir la permeancia de dispersión

Acabamos de hallar, [1.04.24 h],

$$\Lambda_{\sigma p} = 5{,}024\,\frac{L_p\,h_\psi}{b_1} + 2{,}512\,\frac{L_{np}\,h_{np}}{b_3} + 7{,}36\,h_\psi\,\log_{10}\left(1+\frac{\pi}{2}\,\frac{b_p}{b_1}\right) +$$

$$+ 3{,}68\,h_{np}\,\log_{10}\left(1+\frac{\pi}{2}\,\frac{b_{np}}{b_3}\right). \quad \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Av}}\right)$$

En lugar de h_ψ tomaremos, [1.04.24 *i*], $h_{\psi\,ef} = \dfrac{2\,h_\psi + h_o}{3}$.

Según la figura citada tendremos:
Longitud axial de la expansión polar $L_p = 36$ cm.
Altura equivalente de la expansión polar:

$$h_{\psi\,ef} = \frac{2\cdot 3{,}6 + 2{,}3}{3} = 3{,}17 \text{ cm.}$$

Longitud axial del núcleo polar $L_{np} = 36$ cm
Altura radial del núcleo polar $h_{np} = 15{,}65$ cm.
Longitud radial del polo $l_p = 17{,}95$ cm
Anchura tangencial de la expansión polar $b_p = 19{,}5$ cm
Anchura del núcleo polar $b_{np} = 11{,}5$ cm
Cuanto a los arcos b_1 y b_3, tendremos, descontando los gruesos del polo auxiliar,

$$b_1 = \frac{\pi\,(61{,}1 + 2{,}3)}{6} - 19{,}5 - 3{,}4 = 10{,}4 \text{ cm}$$

$$b_3 = \frac{\pi\,(61{,}1 + 2\cdot 2{,}3 + 15{,}65)}{6} - 11{,}5 - 3 = 28{,}1 \text{ cm}$$

Sustituyendo valores

$$\Lambda_{\sigma p} = 5{,}024\,\frac{36\cdot 3{,}17}{10{,}4} + 2{,}512\,\frac{36\cdot 15{,}65}{28{,}1} + 7{,}36\cdot 3{,}17\,\log_{10}\left(1+\frac{\pi}{2}\,\frac{19{,}5}{10{,}4}\right) +$$

$$+ 3{,}68\cdot 15{,}65\cdot\log_{10}\left(1+\frac{\pi}{2}\,\frac{11{,}5}{28{,}1}\right) = 55{,}1 + 50{,}4 + 13{,}9 + 12{,}4 = 131{,}8 \quad \left(\frac{\mathrm{Av}}{\mathrm{M}}\right)$$

Vemos que la contribución de los núcleos y la de las expansiones polares vienen a ser del mismo orden, y la de las caras axiales unas cuatro veces mayor que la de las caras frontales.

La excitación de dispersión polar $\theta_{\sigma p}$ vale en vacío, [1.04.24 a],

$$\theta_{\sigma p} = \hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_n = 3630 + 517 + 28 = 4175 \quad \text{Av/polo}$$

Si el flujo principal se hubiera calculado partiendo de la f.e.m. en carga y en la excitación por polo $\theta_{\delta p}$ se hubieran incluido los Av $\Delta\theta_I$ para compensar la reacción de inducido, el flujo que ahora deduciríamos sería también el de dispersión polar en carga y este mismo carácter tendría el coeficiente de dispersión polar.

Aplicando las ecuaciones [1.04.24 g] y [1.04.23 d],

$$\Phi_{\sigma p} = \theta_{\sigma p}\ \Lambda_{\sigma p} = 4\,175 \cdot 131{,}8 = 550\,000\ \text{M} = 0{,}0055 \quad \text{Wb}$$

$$\sigma_r = 1 + \frac{\Phi_{\sigma p}}{\hat{\Phi}_\delta} = 1 + \frac{0{,}0055}{0{,}0508} = 1{,}108$$

La dispersión incrementa en un 10,8 % por término medio el flujo en los polos de esta máquina. El flujo por polo será, pues, [1.04.23 a],

$$\Phi_p = \hat{\Phi}_\delta + \Phi_{\sigma p} = 0{,}0508 + 0{,}0055 = 0{,}0563 \quad \text{Wb.}$$

La sección de un polo de planchas de 1 mm de grueso a las cuales puede atribuirse un factor de empilado $k_{Fe} = 0{,}95$, vale

$$S_p = k_{Fe}\ b_{np}\ L_{np} = 0{,}95 \cdot 0{,}115 \cdot 0{,}36 = 0{,}0393\ \text{m}^2$$

La inducción, [1.04.23 b],

$$B_r = \frac{\Phi_p}{S_p} = \frac{0{,}0563}{0{,}0393} = 1{,}44 \quad \text{T}$$

La intensidad de campo necesaria, según la fig. 1.03.02 b curva (2),

$$H_p = 5\ \text{Av/cm}$$

y la excitación por polo [1.04.23 c]

$$\theta_p = H_p\ l_p = 5 \cdot 17{,}95 = 90\ \text{Av}$$

1.04.26. Excitación para la corona polar

A la corona polar puede atribuírsele también todo el suplemento de flujo de dispersión entre los polos. Si la máquina es de inductor ranurado (motores de inducción, turboalternadores) el flujo de dispersión de ranuras circula asimismo por la corona donde se asientan los dientes inductores, aunque, en general, puede omitirse esta corrección, o, cuando más, aumentar de un 2 a un 5 % el flujo del entrehierro $\hat{\Phi}_\delta$ para obtener el flujo en la corona. Adoptemos

$$\Phi_{cp} \approx \Phi_p = \hat{\Phi}_\delta + \Phi_{\sigma p}. \qquad \text{(Wb)} \qquad [1.04.26\ a]$$

La sección neta de dicha corona, maciza o de chapas, sea $S_{cp}\text{m}^2$. La inducción resulta, teniendo en cuenta la bifurcación del flujo polar en la corona

$$\boxed{B_{cp} = \frac{\Phi_{cp}}{2 \cdot S_{cp}}} \quad \text{(T)} \qquad [1.04.26\ b]$$

La intensidad de campo $H_{cp}\ \left(\frac{\text{Av}}{\text{cm}}\right)$ requerida por esta inducción surge

de la curva de magnetismo del material (raras veces, fundición; por lo general, acero fundido tipo dinamo, acero forjado o Siemens; en las máquinas de excitación por corriente alterna —motores asíncronos, por ejemplo—, chapa magnética).

La longitud media de la línea de fuerza por polo l_{cp} puede tomarse igual a la mitad del arco polar en la circunferencia exterior de la corona (fig. 1.04.21 a)

$$\boxed{l_{cp} = \frac{\pi\ D_{cp}}{4\ p}} \quad \text{(cm/polo)} \qquad [1.04.26\ c]$$

y la excitación necesaria para la corona en cuestión

$$\boxed{\theta_{cp} = H_{cp}\ l_{cp.}} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.04.26\ d]$$

La corona polar puede ser estatórica (máquinas de continua) o rotórica (máquinas sincrónicas). El subíndice general *cp* se cambiará, de acuerdo, por el de *y* (yugo) o *n* (núcleo).

De la misma manera que se hizo para la corona del inducido es también posible y a veces interesante expresar la inducción de la corona polar directamente en función de las inducciones máximas en el entrehierro, efectiva $\hat{B}_\delta$ o teóricas, $\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}$ para las máquinas de continua y $\underset{\sim}{\hat{B}_\delta}$ para las de alterna. En estas últimas cabe además introducir una inducción preliminar $\underset{\sim}{B_{cp}}$ en consonancia con el flujo $\underset{\sim}{\hat{\Phi}}$ de la onda senoidal de campo en el entrehierro, que produciría el mismo valor de la f.e.m. eficaz que la onda real de campo.

El proceso deductivo es idéntico al que se siguió al estudiar la inducción en la corona del inducido (párrafo 1.04.21) sin más que afectar ahora a las expresiones de B_{cp} del factor de dispersión polar σ_p.

Así, designando por K_{cp} la relación de longitudes

$$\boxed{K_{cp} = \frac{L}{k_{Fe}\ L_{cp}},} \qquad [1.04.26\ e]$$

donde L es la longitud geométrica del inducido, L_{cp} la longitud axial de la corona y k_{Fe} el coeficiente de empilado de la chapa en el caso de que dicha corona no sea maciza, y siendo h_{cp} la altura radial de la sección, tendremos, [1.04.21 *f*], para máquinas de corriente continua.

$$\boxed{B_{cp} = \left[\frac{\sigma_p\ \psi\ K_{cp}}{1{,}27}\ \frac{D/p}{h_{cp}}\right] \underset{\Omega}{\hat{B}} = \left[\frac{\sigma_p\ \psi\ K_{cp}}{1{,}27}\ \frac{D/p}{h_{cp}}\right] \frac{\hat{B}_\delta}{K_M\ K_L\ K_C}} \qquad [1.04.26\ f]$$

y para las de alterna, con la onda de distribución senoidal supuesta [1.04.21 g], una inducción teórica

$$\underline{B}_{cp} = \left[\frac{\sigma_p \; K_{cp}}{2} \; \frac{D/p}{h_{cp}} \right] \hat{\underline{B}}_\delta \qquad [1.04.26\ g]$$

y la efectiva, [1.04.21 h].

$$B_{cp} = \left[\frac{\sigma_p \; K_f \; K_{cp}}{2} \; \frac{D/p}{h_{cp}} \right] \hat{\underline{B}}_\delta = \left[\frac{\sigma_p \; K_f \; K_{cp}}{2} \; \frac{D/p}{h_{cp}} \; \middle| \; \frac{\hat{B}_\delta}{K_M \; K_L \; K_C} = K_f \; \underline{B}_{cp} \right]$$

[1.04.26 h]

Para inductores ranurados, $\sigma_p = 1... 1{,}05$; para las máquinas de corona polar maciza $k_{Fe} = 1$ y si por circunstancias especiales es de chapa de 1 mm, $k_{Fe} = 0{,}95$.

1,04.27 Ejemplo

Calcular la excitación por polo para el yugo de la máquina objeto de los ejemplos anteriores (1.04.12,20,22 y 25).

Las dimensiones del yugo de acero dinamo pueden verse en la fig. 1.04.25 a y son:

Diámetro exterior	D_{yM}	= 110 cm
» interior	D_{yo}	= 97 »
Longitud	L_y	= 43 cm

El flujo por polo Φ_p (párrafo 1.04.25) igual al flujo en el yugo Φ_y era de 0,0563 Wb Para la altura radial del yugo deduciremos

$$h_y = \frac{D_{yM} - D_{yo}}{2} = \frac{110 - 97}{2} = 6{,}5 \text{ cm}$$

y la sección (acero fundido tipo dinamo, macizo)

$$S_y = L_y \; h_y = 43 \cdot 6{,}5 = 280 \text{ cm}^2 = 0{,}028 \text{ m}^2$$

La inducción, pues, [1.04.26 b],

$$B_y = \frac{\Phi_y}{2 \cdot S_y} = \frac{0{,}0563}{2 \cdot 0{,}028} = 1{,}01 \quad \text{T}$$

La intensidad de campo (fig. 1.03.02 a, curva de acero dinamo)

$$H_y = 4 \text{ Av/cm}$$

La longitud media de la línea de fuerza en el yugo por polo, [1.04.26 c],

$$l_y = \frac{\pi \; D_{yM}}{4 \; p} = \frac{\pi \cdot 110}{4 \cdot 3} = 28{,}8 \text{ cm}$$

y, finalmente la excitación, [1.04.26 d],

$$\theta_y = H_y \; l_y = 4 \cdot 28{,}8 = 115 \text{ Av/polo.}$$

La conveniencia de obtener una respuesta rápida de esta máquina a las maniobras de regulación del voltaje ha forzado a adoptar unas inducciones más bien débiles en algunas partes del circuito ferromagnético.

1.04.28. Excitación total en vacío. Característica magnética

La suma de las excitaciones parciales calculadas como hemos ido viendo, nos da la excitación total por polo requerida por el circuito magnético para crear en él un cierto flujo inductor como conviene a la f.e.m. propuesta E. Según la ecuación [1.04.02 b], por bobina polar,

$$\theta_{\mu b} = \Sigma \; Hl \qquad \text{Av/polo}$$

Repitiendo el cálculo para distintos valores de E se puede formar una tabla que relacione al final ambas magnitudes, f.e.m. E (V) y excitación $\theta_{\mu b}$ (Av/polo), o lo que es equivalente: tensiones en bornes U_o y excitaciones en vacío $\theta_{\mu b}$. Representando gráficamente estos resultados en un sistema de coordenadas cartesianas se obtiene la llamada «característica magnética» de la máquina.

El cálculo de la tabla en cuestión se abrevia teniendo presente que las inducciones en el entrehierro y en la corona del inducido, así como las inducciones aparentes en los dientes varían linealmente con E. Las inducciones reales en estos últimos se apartan, sin embargo, en cierto margen de la simple proporcionalidad debido a la influencia que ejerce la saturación sobre la fracción del flujo principal derivado radialmente por las ranuras.

El flujo de dispersión polar tampoco es exactamente proporcional a la f.e.m. sino que aumenta con ritmo algo más acelerado porque la f.m.m. causante de la dispersión polar θ_{op} incluye la caída de tensión magnética en los dientes y corona del inducido, zonas donde se manifiestan sensiblemente los efectos de saturación. Por tanto, el flujo en los núcleos y en la corona polares aumenta también en mayor proporción que la f.e.m.

El ejemplo siguiente muestra el cálculo práctico de la característica magnética para el caso de una máquina de corriente continua.

1.04.29 Ejemplo

Calcular la característica magnética o en vacío de la dinamo de 345 kW, 500 V, 985 A, 6 polos estudiada en los párrafos anteriores, 1.04.11, 20, 22 y 25.

En la tabla 1.04.29 a se reúnen sistemáticamente los datos y dimensiones que se precisan para el cálculo, tal y como hemos venido utilizándolos en los ejemplos citados.

La tabla 1.04.29 *b* recoge el cálculo progresivo de la característica magnética en cuestión tomando seis valores distintos de la f.e.m.

Finalmente, la figura 1.04.29 a representa gráficamente esta característica.

TABLA 1.04.29 a. Datos para el cálculo de la característica magnética (curva de tensión en vacío) de una dinamo

$P = 345$ kW, $U = 500$ V, $I = \frac{P}{U} = \frac{345}{0,5} = 690$A, N = 985 r/m $2p = 6$ polos, $2a = 6$ vías

1	$D = 60$ cm	25	$t_M = \tau_M - a = 2,51 - 1,2 = 1,31$ cm
2	$L = 36$ »	26	$t_m = \tau_m - a = 2,365 - 1,2 = 1,165$ cm
3	$n = 75$ ranuras	27	$t_o = \tau_o - a = 2,22 - 1,2 = 1,02$ cm
4	$Z_n = 8$ cond./ran.	28	$L_h = L - n_c \varepsilon_c = 36 - 4 \cdot 1 = 32$ cm [1.04.17d]
5	$Z = n\, Z_n = 75 \cdot 8 = 600$ conduct.	29	$L_{Fe} = k_{Fe} L_h = 0,9 \cdot 32 = 28,8$ cm [»]
6	$\tau_p = \frac{\pi D}{2p} = \frac{\pi \cdot 60}{6} = 31,4$ cm	30	$K_{Fe} = \frac{L}{L_{Fe}} = \frac{36}{28,8} = 1,25$ [1.04.17 j]
7	$\psi = 0,62$		
8	$b_p = \psi \tau_p = 0,62 \cdot 31,4 = 19,5$ cm. [1.04.06e]	31	$k_{tM} = K_{Fe} \frac{\tau_M}{t_M} - 1 =$ [1.04.17 n]
9	$\delta = 0,55$ cm	32	$k_{tM} = K_{Fe} \frac{\tau_m}{t_m} - 1 = 1,25 \frac{2,365}{1,165} - 1 = 1,54$ [1.04.17 n]
10	$K_M = \frac{b_a}{b_p + 2\delta} = \frac{19,5}{19,5 + 2 \cdot 0,55} = 0,974$ [1.04.08 d]	33	$k_{to} = K_{Fe} \frac{\tau_o}{t_o} - 1 = 1,25 \frac{2,22}{1,02} - 1 = 1,72$ [1.04.17 n]
11	$n_c = 4$ canales rad.	34	$D_{nM} = D - 2 h_t = 60 - 2 \cdot 3,5 = 53$ cm
12	$\varepsilon_c = 1$ cm	35	$D_{no} = 27$ cm
13	$\varepsilon_\delta = 0,26$ cm (fig. 1.04.09 b(2)	36	$h_n = \frac{D_{nM} - D_{no}}{2} = \frac{53 - 27}{2} = 13$ cm
14	$L_\delta = L - n_c \varepsilon_\delta = 36 - 4 \cdot 0,26 = 34,96$ cm [1.04.09 a]	37	$S_n = L_{Fe} h_n = 0,288 \cdot 0,13 = 0,0374$ m² [1.04.21 b]
15	$K_L = \frac{L}{L_\delta} = \frac{36}{34,76} = 1,03$ [1.04.09 c]	38	$l_n = \frac{\pi D_o}{4p} = \frac{\pi \cdot 53}{4 \cdot 3} = 13,9$ cm/polo [1.04.21 d]
16	$\tau_\delta = \frac{\pi D}{n} = \frac{\pi \cdot 60}{75} = 2,51$ cm	39	$L_p = 36$ cm
17	$a_\delta = 1,2$ cm	40	$h_\psi = 3,6$ cm
18	$K_C = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta - \frac{(a_\delta/\delta)^2}{5 + (a_\delta/\delta)}\delta} = \frac{2,51}{2,51 - \frac{(1,2/0,55)^2}{5 + (1,2/0,55)} 0,55} = 1,17$ [1.04.10b]	41	$h_o = 2,3$ cm
		42	$h_{\psi\, eq} = \frac{2 h_\psi + h_o}{3} = \frac{2 \cdot 3,6 + 2,3}{3} = 3,17$ cm (1.04.24 i)
		43	$L_{np} = 36$ cm
19	$h_t = 3,5$ cm	44	$b_{np} = 11,5$ cm
20	$D_M = D = 36$ cm	45	$h_{np} = 15,65$ cm
21	$\tau_M = \frac{\pi D_M}{n} = \frac{\pi \cdot 60}{75} = 2,51$ cm	46	$b_{ps} = 3,4$ cm
22	$\tau_m = \frac{\pi (D - h_t)}{n} = \frac{\pi (60 - 3,5)}{75} = 2,365$ cm	47	$b_{ns} = 3,0$ cm
23	$\tau_o = \frac{\pi (D - 2 h_t)}{n} = \frac{\pi (60 - 2 \cdot 3,5)}{75} = 2,22$ cm	48	$b_1 = \frac{\pi (D + 2\delta + h_o)}{2p} - b_p - b_{ps} = \frac{\pi (60 + 2 \cdot 0,55 + 2,3)}{6} - 19,5 - 3,4 = 10,4$ cm
24	$a = 1,2$ cm		

49	$b_3 = \frac{\pi (D + 2\delta + 2 h_o + h_{np})}{2p} - b_{np} - b_{np} = \frac{\pi (60 + 2 \cdot 0,55 + 2 \cdot 2,3 + 15,65)}{6} - 11,5 - 3 = 28,1$ cm	51	$k_{Fe} = 0,95$ para los polos
		52	$S_p = k_{Fe} L_{np} b_{np} = 0,95 \cdot 0,36 \cdot 0,115 = 0,0393$ m²
		53	$l_p = h_o + h_{np} = 2,3 + 15,65 = 17,95$ cm
50	$\Lambda_{\sigma_p} = 5,024 \frac{L_p h_\psi \varepsilon_7}{b_1} + 2,512 \frac{L_{np} h_{np}}{b_3} + 7,36\, h_{\psi\, eq} \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{b_p}{b_1}\right) + 3,68\, h_{np} \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{b_{np}}{b_3}\right)$, [1.04.24 h] $= 5,024 \frac{36 \cdot 3,17}{10,4} + 2,512 \frac{36 \cdot 15,65}{28,1} + 7,36 \cdot 3,17 \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{19,5}{10,4}\right) + 3,68 \cdot 15,6 \log_{10}\left(1 + \frac{\pi}{2}\frac{11,5}{28,1}\right) = 55,1 + 50,4 + 13,9 + 12,4 = 131,8 \frac{M}{Av}$ [1.04.24 h]	54	$D_{yM} = 110$ cm
		55	$D_{yo} = 97$ »
		56	$L_y = 43$ »
		57	$h_y = \frac{D_{yM} - D_{yo}}{2} = \frac{110 - 97}{2} = 6,5$ cm
		58	$S_y = L_y h_y = 0,43 \cdot 0,065 = 0,028$ m²
		59	$l_y = \frac{\pi D_{yM}}{4p} = \frac{\pi \cdot 110}{12} = 28,8$ cm/polo [1.04.26 c]

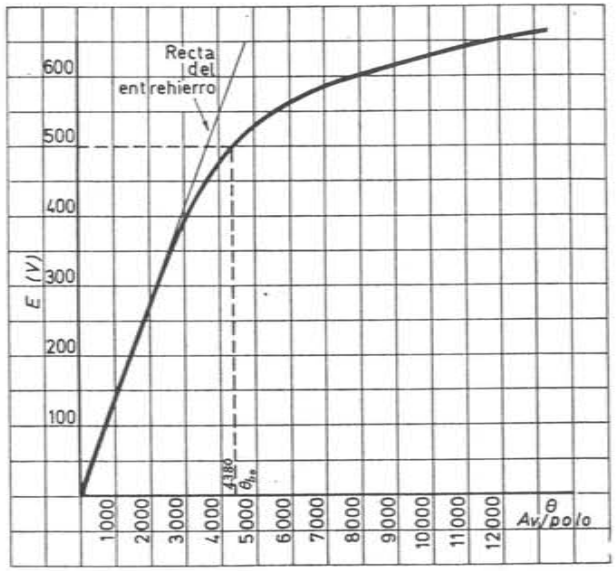


Fig. 1.04.29 a. Característica magnética en vacío de una dinamo de 345 kW, 500 V, 985 r/m, 6 polos.

TABLA 1.04.29 b. Característica magnética en vacío de una dinamo de 345 kW, 500 V, 985 r/m

1)	E	V	Referencia	400	450	500	550	600	650
2)	$\hat{\Phi}_\delta = \dfrac{E}{\frac{P}{a}\frac{N}{60}Z}$	Wb	[1.04.04 d]	0,0406	0,0456	0,0508	0,0558	0,0609	0,0660
3)	$\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta} = \dfrac{\hat{\Phi}_\delta}{\psi \tau_p L}$	T	[1.04.08 b]	0,578	0,65	0,723	0,795	0,868	0,940
4)	$\hat{B}_\delta = K_M K_L K_C \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}$	»	[1.04.10 d]	0,66	0,742	0,825	0,906	0,99	1,072
5)	$\hat{B}'_{dM} = K_{Fe}(K_M \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}) \dfrac{\tau_\delta}{t_o}$	»	[1.04.17 f]	1,68	1,89	2,1	2,31	2,52	2,73
6)	$\hat{B}'_{dm} = K_{Fe}(K_M \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}) \dfrac{\tau_\delta}{t_m}$	»	[»]	1,47	1,655	1,84	2,02	2,21	2,39
7)	$\hat{B}'_{do} = K_{Fe}(K_M \underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}) \dfrac{\tau_\delta}{t_M}$	»	[»]	1,31	1,475	1,64	1,805	1,97	2,13
8)	$\hat{B}_{dM}$ (para $k_{tM} = -$)	»	(fig. 1.04.18 e)						
9)	$\hat{B}_{dm}$ (» $k_{tm} = 1{,}54$)	»	(»)						
10)	$\hat{B}_{do}$ (» $k_{to} = 1{,}72$)	»	(»)						
11)	$\hat{B}_n = \dfrac{\hat{\Phi}_\delta}{2\, S_n}$	»	[1.04.21 a]	0,533	0,600	0,680	0,734	0,80	0,866
12)	$\hat{H}_\delta = 0{,}8\, \hat{B}_\delta$ (con B_δ en G)	Av/cm	[1.04.02 c]	5280	5940	6600	7260	7910	8570
13)	$\hat{H}_{dM}$ (según $\hat{B}_{dM}$ o $\hat{B}'_{dM}$)	»	(fig. 1.04.18 d)	55	145	360	700	1110	1600
14)	$\hat{H}_{dm}$ (» $\hat{B}_{dm}$ o $\hat{B}'_{dm}$)	»	(»)	15	46	120	280	550	870
15)	$\hat{H}_{do}$ (» $\hat{B}_{do}$ o $\hat{B}'_{do}$)	»	(»)	7	15	45	103	210	430
16)	$\hat{H}_d = \dfrac{\hat{H}_{dM} + 4\,\hat{H}_{dm} + \hat{H}_{do}}{6}$	»	(1.04.19 b]	20	57	148	320	587	980
17)	$\hat{H}_n$ (según $\hat{B}_n$)	»	fig. 1.04.18 d	2	2	2	3	3	3
18)	$\hat{\theta}_\delta = \hat{H}_\delta\, \delta$	Av	[1.04.11 a]	2900	3270	3630	3990	4360	4715
19)	$\hat{\theta}_d = \hat{H}_d\, h_t$	»	[1.04.19 a]	70	200	517	1120	2055	3220
20)	$\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d$	»		2970	3470	4147	5110	6415	7935
21)	$\hat{\theta}_n = \hat{H}_n\, l_n$	»	[1.04.21 c]	28	28	28	42	42	42
22)	$\theta_{\sigma_p} = (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d) + \hat{\theta}_n$	»	[1.04.24 a]	2998	3498	4175	5152	6457	7977
23)	$\Phi_{\sigma_p} = \theta_{\sigma_p}\, \Lambda_{\sigma_p}$	Wb	[1.04.24 g]	0,00395	0,00461	0,00550	0,00680	0,00850	0,0105
24)	$\Phi_p = \hat{\Phi}_\delta + \Phi_{\sigma_p} = \Phi_y$	»	[1.04.23 a]	0,0446	0,0502	0,0563	0,0626	0,0694	0,0765
25)	$\sigma_p = \dfrac{\Phi_p}{\hat{\Phi}_\delta}$	—	[1.04.23 d]	1,10	1,10	1,108	1,124	1,14	1,16
26)	$B_p = \dfrac{\Phi_p}{S_p}$	T	[1.04.23 b]	1,14	1,28	1,44	1,60	1,77	1,95
27)	$B_y = \dfrac{\Phi_y}{2 \cdot S_y}$	»	[1.04.26 b]	0,80	0,90	1,01	1,12	1,25	1,37
28)	H_p = (según B_p)	Av/cm	(fig. 1.03.02b(2)	3	4	6	19	68	180
29)	H_y = (» B_y) (Acero dinamo)	»	(fig. 1.03.02 a)	4	4	4	5	7	10
30)	$\theta_p = H_p\, l_p$	Av	[1.04.23 c]	54	72	90	340	1220	3230
31)	$\theta_y = H_y\, l_y$	»	[1.04.26 d]	115	115	115	144	202	288
32)	$\theta_{\mu b} = (\hat{\theta}_d + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_n + \theta_p + \theta_y)$	»	[1.04.02 b]	3167	3685	4380	5636	7879	11495

1.05 INTRODUCCIÓN AL ESTUDIO DE LAS REACTANCIAS DE DISPERSIÓN

1.05.01. Generalidades

Los diversos aspectos funcionales con que el flujo, o partes de él, intervienen en el comportamiento de las máquinas eléctricas, (influencias que el cálculo de estas últimas obliga a traducir en cifras concretas, sin que baste el análisis cualitativo de los fenómenos), plantea problemas de difícil solución cuando se intenta, por razones de orden y uniformidad de criterio, seguir un método exclusivo en el tratamiento de todos aquellos flujos a lo largo de los varios circuitos magnéticos de la máquina.

Son dos los conceptos, uno desde el punto de vista del servicio, y otro de tipo constructivo, los que justifican el establecer distinciones que, en términos estrictos, pueden calificarse de arbitrarias, pero que contribuyen, sin embargo, en gran manera a hacer posible el estudio numérico de ciertos fenómenos. Si se renunciase a esta discriminación resultaría muy difícil, y en algunos casos imposible, la solución matemática del problema.

Dichos conceptos son, por un lado, el carácter principalmente «activo» o «útil» de algunos de estos flujos y el carácter dominantemente «pasivo», y, en ocasiones perjudicial, de otros flujos de la máquina. De aquí surge una primera clasificación, seguida de un tratamiento para el flujo llamado «principal», «útil» o «común», y otro distinto para los flujos denominados de «dispersión». E, incluso, estos últimos reciben a su vez una consideración diferente según sus efectos sean nada más que aditivos sobre el flujo principal, provocando fenómenos accesorios de saturación en determinadas zonas del circuito magnético de la máquina (caso de los flujos de dispersión polar), o bien participen en la generación de la f.e.m. total a manera de reactancias en serie (inducidos de corriente alterna), aunque no intervengan en el proceso de transformación de la energía.

El otro criterio que contribuye a la separación analítica de los flujos, proviene de la naturaleza física de los circuitos magnéticos donde se asientan unos y otros: para el flujo útil o principal el recorrido es preferentemente ferromagnético con el inconveniente de su permeabilidad variable e incierta; para los flujos de dispersión, los trayectos discurren sobre todo por el aire, de permeabilidad constante y definida.

Así se llega en conjunto, a la distinción esencial entre *flujo común y flujos de dispersión*. El primero, como su nombre indica, está concatenado con los devanados primarios y secundarios de la máquina, transcurre sobre el hierro y sirve de vehículo transmisor de la energía entre los varios circuitos eléctricos principales. Los segundos, los de dispersión, se caracterizan por hallarse concatenados sólo con los arrollamientos primarios o secundarios sin intervenir directamente en la transmisión de la energía entre unos y otros, y su recorrido principal es a través del aire.

El estudio de la dispersión, sobre todo en las máquinas de corriente alterna, requiere algunas precisiones adicionales sobre estos conceptos.

1.05.02. Interpretación de las ecuaciones del circuito eléctrico

Veamos cómo se traduce en términos matemáticos este distinto tratamiento de los flujos. Consideremos para ello varios ejemplos de otros tantos circuitos eléctricos empezando por el más sencillo de una simple bobina o devanado conectada a una red de corriente alterna.

a) *Circuito autoinductivo simple*, fig. 1.05.02 a. Para el devanado en cuestión de N espiras y resistencia R, (Ω), conectado a una línea de tensión alterna instantánea u, (V), que hace circular por el arrollamiento una corriente instantánea i, (A), la cual, a su vez, crea un flujo alterno Φ, (Wb), íntegramente concatenado con las N espiras, la segunda ley de KIRCHHOFF nos proporciona esta ecuación:

$$u - N\frac{d\Phi}{dt} = Ri \text{ (V)} \qquad [1.05.02\text{ a}]$$

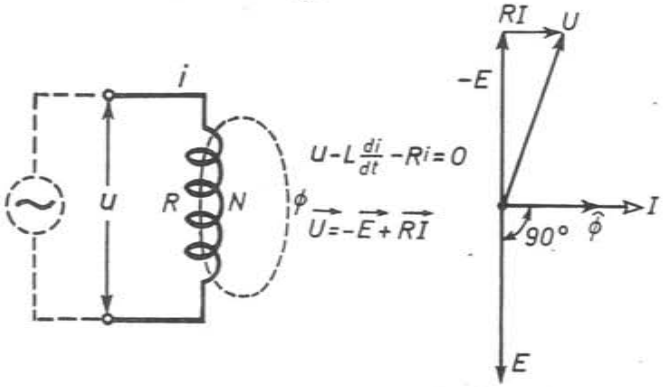


Fig. 1.05.02 a. Circuito autoinductivo.

La presencia de los signos más o menos implica una convención sobre los sentidos positivos de las tensiones, corrientes y flujos y sólo de acuerdo con ella es válida la ecuación anterior escrita de tal manera: Sobre las espiras de la bobina se elige como *positivo* un sentido de giro determinado, cualquiera, de los dos posibles; las *corrientes serán positivas* cuando circulan en el sentido elegido; las *tensiones son positivas* si tienden a hacer circular corrientes en sentido positivo y *los flujos se consideran positivos* cuando se dirigen en el sentido del flujo creado por una corriente positiva (sentido de avance axial de un tornillo normal al girar la cabeza en el sentido positivo de la corriente); las resistencias son equiparables siempre a un elemento pasivo que se opone al paso de la corriente.

En efecto: cuando la tensión instantánea aplicada es $+u$ (positiva) la f.e.m. de a.i., $e = -N\frac{d\Phi}{dt}$ será negativa si la corriente i y el flujo Φ son crecientes; y, por el contrario, será positiva si la corriente y el flujo asociado se hallan en período decreciente (ley de oposición o de LENZ); cuanto a la caída de tensión Ri considerada como f.e.m., es decir, trasladada al primer miembro de la ecuación [a] es siempre de signo contrario al de i, es decir, se trata de una «contratensión».

El circuito anterior, fig. 1.05.02 a, corresponde al esquema de un motor o de un transformador funcionando en vacío; u es la tensión de línea, i la corriente de vacío y Φ el flujo principal sin carga; la f.e.m.

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt},$$

que difiere muy poco en valor numérico de la tensión en bornes, u, la conservaremos con su símbolo e, dependiente directamente del flujo sin introducir en este caso el parámetro de la inductancia L, frecuente, en cambio, en el estudio general de los circuitos eléctricos. De todos modos, si interesase en cualquier momento poner de manifiesto esta inductancia principal, variable con μ, basta tener en cuenta que L en henrios no es más que la variación del número de concatenaciones espiras-weber por unidad (amperio) de variación de corriente

$$L = N\frac{d\Phi}{di} \text{ (H)} \qquad [1.06.02\text{ b}]$$

En tal caso,

$$e = -N\frac{d\Phi}{dt} = -N\frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

con lo cual [a] toma la forma

$$u - L\frac{di}{dt} = Ri \qquad [1.05.02\text{ c}]$$

Cuando se trate del flujo principal, preferiremos, para el estudio de las máquinas y transformadores partir, como hemos dicho, de la ecuación en su forma original

$$u - N\frac{d\Phi}{dt} = Ri$$

prescindiendo del c.d.a.i. L cuya inconstancia resulta perturbadora.

Si las magnitudes son senoidales esta ecuación se traduce para los valores eficaces [1] en

$$\vec{U} + \vec{E} = R\vec{I} \qquad [1.05.02\text{ d}]$$

o

$$\vec{U} = -\vec{E} + R\vec{I}$$

y el diagrama vectorial correspondiente es el que aparece a la derecha en la misma figura 1.05.02 a.

I es la corriente absorbida por el circuito, (en A), valor eficaz, y $\hat{\Phi}$ el flujo creado por la misma, (en Wb), valor máximo.

$E = 4.44\, f\, (N\xi)\, \hat{\Phi}$, la f.e.m. eficaz engendrada en la bobina, (en V), retrasada de 90° respecto al flujo y a la corriente que circula por ella.

f = frecuencia de la corriente (en Hz)

ξ = factor de bobinado

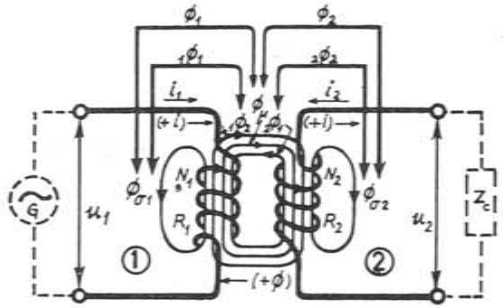
N = número de espiras en serie, de las bobinas.

$-E$ = Tensión a aplicar (en V) para vencer la f.e.m. E, igual y opuesta a esta última, adelantada, pues, de 90° respecto a I.

(1) Hecha abstracción del carácter escalar de dichos valores eficaces que, tanto en la ecuación como en el diagrama, pueden considerarse implícitamente como representativos de las amplitudes rotatorias, únicas magnitudes dirigidas.

RI = Tensión, en fase con I, a aplicar para vencer la caída en la resistencia óhmica; igual y opuesta a la contratensión ($-RI$) no mostrada en la figura, (en V).

b) *Circuitos magnéticamente acoplados.* Sea un circuito como el de la fig. 1.05.02 b supuesto conectado por el primario a una red de corriente alterna o generador G de tensión instantánea u_1, y el secundario cerrado sobre una impedancia de carga Z_c. En consecuencia, por los circuitos respectivos circularán corrientes instantáneas i_1 e i_2 siendo posible diferenciar, al menos por vía de análisis, los siguientes flujos:



$$u_1 - {}_1L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 = 0; \qquad -M\frac{di_1}{dt} - {}_2L_2\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0$$

$$u_1 - \left({}_1L_2\frac{di_1}{dt} + L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt}\right) - M\frac{di_2}{dt} - R\,i_1 = 0; \; -M\frac{di_1}{dt} - \left({}_2L_1\frac{di_2}{dt} + L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt}\right) - R_2 i_2 - u_2 = 0$$

Fig. 1.05.02 b. Circuitos acoplados por un flujo de inducción mútua Φ_μ.

1.º El flujo alterno ${}_1\Phi_1$ creado por la f.e.m. ($N_1 i_1$) de las N_1 espiras del circuito (1) recorridas por la corriente i_1. Parte de este flujo ${}_1\Phi_1$, precisamente la fracción que designamos por ${}_1\Phi_2$, irá a concatenarse con las N_2 espiras secundarias, y el resto, $\Phi_{\sigma 1}$, que no alcanza a dichas espiras quedará como simple flujo de dispersión primaria.

$$ {}_1\Phi_1 = {}_1\Phi_2 + \Phi_{\sigma 1} $$

2.º Bajo la acción del flujo inductor ${}_1\Phi_2$ procedente del primario se engendra en el secundario una f.e.m. e_2 generadora de la corriente i_2 en este circuito, la cual a su vez circulando por las N_2 espiras crea una f.m.m. ($N_2 i_2$) y un flujo ${}_2\Phi_2$ que puede descomponerse en dos: uno ${}_2\Phi_1$, de reacción sobre el primario, alcanza a las N_1 espiras y tiende a anular el flujo inductor ${}_1\Phi_2$, y otro, $\Phi_{\sigma 2}$ concatenado sólo con las N_2 espiras, llamado por este motivo flujo de dispersión secundaria.

$$ {}_2\Phi_2 = {}_2\Phi_1 + \Phi_{\sigma 2} $$

3.º La presencia de los dos flujos ${}_1\Phi_2$ y ${}_2\Phi_1$ en el mismo circuito del núcleo común a ambos devanados, da origen a un flujo resultante Φ_μ. En cada momento

$$ \Phi_\mu = {}_1\Phi_2 + {}_2\Phi_1 $$

siendo este flujo Φ_μ el único que tiene existencia efectiva en dicho circuito; ${}_1\Phi_2$ y ${}_2\Phi_1$ son meras hipótesis lógicas que no pueden ser puestas de manifiesto aisladamente.

4.º En consecuencia el flujo Φ_1 realmente concatenado con el primario pasa a ser

$$ \Phi_1 = \Phi_\mu + \Phi_{\sigma 1} $$

suma del flujo común y el de dispersión primaria: lo mismo que, para el secundario, el flujo real abrazado por las N_2 espiras se convierte en

$$ \Phi_2 = \Phi_\mu + \Phi_{\sigma 2} $$

resultante del mismo flujo común Φ_μ y del de dispersión $\Phi_{\sigma 2}$ de este otro circuito.

En la fig. 1.05.02 c se muestran ya únicamente Φ_μ, $\Phi_{\sigma 1}$, $\Phi_{\sigma 2}$, Φ_1 y Φ_2

Asociados con cada uno de los flujos enumerados pueden imaginarse unas f.e.m. en los arrollamientos afectados por los mismos y plantearse dos sistemas distintos de ecuaciones, idénticos en el fondo, pero no igualmente adecuados para el estudio de las máquinas eléctricas. Veamos cuál nos convendrá adoptar y la expresión más útil de estas varias f.e.m.

Si partimos de los flujos hipotéticos ${}_1\Phi_1$ y ${}_2\Phi_2$ (fig. 1.05.02 b) como suele hacerse en el estudio general de los circuitos eléctricos, la segunda ley de KIRCHHOFF aplicada sucesivamente al primario y al secundario nos conduce a las siguientes ecuaciones.

$$\left.\begin{aligned} u_1 - N_1\frac{d_1\Phi_1}{dt} - N_1\frac{d_2\Phi_1}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ -N_2\frac{d_1\Phi_2}{dt} - N_2\frac{d_2\Phi_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ e]$$

Acudiendo a la primera descomposición de flujos ${}_1\Phi_1 = {}_1\Phi_2 + \Phi_{\sigma 1}$, ${}_2\Phi_2 = {}_2\Phi_1 + \Phi_{\sigma 2}$, tendremos este otro sistema

$$\left.\begin{aligned} u_1 - N_1\frac{d_1\Phi_2}{dt} - N_1\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{dt} - N_1\frac{d_2\Phi_1}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ -N_2\frac{d_1\Phi_2}{dt} - N_2\frac{d_2\Phi_1}{dt} - N_2\frac{d\Phi_{\sigma 2}}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ f]$$

Si utilizamos, por último, la reagrupación antes justificada, ${}_1\Phi_2 + {}_2\Phi_1 = \Phi_\mu$, llegamos al tercer sistema

$$\left.\begin{aligned} u_1 - N_1\frac{d\Phi_\mu}{dt} - N_1\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ -N_2\frac{d\Phi_\mu}{dt} - N_2\frac{d\Phi_{\sigma 2}}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ g]$$

de acuerdo con los varios criterios posibles sobre la integración de los flujos.

Si adoptásemos el sistema [e], podríamos crear una primera serie de parámetros característicos del circuito magnético que obedezca a las siguientes condiciones, meras transformaciones matemáticas de dicho sistema; haciendo, en general, $\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt}$,

$$\left.\begin{aligned} u_1 - \left(N_1\frac{d_1\Phi_1}{di_1}\right)\frac{di_1}{dt} - \left(N_1\frac{d_2\Phi_1}{di_2}\right)\frac{di_2}{dt} - R_1 i = 0 \\ -\left(N_2\frac{d_1\Phi_2}{di_1}\right)\frac{di_1}{dt} - \left(N_2\frac{d_2\Phi_2}{di_2}\right)\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Tales parámetros serían

$${}_1L_1 = N_1 \frac{d_1\Phi_1}{di_1} = \text{coeficiente de autoinducción o inductancia propia del circuito 1}$$

$${}_2M_1 = N_1 \frac{d_2\Phi_1}{di_2} = \text{coeficiente de inducción o inductancia mutua del circuito 2 sobre el 1}$$

$${}_1M_2 = N_2 \frac{d_1\Phi_2}{di_1} = \text{coeficiente de autoinducción o inductancia mutua del circuito 1 sobre el 2}$$

$${}_2L_2 = N_2 \frac{d_2\Phi_2}{di_2} = \text{coeficiente de autoinducción o inductancia propia del circuito 2}$$

con la particularidad de resultar además idénticas las inductancias mutuas ${}_1M_2 = {}_2M_1 = M$(1) lo cual convierte a las ecuaciones anteriores en

$$\left.\begin{aligned} u_1 - {}_1L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ - M\frac{di_1}{dt} - {}_2L_1\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ h]$$

Sin embargo ninguna de las inductancias citadas ${}_1L_1$ ${}_2L_2$ propias de cada arrollamiento, o el coeficiente de inducción mutua M, familiares, por ejemplo, en la técnica de la alta frecuencia, resulta de fácil cálculo en las máquinas eléctricas, por lo cual hay que desechar, desde ahora, tales expresiones matemáticas como instrumento de trabajo.

Vayamos al segundo sistema [f]; unas transformaciones similares $\left(\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi}{di}\frac{di}{dt}\right)$ nos llevarían a escribirlo de esta forma

$$\left.\begin{aligned} u_1 - \left(N_1\frac{d_1\Phi_2}{di_1}\right)\frac{di_1}{dt} - \left(N_1\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{di_1}\right)\frac{di_1}{dt} - \left(N_1\frac{d_2\Phi_1}{di_2}\right)\frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ - \left(N_2\frac{d_1\Phi_2}{di_1}\right)\frac{di_1}{dt} - \left(N_2\frac{d_2\Phi_1}{di_2}\right)\frac{di_2}{dt} - \left(N_2\frac{d\Phi_{\sigma 2}}{di_2}\right)\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

o bien introduciendo los parámetros adecuados de inductancias

$$\left.\begin{aligned} u_1 - {}_1L_2\frac{di_1}{dt} - L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ - M\frac{di_1}{dt} - {}_2L_1\frac{di_2}{dt} - L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ i]$$

(1) En efecto: designado por Λ_μ la permeancia del circuito magnético común donde se establece el flujo Φ_μ,

$${}_1M_2 = N_2\frac{d_1\Phi_2}{di_1}\ ;\ \text{pero}\ {}_1\Phi_2 = (N_1 i_1)\Lambda_\mu\ ,\ \frac{d_1\Phi_2}{di_1} = N_1\Lambda_\mu\ \text{y}\ {}_1M_2 = N_2N_1\Lambda_\mu$$

$${}_2M_1 = N_1\frac{d_2\Phi_1}{di_2}\ ;\ \text{pero}\ {}_2\Phi_1 = (N_2 i_2)\Lambda_\mu\ ,\ \frac{d_2\Phi_1}{di_2} = N_2\Lambda_\mu\ \text{y}\ {}_2M_1 = N_2N_1\Lambda_\mu$$

$$\text{luego,}\ {}_1M_2 = {}_2M_1 = N_2\frac{d_1\Phi_2}{di_1} = N_1\frac{d_2\Phi_1}{di_2} \qquad [1.05.02.\alpha]$$

donde se ha significado esta otra serie distinta de parámetros:

$${}_1L_2 = N_1\frac{d_1\Phi_2}{di_1} = \text{inductancia del arrollamiento 1 debida al flujo que lanza sobre la bobina 2}$$

$$L_{\sigma 1} = N_1\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{di_1} = \text{inductancia del mismo arrollamiento debida al flujo propio de dispersión}$$

$$\left.\begin{aligned} M = N_1\frac{d_2\Phi_1}{di_2} = \text{inductancia del bobinado 2 sobre el 1} \\ M = N_2\frac{d_1\Phi_2}{di_1} = \text{inductancia del bobinado 1 sobre el 2} \end{aligned}\right\} \text{idénticas entre sí (Ver nota de pie de página última).}$$

$${}_2L_1 = N_2\frac{d_2\Phi_1}{dt} = \text{inductancia del arrollamiento 2 debida al flujo que lanza sobre la bobina 1}$$

$$L_{\sigma 2} = N_2\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{dt} = \text{inductancia del mismo arrollamiento debida a su propio flujo de dispersión.}$$

${}_1L_2$ y ${}_2L_1$ = constituyen parte de las inductancias anteriores ${}_1L_1$ y ${}_2L_2$ de las cuales se diferencian tan sólo por las componentes $L_{\sigma 1}$ y $L_{\sigma 2}$ debidas al flujo de dispersión.

$L_{\sigma 1}$ y $L_{\sigma 2}$ = tienen el significado de inductancias particulares debidas, en cada arrollamiento, exclusivamente al flujo respectivo de dispersión.

De entre todos estos coeficientes, el de inducción mutua M ya hemos dicho que resulta inadecuado para el cálculo de las máquinas eléctricas y aún son más inconvenientes los dos segundos ${}_1L_2$ y ${}_2L_1$ relacionados con unos flujos hipotéticos no identificables prácticamente. Resulta más apropiado operar directamente con las f.e.m. respectivas. Sólo los dos últimos, $L_{\sigma 1}$ y $L_{\sigma 2}$, inductancias asociadas con los flujos de dispersión interesan para el cálculo de máquinas pero ligados entonces a otras magnitudes que se derivan precisamente del sistema [g].

Tomando, por último este sistema, cabe también transformarlo, exactamente igual que se hizo con los anteriores, en el sistema equivalente

$$\left.\begin{aligned} u_1 - \left(N_1\frac{d\Phi_\mu}{di_{\mu 1}}\right)\frac{di_{\mu 1}}{dt} - \left(N_2\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{di_1}\right)\frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ - \left(N_2\frac{d\Phi_\mu}{di_{\mu 1}}\right)\frac{di_{\mu 2}}{dt} - \left(N_2\frac{d\Phi_{\sigma 2}}{di_2}\right)\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - \mu_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ j]$$

donde $i_{\mu 1}$ e $i_{\mu 2}$ representan las «corrientes primaria y secundaria de excitación», es decir, unas corrientes tales que

$$N_1\, i_{\mu 1} = N_1 i_1 - N_2 i_2 = N_2 i_{\mu 2}$$

$(N_1 i_{\mu 1})$ podrá considerarse también como la excitación resultante de las f.m.m, primaria y secundaria para mantener el flujo común Φ_μ en el circuito magnético, y en el caso particular de ser $i_2 = 0$, $(N_1 i_{\mu 1})$ es la excitación primaria *en vacío o a circuito secundario abierto*. Como la reluctancia $\mathcal{R}_\mu$ del circuito magnético común no es nula (o la

permeancia Λ_μ infinita) la corriente magnetizante $i_{\mu 1}$ tiene una existencia real que puede medirse haciendo funcionar la máquina o transformador en vacío una vez descontadas las escasas pérdidas presentes en dichas condiciones. De todos modos $i_{\mu 1}$ acostumbra ser una fracción no muy grande de i_1.

La expresión

$$N_1 \frac{d\Phi_\mu}{di_{\mu 1}} = L_{\mu 1}$$

puede asimilarse a un coeficiente de autoinducción primario debido al flujo común Φ_μ lo mismo que cabe representar por

$$L_{\mu 2} = N_2 \frac{d\Phi_\mu}{di_{\mu 2}}$$

una cierta inductancia secundaria debida al mismo flujo. Reaparecen además en el sistema último las expresiones

$$N_1 \frac{d\Phi_{\sigma 1}}{di_1} = L_{\sigma 1}$$

y *y*

$$N_2 \frac{d\Phi_{\sigma 2}}{di_2} = L_{\sigma 2}$$

como «inductancias de dispersión» de uno y otro bobinado debidas exclusivamente a los flujos de esta naturaleza

En tal caso, los sistemas de ecuaciones [g] o [j] se convierten fácilmente en este otro

$$\left.\begin{aligned} u_1 - L_{\mu 1}\frac{di_{\mu 1}}{dt} - L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ - L_{\mu 2}\frac{di_{\mu 2}}{dt} - L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.02\ k]$$

Aunque alguna vez en la teoría de los circuitos equivalentes pueda ser interesante hacer intervenir los parámetros variables $L_{\mu 1}$ o $L_{\mu 2}$ del circuito magnético principal o común, no es, sin embargo, lo más normal el acudir a ellos para el cálculo de las máquinas. Los términos en que intervienen conviene dejarlos en su expresión original transcribiéndolos como en [g] por

$$-N_1\frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad \text{y} \quad -N_2\frac{d\Phi_\mu}{dt},$$

o traducidos directamente en las f.e.m. de las cuales constituyen su expresión natural

$$e_1 = -N_1\frac{d\Phi_\mu}{dt} \quad \text{y} \quad e_2 = -N_2\frac{d\Phi_\mu}{dt}$$

He aquí, pues, la forma preferida de las ecuaciones correspondientes a ambos circuitos, primario y secundario, tal como se introducen en el cálculo de las máquinas eléctricas de corriente alterna y de los transformadores

$$\left.\begin{aligned} u_1 + e_1 - L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 = 0 \\ e_2 - L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0 \end{aligned}\right| \qquad [1.05.02\ h]$$

fórmulas simples por las cuales se renuncia a poner de manifiesto los coeficientes de inducción mutua M, los de autoinducción, totales ${}_1L_1$ y ${}_2L_2$ y los debidos a los flujos de enlace compensados entre sí, ${}_1L_2$ y y ${}_2L_1$.

La intervención indirecta de los parámetros inductivos de esta clase se reduce a la de las inductancias $L_{\sigma 1}$ $L_{\sigma 2}$ provocadas por los flujos de dispersión. Las restantes magnitudes son tensiones en bornes u_1 y u_2, f.e.m. e_1 y e_2 engendradas por el flujo común Φ_μ y caídas de resistencia óhmica $(-R_1 i_1)$ y $(-R_2 i_2)$, valores todos ellos de clara existencia y significado físico.

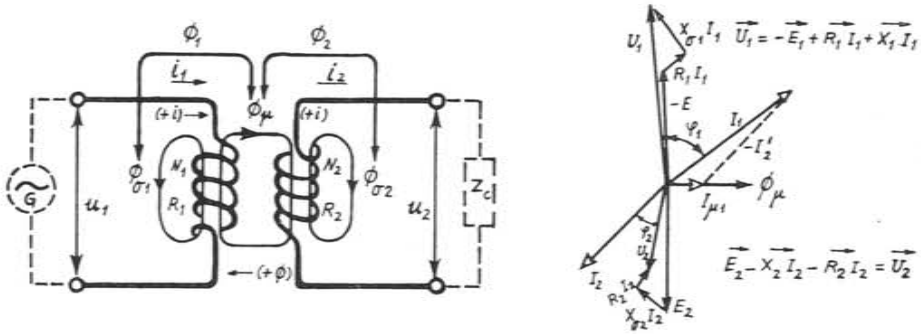


Fig. 1.05.02 c. Circuitos magnéticamente acoplados. Flujos resultantes y diagrama vectorial de los mismos, de las corrientes y de las tensiones.

$$u_1 + e_1 - L_{\sigma 1}\frac{di_1}{dt} - R_1 i_1 = 0 \qquad e_2 - L_{\sigma 2}\frac{di_2}{dt} - R_2 i_2 - u_2 = 0$$

Si estas magnitudes son de variación senoidal, el sistema [h] queda representado vectorialmente por las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \vec{U}_1 = -\vec{E}_1 + \overline{X_{\sigma 1}}\,\vec{I}_1 + \overline{R_1}\vec{I}_1 \\ \vec{E}_2 - \overline{X_{\sigma 1}}\,\vec{I}_2 - \overline{R_2}\vec{I}_2 = \vec{U}_2 \end{aligned}\right| \qquad [1.05.02\ i]$$

cuyo diagrama geométrico complementado con el flujo y la corriente magnetizante aparece en la fig. 1.05.02 c, y cuyas magnitudes tienen el significado, expresión analítica y fases que se indican a continuación

$\vec{\Phi}_\mu$ = flujo común tomado como origen de fases, en Wb

$\vec{I}_{\mu 1}$ = corriente magnetizante primaria en A. La f.m.m. de esta corriente es la necesaria para crear el flujo $\vec{\Phi}_\mu$ en el circuito común de permeancia Λ_μ. Va en fase con $\vec{\Phi}_\mu$

$\vec{E}_2$ = F.e.m. inducida por el flujo común en el devanado secundario retrasada de $\frac{\pi}{2}$ respecto a $\vec{\Phi}_\mu$

$$E_2 = 4{,}44\, f\, (N_2 \xi_2) \Phi_\mu \text{ (V) con } \Phi \text{ en Wb y } f \text{ en Hz}$$

$\vec{I}_2$ = Corriente de carga secundaria en A supuesta retrasada con respecto a la f.e.m.

$-\overrightarrow{X_{\sigma 2} I_2}$ = F.e.m. o caída de reactancia en V en la bobina secundaria, debida al flujo de dispersión $\vec{\Phi}_{\sigma 2}$. En retraso de $\frac{\pi}{2}$ respecto a la corriente del secundario. El valor de esta reactancia es

$$\vec{X}_{\sigma 2} = (j) 2\pi f L_{\sigma 2} \ (\Omega) \text{ con } L_{\sigma 2} \text{ en H y } f \text{ en Hz}$$

$-\overrightarrow{R_2 I_2}$ = Caída óhmica de tensión en la bobina secundaria, de fase opuesta a la de la corriente $\vec{I}_2$, en V

$\vec{U}_2$ = Tensión en los bornes del secundario

$$\vec{U}_2 = \vec{E}_2 - \overrightarrow{X_{\mu 2} I_2} - \overrightarrow{R_2 I_2} \qquad \text{(V)}$$

$-\vec{E}_1$ = Tensión necesaria para vencer la f.e.m. primaria igual y opuesta a $\vec{E}_1$. Como $\vec{E}_1$ retrasa de $\frac{\pi}{2}$ respecto al flujo inductor común $\vec{\Phi}_{\mu 1}$, $(-\vec{E}_1)$ adelanta del mismo ángulo respecto a dicho flujo

$$E_1 = 4{,}44 f\, (N_1 \xi_1)\, \Phi_\mu \text{ (V) con } \Phi_\mu \text{ en Wb y } f \text{ en Hz}$$

$-\vec{I}'_2$ = Corriente primaria en A necesaria para vencer la f.m.m. de la corriente de carga secundaria $\vec{I}_2$, capaz de crear en el devanado primario una excitación $(-N_1 I'_2)$ igual y opuesta a la $(N_2 I_2)$ del secundario.

$$I_2' = I_2 \frac{N_2}{N_1}$$

$\vec{I}_1$ = Corriente primaria. La resultante de I_1 e $\vec{I}_2'$ es precisamente la corriente magnetizante $I_{\mu 1}$

$$\vec{I}_{\mu 1} = \vec{I}_2' + \vec{I}_1 \quad \text{o} \quad \vec{I}_1 = \vec{I}_\mu - \vec{I}_2' \quad \text{(A)}$$

(Si volviésemos a la consideración de los flujos hipotéticos ${}_1\Phi_2$ y ${}_2\Phi_1$ a que antes hacíamos referencia, la excitación $(N_2 I_2)$ actuando sobre el circuito magnético común de permeancia Λ_μ sería el origen de ${}_2\vec{\Phi}_1$ en fase con $\vec{I}_2$ de la misma manera que $(N_1 I_1)$ actuando sobre dicho circuito magnético daría origen a ${}_1\vec{\Phi}_2$ en fase con $\vec{I}_1$. La composición geométrica de los vectores de ambos flujos en ausencia de saturación, conduciría al vector de flujo resultante $\vec{\Phi}_\mu$. Con circuitos magnéticos saturados no es válida la composición vectorial de los flujos, pero, sí, la de las f.m.m.)

$\overrightarrow{R_1 I_1}$ = Tensión necesaria en V para vencer la caída de resistencia óhmica primaria, en fase con I_1

$\overrightarrow{X_{\sigma 1} I_1}$ = Tensión necesaria en V para vencer la caída de reactancia en el devanado primario. Como la f.e.m. de autoinducción retrasa de 90° respecto a $\vec{I}_1$, la tensión para contrarrestarla deberá adelantar de 90° sobre la misma corriente.
Además

$$\overrightarrow{X_{\sigma 1}} = (j) 2\, \pi\, f\, L_{\sigma 1} \ (\Omega) \text{ con } L_{\sigma 1} \text{ en H y } f \text{ en Hz}$$

$\vec{U}_1$ = Tensión de línea

$$\vec{U}_1 = -\vec{E}_1 + \overrightarrow{X_{\sigma 1} I_1} + \overrightarrow{R_1 I_1} \quad \text{(V)}$$

1.05.03. Expresión general del coeficiente de autoinducción L

La relación que liga la inductancia L con la f.e.m. de autoinducción es

$$E = XI = \omega L I = 2\pi f L I \qquad \text{(V)} \qquad [1.05.03\ a]$$

(X en Ω, ω en rad/s, f en Hz, L en H, I en A)

ya que, según la definición de L

$$e = -L \frac{di}{dt}$$

y si la corriente es senoidal de amplitud $\hat{I}$

$$i = \hat{I} \text{ sen } \omega t,$$

$$-\frac{di}{dt} = -\omega\, \hat{I} \cos \omega t,$$

$$e = -(L\, \omega \hat{I}) \cos \omega t,$$

con una amplitud

$$\hat{E} = \omega L \hat{I}$$

y en valores eficaces

$$E = \omega L I \text{ (V)}$$

La inductancia L es una característica geométrica y de naturaleza del circuito electromagnético ligada a la permeancia Λ del mismo y al número de espiras N de la bobina creadora del flujo.

Por definición, cuando todo el flujo Φ se concatena con las N espiras,

$$L = N \frac{d\Phi}{di} = \frac{d\psi}{di} \text{ (H)}$$

(Φ en Wb, i en A, ψ en Weber-espiras).

L representa la variación del número de concatenaciones espiras-flujo $\psi = N\Phi$ por unidad de variación de la corriente inductora. Si el circuito es de permeabilidad constante (por ejemplo: aire de permeabilidad relativa $\mu = 1$), también puede escribirse en las mismas unidades

$$L = \frac{N\Phi}{I} \text{ (H)} \qquad [1.05.03\text{ b}]$$

La misma expresión en términos finitos es válida como definición de la inductancia media si la permeabilidad magnética varía con la corriente.

Distinguiremos los siguientes casos:

1.05.04. **Inductancia de un circuito electromagnético de concatenación concentrada** (bobina laminar)

El flujo Φ se halla concatenado íntegramente con todas las espiras N como correspondería a una bobina de grueso radial infinitamente pequeño (fig. 1.05.04 a). Entonces, *a permeancia constante* y en unidades M.K.S.

$$\boxed{L = N^2\Lambda \text{ (H)}} \qquad [1.05.04\text{ a}]$$

expresando la permeancia Λ en el sistema GIORGI; para un circuito prismático fundamental de sección S (m²) longitud l (m) y permeabilidad $\mu_0\mu$ $\frac{T}{\text{Av/cm}}$, (para el aire es $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$)

$$\Lambda = \mu_0\mu \frac{S}{l} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right). \qquad [1.05.04\text{ b}]$$

En el sistema C.G.S.

$$\boxed{L = 4\pi \cdot 10^{-9} N^2\Lambda} \text{ (H)} \qquad [1.05.04\text{ c}]$$

con

$$\Lambda = \mu \frac{S}{l} \left(\frac{M}{\text{Gb}}\right)$$

(S en cm², l en cm, μ en $\frac{\text{G}}{\text{Oe}}$; para el aire, $\mu = 1$)

En efecto: para cualquier valor instantáneo de Φ y de i

$$L = N \frac{\Phi}{i} \text{ (H) con } \Phi \text{ en Wb e } i \text{ en A}$$

pero

$$\Phi = (Ni)\Lambda \text{ (Wb) con } \Lambda \text{ en } \frac{\text{M}}{\text{Av}}$$

luego

$$L = N \frac{(Ni)\Lambda}{i} = N^2 \Lambda \text{ (H).}$$

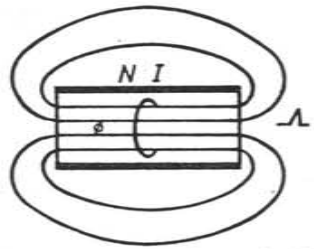


Fig. 1.05.04 a. Inductancia de una bobina laminar.

En el sistema C.G.S.,

$$L = N \frac{\Phi}{i} 10^{-8} \text{ (H) con } \Phi \text{ en M e } i \text{ en A}$$

$$\Phi = \frac{4\pi}{10} N\, i\, \Lambda \text{ (M) con } \Lambda \text{ en } \frac{\text{M}}{\text{Gb}}$$

de donde

$$L = N \frac{\frac{4\pi}{10} NiA}{i} 10^{-8} = 4\pi \cdot 10^{-9} N^2 \Lambda \text{ (H)}$$

Si la permeabilidad es variable en corriente alterna, resulta que aunque la onda de f.e.m. fuese senoidal —como resultado, por ejemplo, de aplicar a cualquier bobina de escaso consumo (primario de un transformador en vacío)— una tensión senoidal, la onda de corriente no lo sería. Puede, no obstante, definirse un c.d.a.i. equivalente L_{eq} (H) tal que

$$E = 2\pi f L_{eq} I_\mu \text{ (V)} \qquad L_{eq} = \frac{E}{2\pi f I_\mu} \text{ (H)} \qquad [1.05.04\text{ d}]$$

con E(V) e $I\mu$ (A) en valores eficaces, cualesquiera que sean las formas de onda. $I\mu$ es entonces la «corriente magnetizante» (aproximadamente la corriente de vacío).

1.05.05. Ejemplo

Al primario en estrella de un transformador trifásico de 1 000 kVA, 15 kV, 50 Hz se le aplica la tensión nominal y absorbe en vacío una corriente eficaz del 1,4 % de la corriente de P.C. Calcular la inductancia equivalente del circuito magnético principal.

La corriente de línea del transformador en cuestión vale

$$I = \frac{1000}{\sqrt{3} \cdot 15} = 385 \text{ A}$$

la corriente magnetizante

$$I_\mu = \frac{1{,}4}{100} 385 = 5{,}4 \text{ A}$$

ambas por fase.

De la fórmula [1.05.04 d],

$$L_{eq} = \frac{E}{2\pi f \cdot I_\mu} = \frac{15000/\sqrt{3}}{2\pi \cdot 50 \cdot 5{,}4} = 51 \text{ H por fase.}$$

1.05.06. Inductancia en un circuito electromagnético de concatenación progresiva

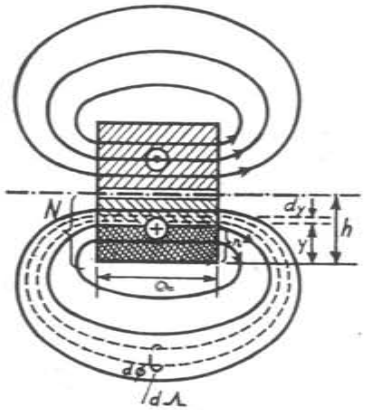


Fig. 1.05.06 a. Inductancia en el caso de concatenaciones progresivas.

El flujo se halla concatenado progresivamente con un número creciente de espiras. Correspondería al caso de una bobina de cierto espesor radial h sin espacio libre en el eje (fig. 1.05.06 a)

Cada línea de fuerza abraza un número distinto de espiras, desde cero para las líneas que se inician en la superficie exterior de la bobina, hasta el total de las N espiras abrazadas por las líneas que pasan por el eje.

La expresión general del c.d.a.i. de la bobina en un instante determinado, cuando la corriente es i, sería

$$L = \frac{\int_0^\Psi d\psi}{i} = \frac{\int_0^\Phi n \, d\Phi}{i} \quad \text{(H)}$$

(Φ en Wb, i en A)

n es el número de espiras concatenadas con el tubo cerrado elemental de flujo $d\Phi$ establecido en el espacio anular de permeancia infinitesimal $d\Lambda$ (1); i es la corriente que al circular por las espiras da origen al campo magnético.

(1) En este caso, $d\Phi$ no expresa una variación *temporal* del flujo sino la cuantía del mismo contenido en un anillo espacial de grueso radial infinitamente pequeño.

Como

$$d\Phi = (ni)d\Lambda \qquad \text{(Wb) con } \Lambda \text{ en } \frac{\text{Wb}}{\text{Av}},$$

resulta

$$\boxed{L} = \frac{\int_0^\Lambda n^2 i \; d\Lambda}{i} = \boxed{\int_0^\Lambda n^2 d\Lambda} \quad \text{(H)} \qquad [1.05.06 \text{ a}]$$

Si referimos la inductancia al número total de espiras N de la bobina haciendo, [1.05.04 a],

$$L = N^2 \Lambda$$

resulta para Λ_L, permeancia equivalente,

$$\boxed{\Lambda_L = \frac{\int_0^\Lambda n^2 d\,\Lambda}{N^2}} \quad \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \text{ y lo mismo en unidades C.G.S., } \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.05.06 \text{ b}]$$

El caso más interesante que aparece con frecuencia en el cálculo de la dispersión de las máquinas eléctricas es el de una bobina de sección rectangular, como se muestra en la fig. 1.05.06 a, alojada en las ranuras del inducido o con retorno exterior del flujo por espacios tan amplios o tan permeables que limitan prácticamente la reluctancia del circuito magnético a la del cuerpo mismo de la bobina.

Esto equivale a decir que la permeancia $d\Lambda$ de cualquier tubo de fuerza elemental queda circunscrita, fig. 1.05.06 a, al valor

$$d\Lambda = \mu_0 \mu \frac{ds}{a} = \mu_0 \mu \frac{l_m \, dy}{a} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right). \qquad [1.05.06 \text{ c}]$$

(l_m, a e y *en* m, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$)

siendo a la longitud axial de la bobina, en m y l_m el desarrollo medio anular de la bobina afectado por este flujo disperso, en m. Si además admitimos que el devanado ocupe homogéneamente la sección recta de la bobina en cuestión, tal coma aparece en la figura citada,

$$n = N \frac{y}{h} \qquad [1.05.06 \text{ d}]$$

Sustituyendo [c] y [d] en [b]

$$\Lambda_L = \frac{1}{N^2} \int_0^h \left(N^2 \frac{y^2}{h^2}\right) \left(\mu_0 \mu \frac{l_m \, dy}{a}\right) = \frac{\mu_0 \mu l_m}{h^2 a} \int_0^h y^2 \, dy =$$

$$\Lambda_L = \mu_0 \mu \frac{l_m \, h}{3a} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$$

Notemos que si todo el flujo se presentase en este caso concentrado en el eje o sea concatenado con las N espiras totales, la permeancia vendría dada, [1.05.04 b], en las mismas unidades, por

$$\Lambda_L = \mu_0 \mu \frac{l_m h}{a} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \qquad \text{[1.05.06 f]}$$

Comparando las fórmulas [e] y [f] se observa que la concatenación progresiva de espiras y líneas de fuerza reduce la inductancia del circuito electromagnético *a la tercera parte*, como si la permeancia disminuyese en esta misma proporción. Así, para el caso propuesto de una bobina de N_b espiras embebidas en las ranuras de cualquier máquina podemos también escribir, por lo que respecta a la inductancia creada en toda la longitud efectiva L_n, metros, de la ranura, fig. 1.05.06 b,

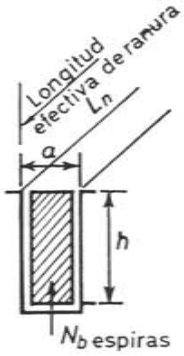


Fig. 1.05.06 b. Permeancia de una bobina alojada en una ranura $\Lambda = \frac{L_n h}{3a}$

$$L = N_b^2 \Lambda_n \quad \text{(H)}$$

tomando en este caso

$$\Lambda_n = \frac{1}{3}\left(\mu_0 \mu \frac{L_n h}{a}\right)\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$$

de lo cual se deduce una permeancia lineal o por unidad activa de desarrollo de la bobina (por m)

$$\boxed{\lambda_n} = \frac{\Lambda_n}{L_n} = \boxed{\mu_0 \mu \frac{h}{3a}} \frac{\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)}{\text{m}} \qquad \text{[1.05.06 g]}$$

(h y a en m; $\mu_0\mu$ en $\frac{T}{\text{Av/m}}$ y para el aire $\mu = 1$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$).

o sea 1/3 de la que correspondería a una bobina laminar de concatenación íntegra.

En unidades C.G.S. de permeancia

$$\boxed{L = 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N^2 \Lambda} \quad \text{(H)} \qquad \text{[1.05.06 h]}$$

$$\boxed{\Lambda = \mu \frac{l_m h}{3a}} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad \text{[1.05.06 i]}$$

(l_m h y a en cm; μ en $\frac{\text{G}}{\text{Oe}}$ y para el aire $\mu = 1$).

y en el caso de la ranura citada, fig. 1.05.06 b,

$$\boxed{\lambda_n = \mu \frac{h}{3a}} \frac{\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)}{\text{cm}} \qquad \text{[1.05.06 j]}$$

1.05.07. **Expresión general del coeficiente de inducción mutua**

La relación que liga la inductancia mutua M con la f.e.m. inducida por una bobina (2) sobre otra (1) es, en valores eficaces

$${}_2E_1 = \omega\ M\ I_2 \qquad \text{(V)} \qquad \text{[1.05.07 a]}$$

(M en H, I_2 en A)

puesto que, según la definición de M

$${}_2e_1 = -\ M \frac{di_2}{dt}$$

y siendo $i_2 = \hat{I}_2 \operatorname{sen} \omega t$ o $-\frac{di_2}{dt} = -\ \omega\ \hat{I}_2 \cos \omega t$,

$${}_2e_1 = -\ \omega\ M\ \hat{I}_2 \cos \omega t$$

con una amplitud

$${}_2\hat{E}_1 = \omega\ M\ \hat{I}_2$$

y en valores eficaces

$${}_2E_1 = \omega\ M\ I_2$$

Conviene poner la f.e.m. en función de la corriente de la misma bobina (1) en que aquélla se considera. Si I_1 e I_2 están en fase (o en oposición)

$${}_2E_1 = \omega \left(M \frac{I_2}{I_1}\right) I_1 = \omega\ M'\ I_1$$

$M' = M \frac{I_2}{I_1}$ es el coeficiente de inducción mutua referido a la bobina (1). Si hay desfase entre ambas corrientes

$${}_2\vec{E}_1 = \omega \left(M \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1}\right) \vec{I}_1 = \omega\ \vec{M'}\ \vec{I}_1$$

siendo a su vez

$$\vec{M'} = M \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1}.$$

El c.d.i.m. M entre dos circuitos es otra característica geométrica o de naturaleza del espacio donde se establece el flujo común a ambos circuitos; está ligado también a la permeancia de dicho espacio y a los números de espiras N_1 N_2 de las dos bobinas afectadas.

Ya hemos dicho que el parámetro en cuestión M no suele usarse para el cálculo de la transmisión principal de energía entre el primario y el secundario de las máquinas o transformadores eléctricos, pero a veces resulta adecuado en el tratamiento de la dispersión entre elementos distintos de un mismo sistema primario o secundario, por lo cual será conveniente establecer nuevas expresiones más directas que las que se presentan bajo la noción del flujo de enlace entre uno y otro circuito.

Según el concepto fundamental, la inductancia mutua en henrios no es más que la variación del número de concatenaciones espiras-weber del circuito inducido, por unidad de variación de la corriente (por amperio) en el circuito inductor. Si caracterizamos a éste con el subíndice 1 y al inducido con el subíndice 2, se tiene, por definición, supuesto que todas las espiras de uno y otro circuito se hallen concatenadas con todo el flujo de enlace, [1.05.02 α],

$$M = N_2 \frac{d_1\Phi_2}{di_1} = N_1 \frac{d_2\Phi_1}{di_2}.$$

Si el circuito magnético común es de permeabilidad constante,

$$M = N_2 \frac{{}_1\hat{\Phi}_2}{\hat{I}_1} = N_1 \frac{{}_2\hat{\Phi}_1}{\hat{I}_2} \quad \text{(H)}$$

($\hat{\Phi}$ en Wb, $\hat{I}$ en A; ambos, valores máximos).

y, de cualquier modo, si la permeancia es variable con la corriente, las expresiones anteriores en términos finitos definen un valor medio del c.d.i.m.

A esta inductancia mutua le corresponde la f.e.m. inducida por la bobina (2) en la (1) expresada en [a], en valores eficaces

$${}_2E_1 = \omega\ M\ I_2 \qquad \text{(V)}$$

1.05.08. Inductancia mutua entre dos bobinas de espiras concentradas

Del flujo ${}_1\Phi_1$ emitido por la bobina 1, la parte ${}_1\Phi_2$ que enlaza a la bobina 2 se supone concatenada en este caso con todas las espiras tanto del circuito 1 como del circuito 2 (devanados laminares, fig. 1.05.08 a).

La ecuación del c.d.i.m. M a permeabilidad constante viene dada por

$$\boxed{M = N_1 N_2\ \Lambda_M} \text{ (H) con } \Lambda_M \text{ en unidades M.K.S. } \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \qquad [1.05.08\ \text{a}]$$

$$\boxed{M = 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_1 N_2\ \Lambda_M} \text{ (H) con } \Lambda \text{ en unidades C.G.S. } \left(\frac{M}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.05.08\ \text{b}]$$

Λ_M es la permeancia del circuito magnético común en las unidades mencionadas a las cuales corresponde una permeabilidad $\mu\,\mu_0$. En unidades M.K.S., $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ para el aire; en unidades C.G.S., $\mu_0 = 1$

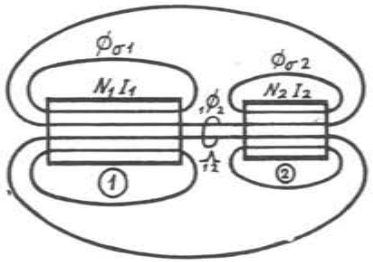


Fig. 1.05.08 a. Inducción mutua entre dos bobinas laminares.

En efecto: en unidades GIORGI,

$$M = N_2 \frac{{}_1\Phi_2}{i_1} \text{ (H)}$$

pero

$${}_1\Phi_2 = (N_1 i_1)\ \Lambda_M \text{ (Wb)}$$

siendo Λ_M como hemos dicho la permeancia del circuito magnético común donde se asienta el flujo ${}_1\Phi_2$. Luego,

$$M = N_2 \frac{N_1\ i_1}{i_1} \Lambda_M = N_1\ N_2\ \Lambda_M \quad \text{(H)}$$

según acabamos de escribir, [a].

De la misma manera, en unidades C.G.S.,

$$M = N_2 \frac{{}_1\Phi_2}{i_1} 10^{-8} \quad \text{(H)}$$

$${}_1\Phi_2 = \frac{4\pi}{10} N_1\ i_1\ \Lambda_M \quad \text{(M)}$$

siendo Λ_M la permeancia común en dichas unidades. De donde

$$M = N_2 \frac{\frac{4\pi}{10} N_1\ i_1\ \Lambda_M}{i_1} 10^{-8} = 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_1\ N_2\ \Lambda_M$$

según habíamos anunciado, [b].

1.05.09. Inductancia mutua entre bobinas de concatenación progresiva

El grueso real de las bobinas impide la concatenación íntegra del flujo de inducción mutua, al menos en una de ellas. Toda disposición relativa distinta entre las dos bobinas conducirá a una situación diferente en el proceso de concatenaciones proporcionando en cada caso un valor particular del coeficiente M. De una manera general

$$M = \int_0^{\Lambda} n_1\ n_2\ d\Lambda_M \quad \text{(H) con } \Lambda_M \text{ en unidades M.K.S.} \qquad [1.05.09\ \text{a}]$$

Con Λ en unidades C.G.S.

$$M = 4\pi \cdot 10^{-9} \int_0^{\Lambda} n_1 n_2 \, d\Lambda_M \quad \text{(H)} \qquad [1.05.09\ b]$$

En efecto: Sea $d_2\Phi_1$ un flujo elemental (1) procedente de la bobina (2) que abraza n_2 espiras del total N_2 de esta bobina y n_1 espiras del total N_1 de la bobina (1); en unidades M.K.S., y en un instante determinado de la corriente i_2

$$dM = n_1 \cdot \frac{d_2\Phi_1}{i_2}$$

o bien

$$dM = n_1 \cdot \frac{(n_2\, i_2)\, d\Lambda_M}{i_2} = n_1\, n_2\, d\Lambda_M$$

de donde, como acabamos de anunciar,

$$M = \int_0^{\Lambda} n_1\, n_2\, d\Lambda_M$$

Podemos introducir también una permeancia común equivalente Λ_M tal que

$$M = N_1 N_2\, \Lambda_M = \int_0^{\Lambda} n_1 n_2\, d\Lambda_M \qquad [1.05.09\ c]$$

de donde, dicha permeancia

$$\boxed{\Lambda_M = \frac{1}{N_1 N_2} \int_0^{\Lambda} n_1\, n_2\, d\Lambda_M} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \qquad [1.05.09\ d]$$

Esta última ecuación es *indistinta en ambos sistemas* de unidades M.K.S. o G.G.S. Así, es también

$$\boxed{\Lambda_M = \frac{1}{N_1 N_2} \int_0^{\Lambda} n_1\, n_2\, d\Lambda_M} \left(\frac{M}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.05.09\ e]$$

1.05.10. Inductancia mutua entre dos bobinas concéntricas

El montaje se ve en la figura 1.05.10 a. Para este caso, sólo nos interesa el flujo común concatenado parcialmente con las espiras de la bobina interior (2) ya que el resto, que pudiera abrazar el conjunto de todas las espiras, (1) y (2) entra dentro del concepto referente al c.d.i.m. estudiado en el párrafo

(1) Véase la nota última de pié de página sobre el carácter espacial de $d_1\Phi_1$ en este caso.

1.05.08. Este último flujo, de enlace total, es el que circularía por el espacio cilíndrico limitado por la superficie interna de la bobina 2. Para prescindir de él reducimos dicho espacio a cero suponiendo que el cuerpo de la bobina llega hasta el eje. El flujo de la bobina 1 que no atraviesa a la bobina 2 será de autoinducción para aquel devanado y no tendrá efecto mutuo.

En la misma figura se muestran las líneas posibles de concatenación parcial, únicas, pues, que cabe considerar como de inducción mutua, ya procedan de la excitación de la bobina exterior o de la que nace en la bobina interior.

Nos bastará aplicar las ecuaciones [1.05.09 a] y [d] sustituyendo el valor de n_1, variable, en general, por el total de espiras, constante en este caso, N_1 de la bobina (1), que puede salir entonces fuera del signo integral

$$M = N_1 \int_0^{\Lambda} n_2\, d\Lambda_M \quad \text{(H)} \qquad [1.05.10\ a]$$

$$\Lambda_M = \frac{1}{N_2} \int_0^{\Lambda} n_2\, d\Lambda \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right). \qquad [1.05.10\ b]$$

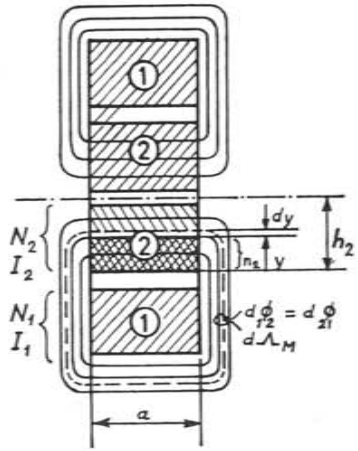


Fig. 1.05.10 a. Inductancia mutua de dos bobinas concéntricas de la misma anchura a

La aplicación más interesante en la construcción de máquinas eléctricas está ligada al cálculo de la dispersión con bobinas alojadas en las mismas ranuras (máquinas rotatorias) o coaxiales (transformadores) caracterizándose el circuito magnético del flujo común de dispersión por tener su reluctancia prácticamente limitada a la de las ranuras mismas o al espacio ocupado por el cuerpo de las bobinas; el resto del circuito, o bien es ferromagnético de permeabilidad muy alta, o de dimensión transversal ilimitada que reduce de hecho a cero su reluctancia.

Sobre la fig. 1.05.10 a se han marcado las cotas que junto con el desarrollo anular medio l_{m2} (m) afectado por el flujo considerado de la bobina interior determinan la permeancia del circuito común y con ella la inductancia mutua. Según lo dicho, tendremos, simplemente

$$d\Lambda_M = \mu_0 \mu \frac{l_{m2}}{a}\, dy \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \qquad [1.05.10\ c]$$

Si además admitimos una distribución homogénea del bobinado en sección

$$n_2 = N_2 \frac{y}{h_2} \qquad [1.05.10\ d]$$

Sustituyendo estas expresiones en [b],

$$\Lambda_M = \frac{1}{N_2}\int_0^{\delta} n_2 d\Lambda = \frac{1}{N_2}\int_0^{h_2} N_2 \frac{y}{h_2}\,\mu_0\mu\,\frac{l_{m2}\,dy}{a}$$

$$= \mu_0\mu\,\frac{l_{m2}}{a h_2}\int_0^{h_2} y\,dy$$

$$\Lambda_M = \mu_0\mu\,\frac{l_{m2}\,h_2}{2\,a}$$

es decir, que podremos escribir, [1.05.09 c]

$$M = N_1 N_2\,\Lambda_M \quad \text{(H)}$$

con

$$\Lambda_M = \frac{1}{2}\,\mu_0\mu\,\frac{l_{m2}\,h_2}{a}\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$$

de lo cual se desprende una permeancia lineal (por metro) del circuito magnético común a ambas bobinas

$$\boxed{\lambda_M = \frac{\Lambda_M}{l_{m2}} = \mu_0\mu\,\frac{h_2}{2\,a}}\ \frac{\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)}{\text{m}} \qquad [1.05.10\ \text{e}]$$

mitad de la que correspondería a una concatenación total de espiras y flujo. Todas las longitudes se expresarán en m y μ para el aire $= 1$; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

En unidades C.G.S. de permeancia hallaríamos del mismo modo

$$\boxed{M = 4\,\pi \cdot 10^{-9}\,N_1 N_2\,\Lambda_M}\ \text{(H)} \qquad [1.05.10\ \text{f}]$$

$$\boxed{\Lambda_M = \frac{1}{2}\,\mu\,\frac{l_{m2}\,h_2}{a}}\ \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.05.10\ \text{g}]$$

$$\boxed{\lambda_M = \mu\,\frac{h_2}{2a}}\ \frac{(M/\text{Gb})}{\text{cm}} \qquad [1.05.10\ \text{h}]$$

(todas las longitudes en cm y para el aire, $\mu = 1$).

Obsérvese que la única altura radial que interviene en el cálculo de la inductancia mutua por concatenación progresiva, en este caso de bobinas concéntricas *es la del arrollamiento interior* h_2 (en las ranuras, el más próximo al entrehierro).

1.05.11. Inductancia mutua entre dos bobinas coaxiales

La disposición prevista aparece en la fig. 1.05.11 a. Para este estudio, también sólo nos interesa el flujo a través del cuerpo de las bobinas ya que el que pueda circular por el hueco en prolongación de las superficies internas de ambas constituye un flujo de enlace íntegramente concatenado cuya inductancia mutua queda recogida en las ecuaciones del párrafo 1.05.08. A fin de prescindir de este último flujo, supondremos las dos bobinas devanadas a partir del eje común. Aplicaremos de nuevo las ecuaciones [1.05.09 a] y [d]

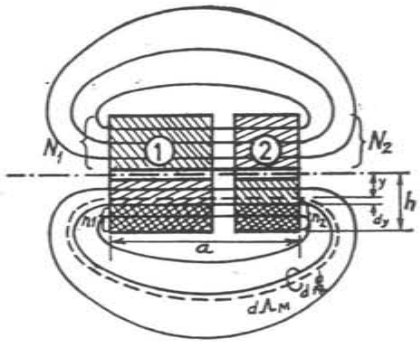


Fig. 1.05.11 a. Inductancia mutua de dos bobinas coaxiales de las mismas dimensiones radiales.

$$M = \int_0^{\Lambda} n_1\,n_2\,d\Lambda_M$$

$$\Lambda_M = \frac{1}{N_1 N_2}\int_0^{\Lambda} n_1\,n_2\,d\Lambda_M$$

Una vez más las condiciones prácticas de las máquinas rotatorias y de los transformadores permiten considerar reducida la reluctancia del circuito magnético a la de las ranuras donde irán alojadas, de hecho, las dos bobinas (1) y (2), o al cuerpo de las mismas, prescindiendo del espacio exterior cuya permeancia es incomparablemente superior.

Limitando, pues, la longitud del circuito magnético a la distancia a (fig. 1.05.11 a) y suponiendo una distribución homogénea de las espiras seccionadas, se desprende, siendo l_m el desarrollo medio de las bobinas, en m,

$$d\Lambda_M = \mu_0\mu\,\frac{l_m\,dy}{a}\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$$

y

$$n_1 = N_1 \frac{y}{h} \qquad n_2 = N_2 \frac{y}{h}$$

de donde, [1.05.09 d],

$$\Lambda_M = \frac{1}{N_1 N_2} \int_o^h N_1 N_2 \frac{y^2}{h^2} \mu_0 \mu \frac{l_m dy}{a}$$

$$= \mu_0 \mu \frac{l_m}{ah} \int_o^h y^2 dy$$

$$= \mu_0 \mu \frac{l_m h}{3a} \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$$

o sea que podemos escribir, [1.05.09 c],

$$M = N_1 N_2 \Lambda_M \qquad (H)$$

tomando como permeancia equivalente

$$\Lambda_M = \frac{1}{3} \left(\mu_0 \mu \frac{l_m h}{a}\right) \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$$

o como permeancia lineal por metro de desarrollo activo

$$\boxed{\lambda_M = \mu_0 \mu \frac{h}{3a}} \frac{(\text{Wb/Av})}{\text{m}} \qquad [1.05.11 \text{ a}]$$

el tercio, pues, de la que correspondería a un estado de concatenación total entre flujo y espiras

También, en unidades C.G.S. de permeancia

$$\boxed{M = 4\pi \cdot 10^{-9} N_1 N_2 \Lambda_M} \quad (\text{H}) \qquad [1.05.11 \text{ b}]$$

$$\boxed{\Lambda_M = \frac{1}{3} \left(\mu \frac{l_m h}{a}\right)} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.05.11 \text{ c}]$$

con todas las dimensiones longitudinales en cm., y

$$\boxed{\lambda_M = \frac{1}{3} \left(\mu \frac{h}{a}\right)} \frac{(\text{M/Gb})}{\text{cm.}} \qquad [1.05.11 \text{ d}]$$

Repetimos que, para el aire, $\mu = 1$.

$\mu_0 \mu = 4\pi \cdot 10^{-7}$ en el sistema M.K.S.
$\mu_0 \mu = 1$ » » » C.G.S.

1.05.12. Inductancia combinada de dispersión

Es muy frecuente en las máquinas eléctricas el que una bobina se halle sujeta simultáneamente a la acción de su propio flujo autoinductivo de dispersión y también al de dispersión de otra bobina próxima que actúe sobre ella por inducción mutua. Los efectos de ambas acciones pueden entonces recogerse en una sola inductancia combinada o equivalente L_x que vamos a calcular.

Suponiendo, de momento, que se trate de bobinas laminares de concatenaciones íntegras, la f.e.m. inducida en una de ellas, la 1 por ejemplo, vendría dada por

$$e_{x1} = -N_1 \left(\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{dt} + \frac{d\Phi_M}{dt}\right) = -N_1 \left(\frac{d\Phi_{\sigma 1}}{di_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{d\Phi_M}{di_2} \frac{di_2}{dt}\right)$$

$$= -\left(L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}\right) \qquad [1.05.12 \text{ a}]$$

Φ_M es el flujo de dispersión común a los dos arrollamientos y $\Phi_{\sigma 1}$ el de dispersión propio del bobinado considerado; lo que se trata de hallar, precisamente, es un valor L_{x1} tal que en cada instante

$$e_{x1} = -L_{x1} \frac{di_1}{dt}$$

o en valores eficaces

$$E_{x1} = 2\pi f L_{x1} I_1 \text{ (V)} \qquad [1.05.12 \text{ b}]$$

(L_{x1} en H, f en Hz, I, en (A)

es decir

$$L_{x1} \frac{di_1}{dt} = L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

de donde, dividiendo ambos miembros por $\frac{di_1}{dt}$

$$\boxed{L_{x1} = L_{\sigma 1} + M \frac{di_2}{di_1}} \qquad [1.05.12 \text{ c}]$$

Si las corrientes son temporalmente senoidales de amplitudes $\hat{I}_1$ e $\hat{I}_2$, valores eficaces I_1 e I_2 y ángulos de fase, referidos a i_1, o y φ respectivamente, tendremos:

$$i_1 = \hat{I}_1 \operatorname{sen} \omega t \quad ; \quad \frac{di_1}{dt} = \omega \hat{I}_1 \cos \omega t$$

$$i_2 = \hat{I}_2 \operatorname{sen} (\omega t - \varphi) \; ; \; \frac{di_2}{dt} = \omega \hat{I}_2 \cos (\omega t - \varphi)$$

y

$$\frac{di_2}{di_1} = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_1} \frac{\cos (\omega t - \varphi)}{\cos \omega t.} = \frac{I_2}{I_1} \frac{\cos (\omega t - \varphi)}{\cos \omega t.}$$

Si ambas corrientes están en fase, $\varphi = 0$,

$$\frac{di_2}{di_1} = \frac{I_2}{I_1}$$

y

$$\boxed{L_{x1} = L_{\sigma 1} + M \frac{I_2}{I_1}} \qquad [1.05.12 \text{ d}]$$

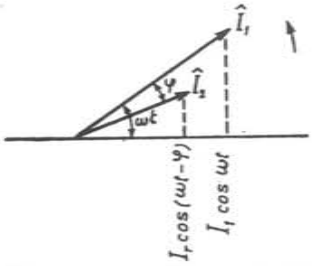


Fig. 1.05.12 a. Representación vectorial de dos corrientes desfasadas entre sí.

Si el desfase no es nulo, $\varphi \lesseqgtr 0$, podemos acudir a la representación geométrica de una y otra corriente senoidal por medio de los vectores respectivos, $\hat{I}_1$, $\hat{I}_2$, o sus proporcionales I_1, I_2 (fig. 1.05.12 a). La ecuación [a] en términos vectoriales es la siguiente

$$\vec{E}_{x1} = -(j \omega L_{\sigma 1} \vec{I}_1 + j \omega M \vec{I}_2),$$

introduciendo la inductancia combinada L_{x1} tal que $\vec{E}_{x1} = -j\omega L_{x1} \vec{I}_1$,

$$-j \omega L_{x1} \vec{I}_1 = -(j \omega L_{\sigma 1} \vec{I}_1 + j \omega M \vec{I}_2)$$

y

$$\boxed{L_{x1} = L_{\sigma 1} + M \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1}}; \qquad [1.05.12 \text{ e}]$$

el coeficiente L_{x1} pasa a ser entonces, en el caso más general, una magnitud dirigida. La ecuación [d] se desprende también inmediatamente de esta otra, generalizada, [e].

La expresión

$$\vec{M}' = M \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \qquad [1.05.12 \text{ f}]$$

o, en caso de coincidencia de fase entre I_1 e I_2

$$M' = M \frac{I_2}{I_1} \qquad [1.05.12 \text{ g}]$$

es lo que se denomina inductancia mutua «referida al bobinado (1)»,

$$L_{x1} = L_{\sigma 1} + M'. \qquad [1.05.12 \text{ h}]$$

Referida al bobinado (2),

$$\vec{M}'' = M \frac{\vec{I}_1}{\vec{I}_2} \text{ o } M'' = M \frac{I_1}{I_2} \qquad (1.05.12 \text{ i})$$

y la inductancia de dispersión equivalente de este devanado,

$$L_{x2} = L_{\sigma 2} + M''. \qquad [1.05.12 \text{ j}]$$

Sin embargo, en el caso práctico de las máquinas polifásicas, con corrientes de distinta fase en la misma ranura (paso de bobina acortado) que es cuando hay que tener en cuenta las fórmulas anteriores, sucede que a lo largo de cada fase existe una acción simétrica de las otras dos de tal modo que para el conjunto de una cualquiera de ellas la composición de los sumandos complejos da una suma real, con lo cual el carácter dirigido del término afectado desaparece y con ello desaparece también la posible presencia de una componente de la f.e.m. en fase distinta de la que corresponde a una pura autoinducción, lo cual tendremos ocasión de comprobarlo plenamente en los ejemplos que seguirán poco más adelante para aclarar tales principios.

1.05.13. Permeancia combinada de dispersión

Es la que correspondería al c.d.a.i. combinado L_{x1} o L_{x2} de acuerdo con las fórmulas generales [1.05.12 d o e] y [j] e [i], es decir, referido al número de espiras propio de la bobina que se considere. Pongamos [1.05.04 a]

$$L_{x1} = N_1^2 \Lambda_{x1} \quad \text{(H)} \qquad [1.05.13 \text{ a}]$$

con Λ_{x1} = permeancia combinada en $\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}$; o bien, [1.05.04 c],

$$L_{x1} = 4 \pi \cdot 10^{-9} N_1^2 \Lambda_{x1} \quad \text{(H)}$$

con Λ_{x1} en $\frac{\text{M}}{\text{Gb}}$.

Haciendo explícitas las permeancias componentes de la ecuación

[1.05.12 e] para una de las dos bobinas con N_1 espiras (permeancia del circuito magnético de dispersión propia $\Lambda_{\sigma 1}$ y permeancia del circuito magnético de inducción mutua Λ_M), tendremos un valor Λ_{x1} de la permeancia combinada tal que, [1.05.04 a] y [1.05.08 a],

$$L_{x1} = N_1^2 \Lambda_{x1} = N_1^2 \Lambda_{\sigma 1} + \left(N_1 N_2 \Lambda_M \right) \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \qquad [1.05.13\ b]$$

de donde, dividiendo ambos miembros por N_1^2

$$\boxed{\Lambda_{x1} = \Lambda_{\sigma 1} + \Lambda_M \frac{N_2 \vec{I}_2}{N_1 \vec{I}_1}} \qquad [1.05.13\ c]$$

Poniendo de manifiesto las expresiones de $\Lambda_{\sigma 1}$, [1.05.06 b], y de Λ_M, [1.05.09 d], resulta

$$\boxed{\Lambda_{x1}} = \frac{\int_b^{\Lambda_{\sigma_1}} n_1^2 \, d\Lambda}{N_1^2} + \frac{\int_o^{\Lambda_M} n_1 n_2 \, d\Lambda_M}{N_1 N_2} \frac{N_2 \vec{I}_2}{N_1 \vec{I}_1} =$$

$$= \boxed{\frac{\int_o^{\Lambda_{\sigma_1}} n_1^2 \, d\Lambda}{N_1^2} + \frac{\int_o^{\Lambda_M} n_1 n_2 \, d\Lambda_M}{N_1^2} \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1}} \qquad [1.05.13\ d]$$

Permutando los subíndices 1 y 2, se obtiene Λ_{x2}. Ambas ecuaciones [c] y [d] son válidas en cualquier sistema de unidades. Análogamente la permeancia específica combinada $\lambda_{x1} = \frac{\Lambda_{x1}}{l_{m1}}$, dando por supuesto que la misma longitud desarrollada de la bobina l_{m1} afecte idénticamente al fenómeno autoinductivo y al de inducción mutua,

$$\left.\begin{aligned} \boxed{\lambda_{x1} = \lambda_{\sigma 1} + \lambda_M \frac{N_2 \vec{I}_2}{N_1 \vec{I}_1}} \\ \boxed{\lambda_{x2} = \lambda_{\sigma 2} + \lambda_M \frac{N_1 \vec{I}_1}{N_2 \vec{I}_2}} \end{aligned}\right\} \qquad [1.05.13\ e]$$

también en cualquier sistema.

Si las fases de I_1 e I_2 son coincidentes la relación vectorial anterior se transforma simplemente en relación numérica de amperios vueltas. En los

BIBLIOTECA ... UNIVERSIDAD ... NACIONAL

transformadores, dicha relación, $\frac{N_2 I_2}{N_1 I_1}$, es prácticamente igual a la unidad y en las máquinas rotatorias, aunque no tan exactamente, tampoco se diferencia mucho de aquel valor.

1.05.14. Ejemplos

Ejemplo 1. Hallar la expresión de las permeancias específicas equivalentes λ_{x1}, λ_{x2}, para uno y otro de los dos lados de bobina alojados en la ranura tal y como se representa en la fig. 1.05.14 a, en función de las dimensiones geométricas mostradas en la misma figura. Determinar la permeancia lineal para el conjunto de la ranura.

Las tres líneas de fuerza marcadas 1, 2, 3, sintetizan los distintos circuitos magnéticos a considerar.

El flujo de autoinducción de la bobina (1) está constituido por el que representa la línea 1 en concatenación progresiva y las 2 y 3 en concatenación íntegra con las espiras de la bobina (1) considerada. En unidades C.G.S., y con una permeabilidad $\mu = 1$ para la ranura, tendremos [1.05.06 j],

$$\lambda_{\sigma 1} = \frac{h_1}{3a} + \frac{h_2 + h_3}{a} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}} \right)$$

(todas las longitudes, en cm).

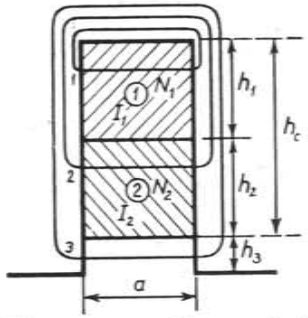


Fig. 1.05.14 a. Permeancia lineal equivalente.

El flujo de inducción mutua entre ambas bobinas se compone del que representa la línea 2 totalmente concatenada con las espiras de la bobina (1) y progresivamente con las de la bobina (2) y el de la línea (3), común. A esta disposición concéntrica vimos que correspondía una permeancia específica de mutua inductancia [1.05.10 h], con $\mu = 1$

$$\lambda_M = \frac{h_2}{2a} + \frac{h_3}{a}$$

Aplicando la ecuación [1.05.13 e]

$$\lambda_{x1} = \left(\frac{h_1}{3a} + \frac{h_2 + h_3}{a} \right) + \left(\frac{h_2}{2a} + \frac{h_3}{a} \right) \frac{N_2 \vec{I}_2}{N_1 \vec{I}_1} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}} \right) \qquad [1.05.14\ a]$$

Para la bobina (2) tenemos un flujo autoinductivo representado por la línea 2 progresivamente concatenado, y otro de la misma naturaleza común a todas las espiras sintetizado en la línea (3).

$$\lambda_{\sigma 2} = \frac{h_2}{3a} + \frac{h_3}{a} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}} \right)$$

El flujo de inducción mutua procedente de la bobina (1) es el mismo progresivo antes considerado, de la línea (2), que se asienta sobre la permeancia específica citada, más el de la línea (3)

$$\lambda_M = \frac{h_2}{2a} + \frac{h_3}{a} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

Volviendo, pues, a la ecuación [1.05.13 e]

$$\lambda_{x2} = \left(\frac{h_2}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_2}{2a} + \frac{h_3}{a}\right)\frac{N_1 \vec{I}_1}{N_2 \vec{I}_2} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.05.14\ b]$$

Obsérvese que, si bien los términos estrictamente autoinductivos de ambas permeancias específicas λ_{x1} y λ_{x2}, es decir,

$$\left(\frac{h_1}{3a} + \frac{h_2 + h_3}{a}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{h_2}{3a} + \frac{h_3}{a}\right),$$

respectivamente, son distintos, los términos representativos de la inducción mutua tienen sus factores dimensionales, o sea los factores relacionados con las dimensiones de la máquina,

$$\left(\frac{h_2}{2a} + \frac{h_3}{a}\right)$$

idénticos para ambas permeancias [a] y [b]

Si como sucede en las máquinas eléctricas, ambos lados de bobina llevan el mismo número de conductores, $N_1 = N_2 = N_0$ y están recorridos por intensidades de igual valor eficaz I, coincidentes o no en fase, pero que significan constructivamente una igualdad de dimensiones radiales en las bobinas, $h_1 = h_2 = \frac{h_c}{2}$ las fórmulas [a] y [b] se transforman fácilmente en estas otras

$$\lambda_{x1} = \left(\frac{h_c}{6a} + \frac{h_c}{2a} + \frac{h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{4a} + \frac{h_3}{a}\right)\frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} = \left(\frac{4h_c}{6a} + \frac{h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{4a} + \frac{h_3}{a}\right)\frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \qquad [1.05.14\ c]$$

$$\lambda_{x2} = \left(\frac{h_c}{6a} + \frac{h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{4a} + \frac{h_3}{a}\right)\frac{\vec{I}_1}{\vec{I}_2}$$

Si sumamos estas dos permeancias específicas relativas a uno y otro lado de bobina, nos da

$$\lambda_{x1} + \lambda_{x2} = \left(\frac{5h_c}{6a} + \frac{2h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{4a} + \frac{h_3}{a}\right)\left(\frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} + \frac{\vec{I}_1}{\vec{I}_2}\right) \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.05.14.\ d]$$

Si por añadidura las corrientes I_1 e I_2 además de ser de igual módulo fuesen en fase, el paréntesis vectorial se reduce a la suma $(1 + 1) = 2$, y

$$\lambda_{x1} + \lambda_{x2} = \left(\frac{5h_c}{6a} + \frac{2h_3}{a}\right) + \left(\frac{2h_c}{4a} + \frac{2h_3}{a}\right) = \frac{4h_c}{3a} + \frac{4h_3}{a}$$

o sea

$$\lambda_{x1} + \lambda_{x2} = 4\left(\frac{h_2}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.05.14\ e]$$

Nótese como en estas condiciones (igualdad del número de conductores y de corriente, en magnitud y fase, por lado de bobina) el factor entre paréntesis de la última

fórmula coincide con la permeancia lineal de ranura para el caso de una bobina única que tuviera, naturalmente un número de espiras $N = 2\ N_1 = 2\ N_2 = 2\ N_0$.

La inductancia combinada en uno y otro caso, calculadas para un desarrollo cualquiera de la bobina, el correspondiente, por ejemplo, a la longitud efectiva de ranura L_n, será:

a) considerando las dos bobinas independientemente con sus permeancias propias de autoinducción y de inducción mutua según acabamos de ver,

$$L_x = N_0^2 \cdot 4\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) L_n \ \text{(H)} \qquad [1.05.14\ f]$$

(con las longitudes en metros)

b) considerando una sola bobina que incluyera las espiras de ambas, $N = 2\ N_0$

$$L_x = N^2\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) L_n = 4\ N_0^2\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) L_n \ \text{(H)} \qquad [1.05.14\ g]$$

Una y otra inductancia son absolutamente iguales como cabía esperar puesto que en las condiciones supuestas no existe físicamente diferencia alguna entre los bobinados de la ranura, lo mismo si se supone que pertenecen a un solo circuito eléctrico, que si proceden de varios de ellos.

Ejemplo 2. La fig. 1.05.14 b muestra esquemáticamente un bobinado *trifásico*

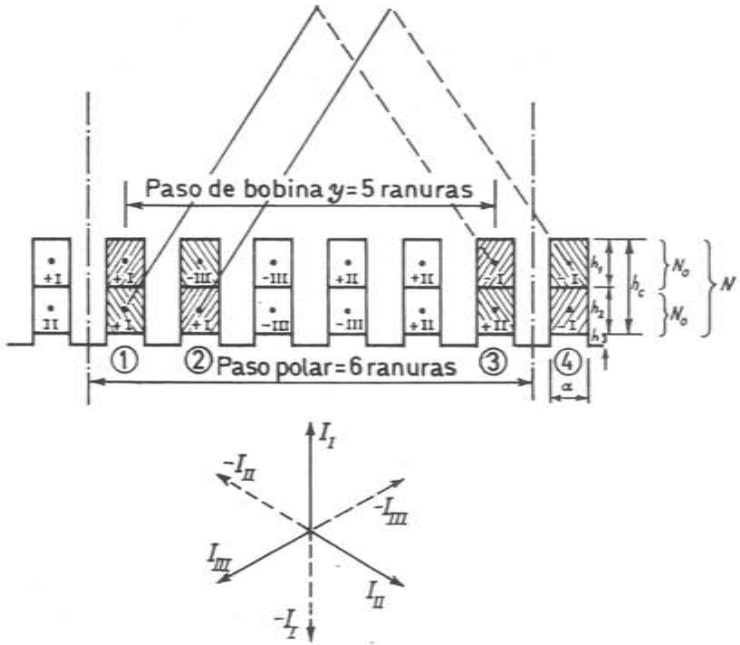


Fig. 1.05.14 b. Permeancia específica media de ranuras para un devanado trifásico de 2 ranuras por polo y fase (6 ranuras por polo) y paso acortado en una ranura ($y = 5$ ranuras).

en dos capas de dos ranuras por polo y fase (6, por polo) y paso de bobinado acortado en una ranura ($y_a = 5$), así como el diagrama vectorial de las corrientes en las tres fases, consideradas como positivas las intensidades de entrada o en los conductores de ida de cada bobina y como negativas las intensidades de salida o en los conductores de vuelta. Desde luego las espiras de ambas bobinas son idénticas en número: $N_1 = N_2 = N_0$.

Hallar la expresión de la permeancia específica media de ranuras para cada fase teniendo en cuenta el acortamiento del paso que sitúa en ciertas ranuras conductores o lados de bobina de fase distinta.

Basta hacer el estudio de un juego recurrente de (1) ranuras, pudiendo estar constituido por las cuátro marcadas (1) (2) (3) y (4) en la figura. La media de la permeancia específica así hallada vale para todo el devanado.

Ranura (1): Se halla ocupada por conductores de la fase I solamente: Su permeancia específica $\lambda_{x(1)}$, según lo que acabamos de ver, puede calcularse como si se tratara de una sola bobina que incluyera el total de conductores alojados $N = 2N_1 = 2N_2 = 2N_0$ en la ranura. Esta permeancia específica sería evidentemente, teniendo en cuenta que la concatenación progresiva en el campo del bobinado reduce su valor efectivo a la tercera parte, [1.05.06 i o j], expresada en unidades C.G.S.

$$\lambda_{x(1)} = \frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.05.14. h]}$$

(todas las longitudes en cm)

Ranura (2): Intervienen en ella conductores de ida de la fase I y otros de vuelta de la fase III por los que circularán respectivamente las corrientes $(+ I_I)$ y $(- I_{III})$. Con $N_1 = N_2 = N_0$ tendremos, pues, [1.05.14 d]

$$\lambda_{x(2)} = \left(\frac{5h_c}{6a} + \frac{2h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{4a} + \frac{h_3}{a}\right)\left(\frac{+\vec{I}_I}{-\vec{I}_{III}} + \frac{-\vec{I}_{III}}{+\vec{I}_I}\right) \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

Calculemos el término vectorial. Tomando como referencia $(- I_{III})$ tenemos (ver estrella de vectores en la fig. 1.05.14 b]

$$+ I_I = - I_{III}\, e^{j60°}$$

y por lo tanto

$$\frac{+ I_I}{-\vec{I}_{III}} + \frac{-I_{III}}{+\vec{I}_I} = \frac{-I_{III}\, e^{j60°}}{-I_{III}} + \frac{-I_{III}}{-I_{III}\, e^{j60°}} = e^{j60°} + \frac{1}{e^{j60°}}$$

$$= (\cos 60° + j \operatorname{sen} 60°) + \frac{1}{(\cos 60° + j \operatorname{sen} 60°)}$$

$$= (\cos 60° + j \operatorname{sen} 60°) + \frac{(\cos 60° - j \operatorname{sen} 60°)}{(\cos^2 60° + \operatorname{sen}^2 60°)} = 2 \cos 60° = 1.$$

El factor vectorial, desarrollado, resulta escalar e igual a 1. Luego

$$\lambda_{x(2)} = \frac{5h_c}{6a} + \frac{2h_3}{a} + \frac{h_c}{4a} + \frac{h_3}{a} = \frac{26h_c}{24a} + \frac{3h_3}{a} = \frac{13h_c}{12a} + \frac{3h_3}{a} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

(1) En rigor el juego recurrente por fase comprende 6 ranuras (dos, exclusivas de la misma fase y las otras cuatro bajo la influencia de las dos fases restantes) pero el resultado es el mismo.

Pero esta permeancia sirve para el cálculo del c.d.a.i. combinado de *una sola bobina* con un número de espiras N_0 igual a la mitad del de conductores por ranura N. Si en el cálculo final de la inductancia por ranura hacemos intervenir, como lo hemos previsto para $\lambda_{x(1)}$ las N espiras de las dos bobinas que entran en toda la ranura, es decir, el doble, y tenemos en cuenta que la inductancia en cuestión es proporcional al cuadrado del número de espiras deberemos tomar para $\lambda_{x(2)}$ la cuarta parte del valor hallado. En definitiva

$$\lambda_{x(2)} = \frac{13\, h_c}{48a} + \frac{3\, h_3}{4a} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.05.14 i]}$$

Ranura (3): El mismo argumento que acabamos de exponer nos llevaría de nuevo para esta ranura a una permeabilidad equivalente, referida al total de espiras por ranura N como en [i]

$$\lambda_{x(3)} = \frac{13\, h_c}{48\, a} + \frac{3\, h_3}{4\, a} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.05.14 j]}$$

Ranura (4): Repitiendo lo dicho al tratar de la ranura (1), con N conductores recorridos por corrientes en fase,

$$\lambda_{x(4)} = \frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

El *promedio* de las 4 ranuras asciende así a

$$\lambda_x = \frac{\lambda_{x(1)} + \lambda_{x(2)} + \lambda_{x(3)} + \lambda_{x(4)}}{4} = \frac{\frac{2\, h_c}{3\, a} + \frac{2\, h_3}{a} + \frac{26\, h_c}{48\, a} + \frac{6\, h_3}{4\, a}}{4}$$

$$= \frac{29\, h_c}{96\, a} + \frac{7\, h_3}{8\, a} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

Esta fórmula puede escribirse también

$$\lambda_x = \frac{29}{32} \left(\frac{h_c}{3a}\right) + \frac{7}{8} \left(\frac{h_3}{a}\right) \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.05.14 k]}$$

y el acortamiento de paso habrá influido en modificar la permeancia normal de ranura correspondiente al paso entero (todas las corrientes de una misma ranura en fase) afectando del factor $\frac{29}{32}$ el término referente a la altura ocupada por los conductores, término que normalmente hubiera sido $\left(\frac{h_c}{3a}\right)$ y del factor $\frac{7}{8}$ al término debido a la altura de los dientes por encima de las bobinas el cual de otro modo hubiera sido $\left(\frac{h_3}{a}\right)$

Repitiendo el cálculo para distintos acortamientos del paso con diversos números de ranura por polo y fase, es posible establecer una serie de coeficientes de corrección k_c para la parte de ranura ocupada por las bobinas y otra serie de factores k_a para el resto de la altura, de tal modo que la permeancia específica de las ranuras que interviene después en el cálculo de la inductancia o de la reactancia de dispersión adopte la forma general.

$$\lambda_n = k_c\left(\frac{h_c}{3a}\right) + k_a\left(\frac{h_3}{a}\right)\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.05.14\ l]$$

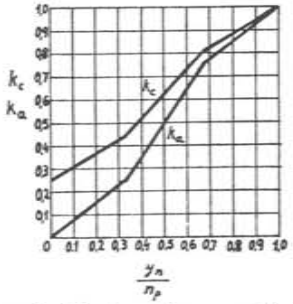
Para un paso de bobinas entero, $k_c = 1$ y $k_a = 1$; para un paso de bobinas igual a 5/6 del paso polar acabamos de ver que, en una máquina trifásica,

$$k_c = \frac{29}{32} \quad \text{y} \quad k_a = \frac{7}{8}$$

Para otros acortamientos distintos, los valores de k_c y k_a, deducidos por el mismo método, se muestran en las figs. 1.05.14 c y d, en función del paso fraccionario $\frac{y_n}{n_p}$; (y_n = paso de la bobina en ranuras; n_p = números de ranuras por polo). Sirva el ejemplo que acabamos de desarrollar como una muestra del procedimiento a seguir en el cálculo de dichas curvas.

Ejemplo 3. Deducir la expresión de la permeancia específica, en unidades C.G.S. para cada una de las bobinas adyacentes, dentro de una ranura como indica la fig. 1.05.14 e, y para la ranura misma.

Consideremos la bobina (1) con N_1 espiras recorridas por la corriente I_1. El flujo



Figs. 1.05.14 c y d. Factores de corrección k_c para la permeancia del cuerpo de las bobinas en la ranura y k_a para la permeancia del espacio exterior a las bobinas con arrollamientos de paso acortado. Devanados trifásicos en dos capas.

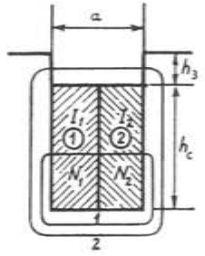


Fig. 1.05.14 e. Permeancia específica para las bobinas adyacentes de una misma ranura.

autoinductivo de esta bobina se compone: a) de las líneas singularizadas por la 1 en concatenación progresiva con las N_1 espiras, las cuales dan origen a una permeancia específica igual a 1/3 de la que resultaría con la concatenación íntegra de toda la bobina, $\left(\frac{h_c}{3a}\right)$, [1.05.06 i o j], y línea 2 y que origina una permeancia lineal $\left(\frac{h_3}{a}\right)$.

En conjunto, para el efecto autoinductivo,

$$\lambda_\sigma = \frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

(todas las longitudes, en cm)

El flujo de inducción mutua procedente de la bobina (2) es también en parte de concatenación progresiva con ambas bobinas, y en parte de concatenación total y produce sobre (1) la permeancia específica adicional

$$\lambda_M = \frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}$$

según la fórmula [1.05.11 d] por lo que respecta al primer sumando. En consecuencia, la ecuación [1.05.13 e] nos da para la bobina (1)

$$\boxed{\lambda_{x1}} = \lambda_{\sigma 1} + \lambda_M \frac{N_2\vec{I}_2}{N_1\vec{I}_1} = \boxed{\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right)\frac{N_2\vec{I}_2}{N_1\vec{I}_1}}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.05.14\ m]$$

Análogamente para la bobina (2)

$$\boxed{\lambda_{x2}} = \lambda_{\sigma 2} + \lambda_M \frac{N_1\vec{I}_1}{N_2\vec{I}_2} = \boxed{\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right) + \left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right)\frac{N_1\vec{I}_1}{N_2\vec{I}_2}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)} \qquad [1.05.14\ n]$$

Comprobemos también en este caso que la igualdad de espiras y de corrientes, en magnitud y fase, de ambas bobinas, nos conducirá, sumando las permeancias anteriores. a la ecuación normal para una bobina única que reuniera las espiras de las dos adyacentes,

Si $N = 2N_1 = 2N_2 = 2N_0$ e $\vec{I}_1 = \vec{I}_2$,

$$\lambda_{x1} + \lambda_{x2} = \left(\frac{2\,hc}{3a} + \frac{2\,h_3}{a}\right) + \left(\frac{2\,h_c}{3a} + \frac{2\,h_3}{a}\right) = 4\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right)\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

Considerando por lo tanto ambas bobinas separadamente con $N_0 = \frac{N}{2}$ espiras cada una nos dará un coeficiente de autoinducción para toda la ranura proporcional a $N_0^2 \cdot 4\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right)$. Si suponemos las espiras reunidas en una sola bobina y aplicamos la permeancia específica normal en este caso L_x sería proporcional a $N^2\left(\frac{h_c}{3a} + \frac{h_3}{a}\right)$, llegándose al mismo resultado numérico ya que $N^2 = 4\,N_0$, conclusión lógica por la evidente identidad de condiciones electromagnéticas en uno y otro caso.

1.05.15. Resumen

En el caso más general de dos bobinas asociadas de cualquier modo, en concatenaciones autoinductivas y de inducción mutua progresivas, tendremos para una u otra identificada por el subíndice 1

Permeancia equivalente, [1.05.13 d]:

$$\Lambda_{x1} = \frac{1}{N_1^2}\left(\int_0^{\Lambda\sigma i} n_1^2\, d\Lambda + \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1}\int_0^{\Lambda_M} n_1\, n_2\, d\Lambda_M\right)\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \text{o}\left(\frac{M}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.05.15\ a]$$

C.d.a.i. equivalente, [1.05.13 a]:

$$L_{x1} = N_1^2 \Lambda_{x1} = \int_0^{\Lambda_{\sigma_1}} n_1 \, d\Lambda + \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \int_0^{\Lambda_M} n_1 n_2 \, d\Lambda_M \text{ (H) con } \Lambda \text{ en } \frac{\text{Wb}}{\text{Av}} \quad [1.05.15 \text{ b}]$$

$$L_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9} N_1^2 \Lambda_{x1} = 4\pi \, 10^{-9} \left(\int_0^{\Lambda_{\sigma_1}} n_1 \, d\Lambda + \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \int^{\Lambda_M} n_1 n_2 \, d\Lambda_M \right) \text{ (H) con } \Lambda \text{ en } \frac{M}{\text{Gb}} \quad [1.05.15 \text{ c}]$$

F.e.m. de reactancia. [1.06.02 a y g]. Con una reactancia [1.05.15 d]

$$X_1 = \omega L_{x1} = \begin{cases} 2\pi f N_1^2 \Lambda_{x1} & (\Omega), \text{ tomando } \Lambda_x \text{ en Wb/Av} \quad [1.05.15 \text{ e}] \\ 8\pi^2 \cdot 10^{-9} N_1^2 \Lambda_{x1} & (\Omega), \text{ tomando } A_x \text{ en M/Gb,} \quad [1.05.15 \text{ f}] \end{cases}$$

$$E_{x1} = X_1 \, I_1 = (\omega L_{x1}) I_1 = (2 \, \pi \, f \, L_{x1}) I_1 \text{ (V)}$$

(L_{x1} en H, I_1 en A eficaces; X_1 en Ω)

En el caso de que las concatenaciones fuesen íntegras, con permeancias $\Lambda_{\sigma 1}$ para el flujo de dispersión del circuito 1 y Λ_M para el flujo común a ambos circuitos, [1.05.13 c]

$$\Lambda_{x1} = \Lambda_{\sigma 1} + \frac{N_2 \vec{I}_2}{N_1 \vec{I}_1} \Lambda_M \quad \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \text{o} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \quad [1.05.15 \text{ g}]$$

A su vez, [1.05.13 b],

$$L_{x1} = N_1^2 \Lambda_{x1} = N_1^2 \Lambda_{\sigma 1} + N_1 N_2 \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \Lambda_M \quad \text{(H) con } \Lambda \text{ en } \left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right) \quad [1.05.15 \text{ h}]$$

$$L_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9} N_1^2 \Lambda_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9} \left(N_1^2 \Lambda_{\sigma 1} + N_1 N_2 \frac{\vec{I}_2}{\vec{I}_1} \Lambda_M \right) \text{(H) con } \Lambda \text{ en } \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \quad [1.05.15 \text{ i}]$$

Las permeancias en el sistema M.K.S., $\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$, se obtienen poniendo todas las dimensiones lineales en m y la permeabilidad que resulte de tomar para el aire $\mu = 1$, con $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{T}}{\text{Av/m}}$. En el sistema C.G.S. las permeancias se deducen poniendo las longitudes en cm y la permeabilidad correspondiente a adoptar; para el aire, el valor $\mu = 1$ y siempre $\mu_0 = 1 \frac{\text{G}}{\text{Oe}}$.

En particular para cualquier trayecto magnético homogéneo totalmente concatenado, ya se trate de un flujo de autoinducción o de inducción mútua, fig. 1.05.15 a, las permeancias respectivas vienen dadas en función de las dimensiones geométricas y de la permeabilidad del trayecto considerado, en las unidades citadas, por

$$\Lambda_\sigma = \mu \frac{S_\sigma}{a_\sigma} = \mu \frac{h_\sigma l_{m\sigma}}{a_\sigma} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \quad [1.05.15 \text{ j}]$$

$$\Lambda_M = \mu \frac{S_M}{a_M} = \mu \frac{h_M l_{mM}}{a_M} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \quad [1.05.15 \text{ k}]$$

valores de los cuales se deducen unas permeancias específicas o por unidad de longitud transversal l_m

$$\lambda_\sigma = \frac{\Lambda_\sigma}{l_{m\sigma}} = \mu \frac{h_\sigma}{a_\sigma} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \quad [1.05.15 \text{ l}]$$

$$\lambda_M = \frac{\Lambda_M}{l_{mM}} = \mu \frac{h_M}{a_M} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \quad [1.05.15 \text{ m}]$$

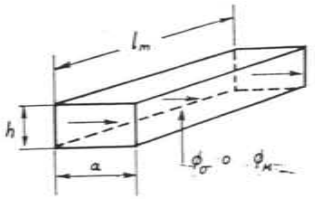


Fig. 1.05.15 a. Permeancia de un trayecto magnético homogéneo íntegramente concatenado

$$\Lambda = \mu \frac{h \, l_m}{a}; \quad \lambda = \mu \frac{h}{a}$$

En estas expresiones, fig. 1.05.15 a, con uno u otro subíndice,

- S es la sección transversal del circuito en cm²
- h la altura transversal del mismo en cm
- l_m la anchura transversal en cm
- a la longitud o profundidad del trayecto homogéneo en cm
- μ la permeabilidad en G/Oe.

1.06. EL CIRCUITO ELECTROMAGNÉTICO DE DISPERSIÓN

1.06.01. Generalidades

Al tratar ahora de la dispersión nos referimos exclusivamente al efecto autoinductivo de los flujos alternos de esta naturaleza tal como se presentan en los inducidos de las máquinas rotatorias y en los transformadores. La dispersión polar, de flujo constante, en las máquinas de polos salientes (estator de las de corriente continua y rotor de los alternadores) ya se ha visto en el estudio del circuito magnético principal, computándose allí el flujo disperso como sumando que contribuye a aumentar la saturación de los núcleos y de las coronas polares.

La dispersión con corriente alterna que a veces se presenta en ambos órganos (estator y rotor de los motores asincrónicos) engendra f.e.m. de autoinducción las cuales se combinan con la debida al flujo principal y con las caídas de resistencia óhmicas para equilibrar a la tensión en bornes, según mostramos en el diagrama vectorial de la fig. 1.05.02 c.

El cómputo de la dispersión en alterna se hace, pues, a través de las f.e.m. de autoinducción (y en ciertos casos de inducción mutua) a las què da origen. Es, según vimos, (capítulo 1.05), condición esencial para que un flujo alterno pueda tener este carácter de flujo disperso el que su concatenación alcance a las espiras de un solo lado, primario o secundario; en cuanto las líneas de fuerza enlacen a ambos arrollamientos, el flujo interviene como campo principal, resultante de las excitaciones primaria y secundaria.

No es preciso siempre llegar a la valoración numérica del flujo de dispersión para calcular las f.e.m. de reactancia. El coeficiente de autoinducción relacionado con él y las permeancias que lo determinan constituyen parámetros auxiliares suficientes y dependen, como sabemos, de las dimensiones geométricas del circuito magnético donde se asienta dicho flujo, del número de espiras en las bobinas inducidas por él y de la permeabilidad del medio. Afortunadamente para el cálculo, la permeabilidad de estos circuitos, en los cuales suelen dominar los espacios de aire o diamagnéticos, puede considerarse constante si despreciamos la reluctancia mucho menor de los trayectos ferromagnéticos que aparecen en serie con el aire. Ello simplifica notablemente

el planteamiento analítico de los problemas concernientes a la dispersión.

Utilizando además valores relativos, las ecuaciones adquieren una sencillez muy expresiva. Este será el método que seguiremos con preferencia a lo largo de nuestras páginas.

1.06.02. F.e.m. de reactancia por bobina

Para una bobina de N_b espiras concatenadas íntegramente con el flujo de dispersión Φ_{xb} provocado por la corriente alterna i que supondremos senoidal de valor eficaz I amperios, la f.e.m. de reactancia E_{xb} debida a este flujo viene dada, como hemos visto, por, [1.05.03 a],

$$E_{xb} = X_b I = \omega L_{xb} I = 2\pi f L_{xb} I \quad \text{(V)} \qquad [1.06.02\ a]$$

siendo X_b la reactancia de dispersión, [1.05.15. d y e] :

$$X_b = \omega L_{xb} = 2\pi f L_{xb} \qquad [1.06.02\ b]$$

y L_{xb} la inductancia de la bobina, [1.05.15 b y c],

$$L_{xb} = N_b^2 \Lambda_{xb} \quad \text{(H)} \quad \text{con } \Lambda_{xb} \text{ en } \frac{\text{Wb}}{\text{Av}} \qquad [1.06.02\ c]$$

o

$$L_{xb} = 4\pi \cdot 10^{-9} N_b^2 \Lambda_{xb} \quad \text{(H)} \quad \text{con } \Lambda_{xb} \text{ en } \frac{\text{M}}{\text{Gb}} \qquad [1.06.02\ d]$$

donde Λ_{xb} representa la permeancia del circuito magnético de dispersión concerniente a la bobina en cuestión, de N_b espiras.

Poniendo explícitamente las reactancias y las f.e.m. de autoinducción E_{xb} en función de la permeancia del circuito, en unidades M.K.S.

$$X_b = 2\ \pi\ f\ L_{xb} = 2\ \pi f N_b^2\ \Lambda_{xb} \quad (\Omega) \qquad [1.06.02\ e]$$

$$E_{xb} = X_b\ I = 2\ \pi f L_{xb}\ I = 2\pi f N_b^2 \Lambda_{xb}\ I \quad \text{(V)} \qquad [1.06.02\ f]$$

(f en Hz, Λ_{xb} en Wb/Av, L_{xb} en H, X_b en Ω)

y con la permeancia en unidades C.G.S. manteniendo las otras magnitudes invariables

$$X_b = 2\pi f L_{xb} = 8\pi^2 \cdot 10^{-9} f N_b^2 \Lambda_{xb} \ (\Omega) \qquad [1.06.02\ g]$$

$$E_{xb} = X_b\ I = 2\pi f L_{xb}\ I = 8\ \pi^2 \cdot 10^{-9} f N_b^2\ \Lambda_{xb} I \quad \text{(V)} \qquad [1.06.02\ h]$$

(f en Hz, Λ_{xb} en M/Gb, L_{xb} en H, X_b en Ω).

Las dos últimas expresiones [g] y [h] constituyen fórmulas prácticas para el cálculo de las f.e.m. de reactancia por bobina, y se reducen, en suma al cálculo geométrico de las permeancias equivalentes Λ_{xb}.

1.06.03. **F.e.m. de reactancia por fase**

Pasemos ahora al conjunto del inducido en una máquina polifásica, a fin de evaluar esta f.e.m. por fase. Asignemos exclusivamente a las ranuras todo el valor de la permeancia de dispersión imaginando concentrada en cada una de ellas la parte proporcional de la dispersión en el resto del circuito magnético. A esta *permeancia concentrada, por ranura*, la designaremos simplemente por Λ_x, en las unidades que convenga. Si n es el número de ranuras del inducido y m el de fases de la máquina, el de ranuras por fase será $\frac{n}{m}$ y el bobinas por fase $\frac{n}{2m}$, entendiéndose que un solo lado de bobina ocupa a estos efectos toda la ranura, es decir, que a cada lado de aquélla le corresponde la permeancia Λ_x, o a cada dos de ellos, que son los que entran por bobina, les afecta una permeancia de dispersión $\Lambda_{xb} = 2\,\Lambda_x$. Respecto al número de espiras por bobina, N_b, coincide así con el de conductores por ranura Z_n y si $Z = n\,Z_n$ son los conductores totales, del inducido, supuestos en serie todos los de una fase, y n_{pf} el número de ranuras por polo y fase,

$$n_{pf} = \frac{n}{2\,p \cdot m} \qquad [1.06.03\ a]$$

la inductancia de dispersión por fase, resulta ser, en el sistema M.K.S., (Λ en Wb/Av), [1.06.02 c],

$$L_x = \left(\frac{n}{2\,m}\right) L_{xb} = \left(\frac{n}{2\,m}\right)(N_b^2\,\Lambda_{xb}) = \left(\frac{n}{2\,m}\right) Z_n^2\,(2\Lambda_x) = Z_n^2\left(\frac{n\,\Lambda_x}{m}\right) \text{ (H)/fase} \qquad [1.06.03\ b]$$

$$= 2p n_{pf}\,Z_n^2 \Lambda_x \quad \text{(H/fase)} \qquad [1.06.03\ c]$$

La reactancia de dispersión por fase,

$$X = 2\pi f L_x = 2\pi f Z_n^2\left(\frac{n\,\Lambda_x}{m}\right) = 4\pi f \cdot p\, n_{pf}\, Z_n^2\,\Lambda_x \quad (\Omega/\text{fase}) \qquad [1.06.03\ d]$$

y la f.e.m. de a.i. por fase, siendo I la corriente también por fase

$$E_x = X \cdot I = 2\pi f Z_n^2\left(\frac{n\,\Lambda_x}{m}\right) I = 4\pi f\, p\, n_{pf}\, Z_n^2\,\Lambda_x I \text{ (V/fase)} \qquad [1.06.03\ e]$$

La permeancia concentrada por ranura Λ_x puede ponerse en función de una permeancia específica λ_x por unidad de longitud axial del inducido y de la longitud total L del mismo.

$$\lambda_x = \frac{\Lambda_x}{L}\left(\frac{\text{Wb/Av}}{\text{m}}\right) \text{ o } \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.03\ f]$$

con lo cual las fórmulas de la dispersión se convierten finalmente en

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 2\,p\,n_{pf}\;\; Z_n^2\,(\lambda_x\,L) \quad \text{(H/fase)} \\ X &= 4\pi f\,p n_{pf}\,Z_n^2\,(\lambda_x\;L) \quad (\Omega/\text{fase}) \\ E_x &= 4\pi f\,p n_{pf}\,Z_n^2\,(\lambda_x\,L)\,I \text{ (V/fase)} \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} \text{con } f \text{ en Hz} \\ L \text{ en m} \\ \lambda_x \text{ en } \dfrac{\text{Wb/Av}}{\text{m}} \end{array} \qquad [1.06.03\ g]$$

y

$$\left.\begin{aligned} L_x &= 8\,\pi \cdot 10^{-9}\,p\,n_{pf}\;Z_n^2\;(\lambda_x\;L) \\ X &= 16\,\pi^2 \cdot 10^{-9} f\,p\,n_{pf}\,Z_n^2\,(\lambda_x\,L) \\ E_x &= 16\,\pi^2 \cdot 10^{-9} f\,p\,n_{pf}\,Z_n^2\,(\lambda_x\,L)\,I \end{aligned}\right| \begin{array}{l} \text{(H/fase)} \\ (\Omega/\text{fase}) \\ \text{(V/fase)} \end{array} \left.\begin{array}{l} \text{con } f \text{ en Hz} \\ L \text{ en cm} \\ I \text{ en A} \\ \lambda \text{ en } \dfrac{\text{M/Gb}}{\text{cm}} \end{array}\right\} \qquad [1.06.03\ h]$$

Para $f = 50$ Hz, y simplificando, se tiene, en estas últimas unidades,

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \frac{p\,n_{pf}}{39{,}8}\,Z_n^2\;(L\;\lambda_x) \cdot 10^{-6} \\ X &= 7{,}9 \cdot p\;n_{pf}\;Z_n^2\;(L\;\lambda_x) \cdot 10^{-6} \\ E_x &= 7{,}9\;p\;n_{pf}\;Z_n^2\;I\;(L\;\lambda_x)\;10^{-6} \end{aligned}\right| \begin{array}{ll} \text{(H/fase)} & [1.06.03\ i] \\ (\Omega/\text{fase}) & [1.06.03\ j] \\ \text{(V/fase)} & [1.06.03\ k] \end{array}$$

Incidentalmente, hagamos notar que *para un rotor de jaula de ardilla*, el número de espiras por bobina, el de ranuras por polo y fase, el de conductores por ranura y el de fases, resultan ser:

$$N_b = 1, \quad n_{pf} = 1, \quad Z_n = 1, \quad m = \frac{n}{2p}, \qquad [1.06.03\ l]$$

quedando forzosamente en paralelo p bobinas, de una sola espira cada una, por fase. Sea por último I_b la corriente por barra. La corriente por fase,

$$I = p\ I_b \qquad [1.06.03\ m]$$

Si la permeancia de una bobina vale $\Lambda_{xb} = 2\ \Lambda_x$, $\left(\frac{\text{Wb}}{\text{Av}}\right)$,

la de p bobinas en paralelo nos dará un valor de la inductancia por fase

$$L_x = \frac{(N_b^2\ \Lambda_{xb})}{p} = \frac{2\ \Lambda_x}{p} = \frac{2\ \lambda_x\ L}{p}\ \text{(H/fase)} \qquad [1.06.03\ n]$$

La reactancia

$$X = 2\ \pi f\ L_x = \frac{4\ \pi f \Lambda_x}{p} = \frac{4\ \pi f\ \lambda_x\ L}{p}\ (\Omega\text{/fase}) \qquad [1.06.03\ o]$$

Y la f.e.m. de autoinducción, con $I = p\ I_b$,

$$E_x = X\ I = 4\ \pi f\ \lambda_x\ L\ I_b\ \ \text{(V/fase)} \qquad [1.06.03\ p]$$

(con f en Hz, L en m, λ_x en $\frac{\text{Wb/Av}}{\text{m}}$ e I_b en A).

Poniendo Λ_x y λ_x en unidades C.G.S., lo que equivale a tomar todas sus dimensiones lineales en cm,

$$\left.\begin{array}{ll} L_x = 8\ \pi\ 10^{-9}\ \dfrac{(\lambda_x\ L)}{p} & \text{(H/fase)} \\ X = 16\ \pi^2 \cdot 10^{-9}\ f\ \dfrac{(\lambda_x\ L)}{p} & (\Omega\text{/fase}) \\ E_x = 16\ \pi^2 \cdot 10^{-9}\ f \cdot (\lambda_x\ L)\ I_b & \text{(V/fase)} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{con } f \text{ en Hz} \\ L \text{ en cm} \\ I_b \text{ en A} \\ \lambda_x \text{ en } \dfrac{\text{M/Gb}}{\text{cm.}} \end{array} \qquad [1.06.03\ q]$$

Las cifras así calculadas corresponden a *una fase integrada por p grupos en paralelo de dos barras en serie por grupo.*

Por barra, resultarían, pues, unos valores exactamente mitad de los anteriores para la f. e. m. E_b; y $(p/2)$ veces los anteriores para L_x y X.

1.06.04. Circuitos locales de dispersión y sus permeancias

Con el fin de poder efectuar el estudio analítico de la dispersión de los arrollamientos, es preciso considerar separadamente cada uno de los circuitos por donde discurren los flujos de esta naturaleza sin perjuicio de referir luego dicha permeancia, acumulada, a las ranuras para llegar al valor propuesto

de Λ_x y mejor, aún, al de la permeancia específica o por unidad de longitud de ranuras λ_x que hemos definido: $\lambda_x = \frac{\Lambda_x}{L}$

La división más aconsejable de los circuitos de dispersión es la siguiente:

a) ranuras propiamente dichas (en todas las máquinas)
b) cabezas de dientes (alternadores de polos salientes)
c) zig-zag o dispersión doblemente concatenada (motores de inducción)

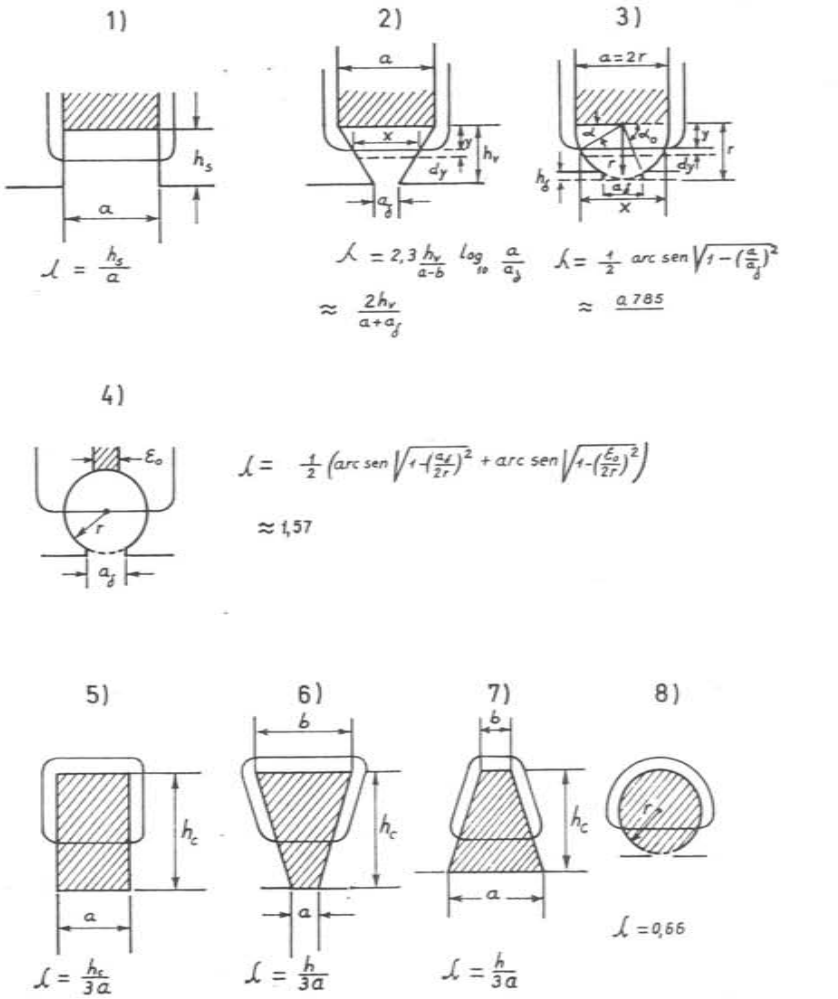


Fig. 1.06.04 a. Permeancias específicas de los elementos del circuito magnético de dispersión, para las ranuras.

d) cabezas de bobinas (todas las máquinas).

Siendo más cómodo el cálculo de las permeancias C.G.S., emplearemos exclusivamente para ello este sistema de unidades.

Toda ranura y en general cualquier forma compleja del circuito magnético puede considerarse descompuesta en varias secciones diferentes con características geométricas y de concatenaciones distintas. Como base previa al cálculo de la permeancia combinada de una ranura nos conviene establecer la permeancia específica local λ para estas formas simples del circuito magnético. La fig. 1.06.04 a muestra los casos más representativos cuya presencia se repite en diversos tipos de ranuras.

1) *Circuito prismático de concatenación íntegra*

$$\boxed{\lambda = \mu \frac{h_r}{a}} \qquad [1.06.04\ a]$$

2) *Circuito trapecial de concatenación íntegra*

$$d\lambda = \mu \frac{dy}{x}\ ;\ x = a - (a - a_\delta)\frac{y}{h_r}\ ;$$

$$y = \frac{a - x}{a - a_\delta} h_r = \frac{a h_r}{a - a_\delta} - \frac{x h_r}{a - a_\delta},\ dy = -\frac{h_r}{a - a_\delta} dx$$

$$d\lambda = -\mu \frac{h_r}{a - a_\delta} \frac{dx}{x}$$

$$\boxed{\lambda} = \int_a^{a_\delta} -\mu \frac{h_r}{a - a_\delta} \frac{dx}{x} = \mu \frac{h_r}{a - a_\delta} \log_e \frac{a}{a_\delta} = \boxed{2{,}3\ \mu \frac{h_\delta}{a - a_\delta} \log_{10} \frac{a}{a_\delta}} \qquad [1.06.06\ b]$$

Abreviadamente se puede tomar sin gran error la media aritmética

$$\boxed{\lambda = \mu \frac{2\ h_r}{a + a_\delta}} \qquad [1.06.04\ b']$$

3) *Circuito semicircular de concatenación íntegra*

$$d\lambda = \mu \frac{dy}{x};\quad x = 2\ r \cos \alpha$$

$$y = r \operatorname{sen} \alpha$$

$$dy = r \cos \alpha\ d\alpha.$$

$$d\lambda = \mu \frac{r \cos \alpha\ d\alpha}{2\ r \cos \alpha} = \mu \frac{d\alpha}{2}$$

$$\lambda = \int_0^{\alpha_0} \mu \frac{d\alpha}{2} = \mu \frac{\alpha_0}{2}$$

α_0 debe expresarse en radianes y viene definido en función, por ejemplo, de su seno, por

$$\alpha_0 = \text{arc sen}\ \frac{r - h_\delta}{r} = \text{arc sen}\left(1 - \frac{h_\delta}{r}\right)$$

o bien

$$\alpha_0 = \text{arc sen}\ \frac{r - h_\delta}{r} = \text{arc sen}\ \frac{\sqrt{r^2 - \left(\frac{a_\delta}{2}\right)^2}}{r} = \text{arc sen}\ \sqrt{1 - \left(\frac{a_\delta}{2r}\right)^2}$$

de donde

$$\boxed{\lambda = \frac{\mu}{2} \text{arc sen}\left(1 - \frac{h_\delta}{r}\right) = \frac{\mu}{2} \text{arc sen}\ \sqrt{1 - \left(\frac{a_\delta}{a}\right)^2}} \qquad [1.06.04\ c]$$

siempre con el arco expresado en radianes.

Si $a_\delta = 0$

$$\boxed{\lambda} = \frac{\mu}{2} \text{arc sen}\ 1 = \frac{\mu}{2}\frac{\pi}{2} = \mu \frac{\pi}{4} = \boxed{\mu \cdot 0{,}785} \qquad [1.06.04\ d]$$

que es un valor, muy aproximado en cualquier caso práctico, independiente del radio r.

4) *Circuito circular de concatenación íntegra*

Se compone de dos trayectos como el anterior, situados en paralelo

$$\boxed{\lambda = \frac{\mu}{2}\left(\text{arc sen}\ \sqrt{1 - \left(\frac{a_\delta}{2r}\right)^2} + \text{arc sen}\ \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_0}{2r}\right)^2}\right)} \qquad [1.06.04\ e]$$

suponiendo $a_\delta = \varepsilon_0 = 0$,

$$\boxed{\lambda} = \frac{\mu}{2} 2 \text{ arc sen } 1 = \mu \frac{\pi}{2} = \boxed{\mu \cdot 1{,}57} \qquad [1.06.04\ f]$$

valor suficientemente exacto en todos los casos, independiente del diámetro $2r$.

5) *Circuito prismático en concatenación progresiva.* Ya vimos que en este caso, [1.05.06 g y j], aplicado ahora a la figura 1.06.04 a, 5),

$$\boxed{\lambda = \mu \frac{h_c}{3a}} \qquad [1.06.04\ g]$$

6 y 7) *Circuitos trapeciales en concatenación progresiva* (1) Son equivalentes al anterior tomando como anchura del circuito magnético la correspondiente a la entrada de la ranura. Así, para los dos casos, fig. 1.06.04 a, 6) y 7)

$$\boxed{\lambda = \mu \frac{h_c}{3a}} \qquad [1.06.04\ h]$$

8) *Circuito circular en concatenación progresiva.* Independientemente del tamaño de la ranura,

$$\boxed{\lambda = \mu \cdot 0{,}66} \qquad [1.06.04\ i]$$

En el sistema C.G.S. todas las longitudes, en cm. Además, $\mu = 1$.

1.06.05. Corrección por la longitud efectiva de inducido

Las permeancias específicas reseñadas tienen los valores indicados por unidad de longitud axial (por cm) del circuito magnético parcial que se considere. La longitud efectiva L_n sobre la cual se extienden estos circuitos de dispersión, cuando existen canales de ventilación radial se halla siempre comprendida entre la suma $L_h = \Sigma\, l_h$ de las longitudes brutas de los paquetes de chapa y la longitud geométrica total del inducido L ya que las líneas de fuerza al cruzar las ranuras se ensanchan lateralmente sobre los canales de ventilación citados, fig. 1.06.05 a.

El fenómeno es similar al de la expansión del flujo principal al cruzar el entrehierro frente a los mismos canales de ventilación, fig. 1.04.09 a.

(1) Unger. «Die Streuung einer trapezförmiger Nut». Arch f. El. 1926. Vol. 17 Págs. 467. ETZ 1927, pág. 1229.

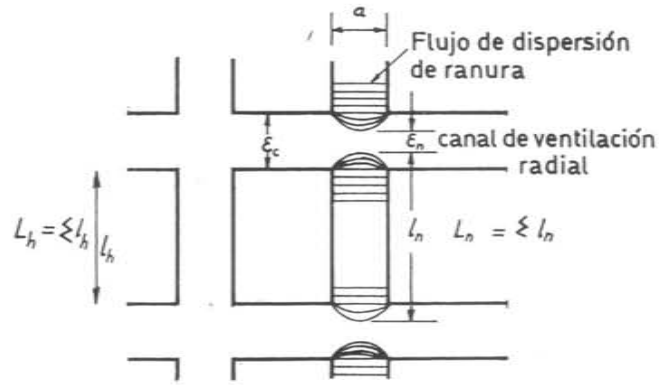


Fig. 1.06.05 a. Expansión del flujo de dispersión de ranuras frente a los canales de ventilación radial.

La longitud axial ε_c de los canales se comporta en la dispersión como las ranuras ante el flujo principal; de acuerdo con ello se han trazado las curvas de la fig. 1.06.05 b que nos dan la anchura perdida del canal ε_n en función de la luz a de la ranura. Ambas curvas coinciden en valores con las de las figs. 1.04.09 b y c a igualdad de relaciones $\frac{a}{\varepsilon_c}$ y $\frac{\delta}{a}$ respectivamente.

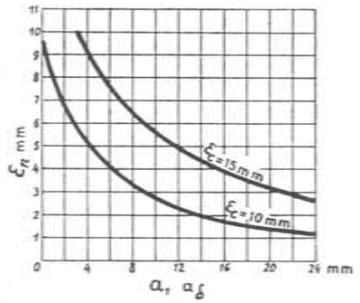


Fig. 1.06.05 b. Pérdida de longitud efectiva ε_n por canal de ventilación radial, a los efectos del flujo de dispersión en las ranuras, en función de la luz, a o a_δ de la ranura misma, frente a los canales, y de la anchura geométrica del canal en cuestión ε_c.

La longitud axial efectiva para el flujo de dispersión de ranura pasa a ser

$$\boxed{L_n = L - n_c\ \varepsilon_n} \qquad [1.06.05\ a]$$

La permeancia correspondiente a una ranura alcanza, pues, el valor

$$\Lambda = L_n \lambda$$

y referida a la longitud geométrica del inducido, como lo haremos en todos los casos, se tendrá

$$\lambda_r L = \lambda L_n$$

lo que equivale a tomar como permeancia específica de ranura un valor corregido

$$\boxed{\lambda_r = \lambda \frac{L_n}{L}} \qquad [1.06.05\ b]$$

Si la anchura a de la ranura no es uniforme la longitud L_n variará en consecuencia según las diversas zonas del circuito de dispersión de la misma pudiendo adoptarse en cada sección parcial un valor medio de L_n

1.06.06. Corrección por efecto superficial

Cuando se trata de conductores de gran altura en sentido radial, es decir, en sentido perpendicular al flujo disperso según el esquema de concatena-

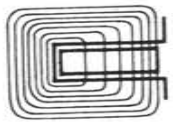


Fig. 1.06.06 a. Adensamiento de las líneas de fuerza autoinductivas hacia la capa exterior del conductor.

ciones progresivas, fig. 1.06.06 a, la mayor reactancia de los filamentos de corriente próximos al fondo de la ranura, que se hallan enlazados con un número más elevado de líneas de fuerza autoinductivas, tiende a aumentar la densidad de corriente en las capas superficiales próximas al entrehierro, con lo cual se producen dos efectos secundarios: un incremento aparente de la resistencia eléctrica del conductor, que estudiaremos detenidamente al analizar las pérdidas en las máquinas, y una disminución simultánea del número de concatenaciones efectivas, equivalente a una reducción de la permeancia de dispersión, en la masa del conductor. Cuando se trata de barras macizas únicas, como en el caso de los motores asincrónicos de corto circuito con ranura profunda, ambos efectos son considerables y se utilizan eficazmente para mejorar las condiciones de arranque.

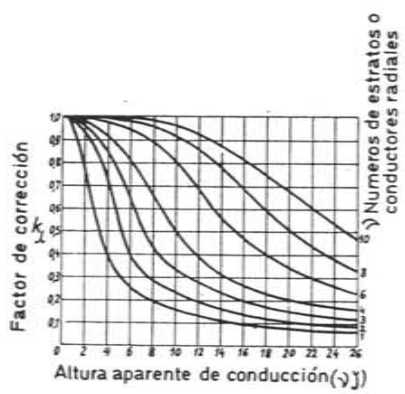


Fig. 1.06.06 b. Factor de corrección k_λ para la permeancia de dispersión en el cuerpo del bobinado dentro de la ranura en función de la «altura aparente de conducción» $\nu\zeta$.

El coeficiente de corrección k_λ a aplicar por este motivo a la permeancia del cuerpo de bobina en las ranuras se deduce de la fig. 1.06.06 b en funciór de un parámetro ($\nu\zeta$) denominado *altura aparente de conducción* definido como sigue:

ν = número de estratos de conductores aislados, radialmente superpuestos.

ζ = parámetro sin dimensión, (geométricamente, ángulo en radianes) no obstante lo cual suele llamársele «altura equivalente», dado por

$$\boxed{\zeta = \alpha\ h} \quad (\text{cm}^0) \qquad [1.06.06\ a]$$

siendo

h = altura radial del conductor simple, en cm, o suma de las alturas radiales simples si el conductor es múltiple compuesto de varias barras aisladas superpuestas en paralelo, y

$$\boxed{\alpha = 0,2\,\pi\sqrt{\frac{a_c}{a}\,\frac{H_c}{H}\,\frac{f}{10^3\,\varrho\,k_\alpha}}} \quad (\text{cm}^{-1}); \qquad [1.06.06\ b]$$

a = anchura de la ranura

a_c = anchura de la misma ocupada por los conductores

H_c = altura neta de conductores en la ranura (fig. 1.10.25 a y b)

H = Altura entre planos extremos de conductores (fig. 1.10.25 a y b)

f = frecuencia en Hz

ϱ = resistividad del conductor en $\dfrac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

k_α = coeficiente de circulación local o de corrección por conductores en paralelo, igual a 1 si cada conductor va compuesto de una sola barra o hilo o si los componentes se hallan situados en el mismo estrato dando una altura h simple; si los varios hilos o barras van superpuestos radialmente con una altura h múltiple, y aislados entre sí, se tiene

$$\boxed{k_\alpha = \frac{L_n}{l_m} \approx \frac{L_h}{l_m} \approx \frac{L}{l_m}} \qquad [1.06.06\ c]$$

donde L_n es la longitud axial efectiva de dispersión para el cuerpo de los conductores [1.06.05 a] y l_m la longitud media por conductor. Para esta corrección puede sustituirse, sin error apreciable, a la longitud efectiva L_n la longitud total de los paquetes de chapa L_h e incluso la longitud L del inducido con sus canales de ventilación radial. Todas las longitudes se expresarán en la misma unidad.

Para el cobre a 50 Hz, α tiene casi siempre un valor próximo a 1. Por ejemplo, si $\rho = 0{,}0217$, $\frac{a_c}{a}\frac{H_c}{H} = 0{,}9$ y $k_\alpha = 1$, resulta $\alpha = 0{,}905$.

La ecuación que conduce a los valores del factor de corrección, fig. 1.06.06 a, es la siguiente:

$$k_\lambda = \frac{1}{\nu^2}\varphi(\zeta) + \frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}\psi(\zeta)$$

con

$$(\zeta) = \frac{2}{3\zeta}\cdot\frac{\operatorname{Sh} 2\zeta - \operatorname{sen} 2\zeta}{\operatorname{Ch} 2\zeta - \cos 2\zeta}$$

y

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta}\frac{\operatorname{Sh}\zeta - \operatorname{sen}\zeta}{\operatorname{Ch}\zeta - \cos\zeta}$$

1.06.07 Ejemplos

Fórmulas de la permeancia específica equivalente de las ranuras, λ_r para varios tipos de las mismas $\left(\text{en unidades G.G.S., } \frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$.

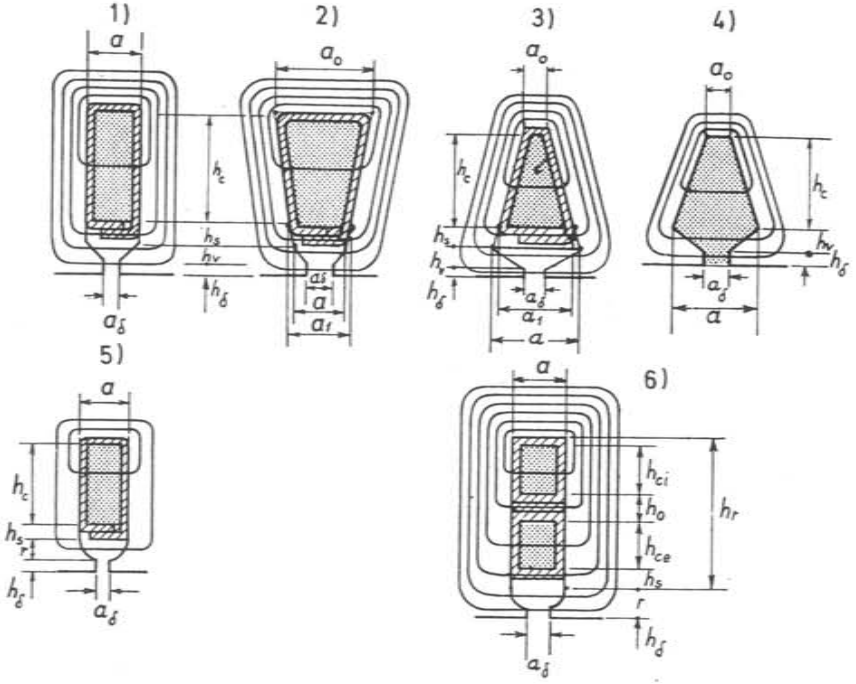


Fig. 1.06.07 a. Cálculo de la permeancia específica de ranura λ_r para distintas formas de las mismas y del bobinado.

La fig. 1.06.07 a muestra varias disposiciones de estas ranuras.
Aplicando los métodos y principios expuestos tendremos
Fig. 1). Devanado en una capa, ranura rectangular semicerrada

$$\lambda r = \left(\frac{h_c}{3a}\right)\frac{L_{n\alpha}}{L}k_\lambda + \left(\frac{h_s}{a}\right)\frac{L_{n\alpha}}{L} + \left(\frac{2h_v}{a + a_\delta}\right)\frac{L_{n\alpha} + L_{n\alpha\delta}}{2L} + \left(\frac{h_\delta}{a_\delta}\right)\frac{L_{n\alpha\delta}}{L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \quad [1.06.07\ a]$$

$\frac{L_{n\alpha}}{L}$ y $\frac{L_{n\alpha\delta}}{L}$ son los coeficientes de reducción de la permeancia lineal para referirla a la longitud geométrica L del inducido

$$L_{n\alpha} = L - n_c\,\varepsilon_{n\alpha} \qquad L_{n\alpha\delta} = L - n\,\varepsilon_{n\alpha\delta} \quad [1.06.07\ b]$$

Los subíndices adicionales a y a_δ aplicados a L_n y a ε_n valen para distinguir la abertura correlativa que hay que tomar como referencia sobre el eje de abscisas de la figura 1.06.05 b al deducir ε_n en función de estas dimensiones y de la anchura ε_c del canal mismo.

$\frac{L_{n\alpha} + L_{n\alpha\delta}}{2L}$ es el promedio de ambos coeficientes anteriores aplicable a la permeancia específica $\frac{2h_v}{a + a_\delta}$ de la zona trapecial.

k_λ es el factor de corrección por efecto superficial, aplicable a la permeancia del cuerpo de bobina, a tomar de la fig. 1.06.06 b en función del número de capas o estratos conductores radiales ν y de la altura aparente de conducción ($\nu\zeta$), con, [1.06.06 a y b],

$$\zeta = 0{,}2\,\pi h\sqrt{\frac{a_c}{a}\frac{H_c}{H}\frac{f}{10^3\,\rho k_\alpha}} \quad [1.06.07\ c]$$

Sobre el significado de los símbolos y las unidades a emplear en esta fórmula véanse las ecuaciones citadas [1.06.06 a y b]
Fig. 2 y 3). Devanado en una capa, ranura trapecial semicerrada

$$\lambda_r = \left(\frac{h_s}{3\,a_1}\right)\frac{L_{n\alpha 0} + L_{n\alpha 1}}{2L}k_\lambda + \left(\frac{2h_s}{a_1 + a}\right)\frac{L_{n\alpha 1} + L_{n\alpha}}{2\lambda} + \left(\frac{2h_v}{a + a_\delta}\right)\frac{L_{n\alpha} + L_{n\alpha\delta}}{2L} + \left(\frac{h_\delta}{a_\delta}\right)\frac{L_{n\alpha\delta}}{L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \quad [1.06.07\ d]$$

$$\simeq \left(\frac{h_c}{3a}k_\lambda + \frac{h_s}{a}\right)\frac{L_{n\alpha}}{L} + \left(\frac{2h_v}{a + a_\delta}\right)\frac{L_{n\alpha} + L_{n\alpha\delta}}{2L} + \left(\frac{h_\delta}{a_\delta}\right)\frac{L_{n\alpha\delta}}{L_n}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \quad [1.06.07\ e]$$

$L_{n\alpha 0}$, $L_{n\alpha 1}$, $L_{n\alpha}$ y $L_{n\alpha\delta}$ se determinan siempre en función de las luces de ranura a_0, a_1, a, a_δ y de la anchura de los canales de ventilación ε_c según la fig. 1.06.05 b y ecuación general [1.06.05 a]

$$L_n = L - n_c\,\varepsilon_n$$

Cuanto al valor de ζ, del cual se deriva k_λ por la figura 1.06.06 b, puede calcularse de acuerdo con [1.06.07 c] a base de un promedio de la anchura variable $a_0 \ldots a_1$.
Fig. 4). Ranura trapezoidal con relleno macizo de conductor (en aluminio inyectado, por ejemplo). En este caso el núcleo se hace siempre continuo sin canales de ventilación radial.

$$\lambda_r = \left(\frac{h_e}{3a} + \frac{h_v}{3\,a_\delta} + \frac{h_\delta}{a_\delta}\right) k_\lambda \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.07\ \text{f}]$$

El valor de la altura h del conductor para deducir el de k_λ según la figura 1.06.06 b puede tomarse igual a $(h_e + h_v)$.

Fig. 5). Ranura rectangular semicerrada con cuña semicilíndrica

$$\lambda_r = \left(\frac{h_e}{3a}\right)\frac{L_{ne}}{L} k_\lambda + \left(\frac{h_v}{a}\right)\frac{L_{ne}}{L} + 0{,}785\,\frac{L_{nr}}{L} + \left(\frac{h_\delta}{a_\delta}\right)\frac{L_{n\delta}}{L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.07\ \text{g}]$$

Para el cálculo de L_{nr} correspondiente a la zona semicircular puede partirse de un ancho medio de ranura igual a r

Fig. 6) Bobinado en dos capas supuesto de paso acortado

$$\lambda_r = \left(\frac{h_{ci} + h_{cs}}{3\,a} + \frac{h_0}{4\,a}\right) k_c \frac{L_{ne}}{L} k_\lambda + \left(\frac{h_v}{a}\right) k_a \frac{L_{ne}}{L} + 0{,}785\, k_a \frac{L_{nr}}{L} + \left(\frac{h_\delta}{a_\delta}\right) k_a \frac{L_{n\delta}}{L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.07\ \text{h}]$$

Al primer término que introduce en la expresión, como consecuencia del concatenado progresivo, el factor $\frac{1}{3}$ de la altura total de conductores $h_{ci} + h_{cs}$, hemos incorporado además $\frac{1}{4}$ de la permeancia de separación entre ambas capas $\left(\frac{h_0}{4\,a}\right)$, teniendo en cuenta que esta parte del circuito magnético enlaza íntegramente la mitad de los conductores por ranura (1); k_c es el factor para el cuerpo de la bobina y k_a para el espacio exterior al mismo que tienen en cuenta el desfase de la corriente en ambas capas dentro de ciertas ranuras, según la figura 1.05.14 c, en función del paso relativo de bobina $\frac{y_n}{n_y}$; los coeficientes de corrección por longitud axial útil $\frac{L_n}{L}$ y por efecto superficial k_λ se deducen como para los casos anteriores de acuerdo con las figuras 1.06.05 a y 1.06.06 b, respectivamente.

Observaciones: El método detallado que acabamos de describir es, como vemos, bastante laborioso por las numerosas correcciones a efectuar sobre las diversas permeancias locales de ranura. Como quiera que los resultados no suelen ser, pese a todo, muy exactos, debiendo adoptarse, al final, un amplio margen de seguridad, es frecuente acudir a simplificaciones en el proceso de cálculo que prescinden de una o varias de estas correcciones salvo aquellos casos en que su influencia es manifiesta. Así para máquinas corrientes con ranuras como las de la última figura no es raro limitar la expresión de la permeancia específica a la siguiente fórmula.

$$\lambda_r = \frac{h_r}{3a} + 0{,}785 + \frac{h_\delta}{a_\delta}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.07\ \text{i}]$$

(1) Esta solución se justificará al estudiar la dispersión en los transformadores (párr. 1.06.17).

1.06.08. Permeancia específica de las cabezas de diente λ_t y permeancia en zig-zag λ_z

Cabe distinguir los alternadores y motores síncronos con fuertes entrehierros, y los motores de inducción con entrehierros muy reducidos. El flujo de dispersión en las cabezas de dientes es siempre de concatenación íntegra con el bobinado respectivo.

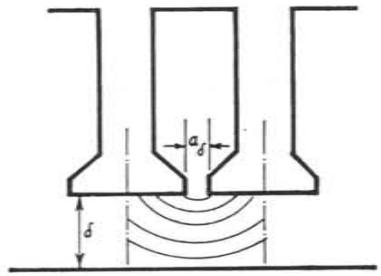


Fig. 1.06.08 a. Permeancia específica de cabeza de dientes.

$$\lambda_t = \frac{\delta}{\alpha_\delta + 0{,}8\,\delta}\,\frac{\psi}{K_L}\,k_a$$

$$\lambda_t = \frac{5\,\frac{\delta}{a_\delta}}{5 + \frac{4}{a_\delta}\,\delta}\,\frac{\psi}{K_L}\,k_a$$

Para las máquinas de *fuerte entrehierro*, el valor de la permeancia específica en unidades C.G.S. puede calcularse por una de estas dos ecuaciones (fig. 1.06.08 a)

$$\lambda_t = \frac{\delta}{a_\delta + 0{,}8\delta}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

o bien

$$\lambda_t = \frac{5\,\frac{\delta}{a_\delta}}{5 + \frac{4\delta}{a_\delta}}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

Si el entrehierro es variable, se toma para δ un valor medio.

El referir esta permeancia a la longitud geométrica total del inducido L requiere afectarla previamente de la relación $\frac{L_\delta}{L} = \frac{1}{K_L}$ entendiendo por L_δ [1.04.09 a].

$$L_\delta = L - n_c\,\varepsilon_\delta$$

es decir, la misma longitud que intervino en el cálculo de la inducción efectiva en el entrehierro debida al flujo principal. Si además el devanado es de dos capas, la permeancia de cabeza de dientes debe corregirse según el coeficiente k_a que se aplica a la parte de aire en las ranuras, fig. 1.05.14 c, y cuando

Tabla 1.06.08 a. — *Factor para la permeancia de zig-zag en los devanados trifásicos*

n_{pf} = 2 *ranuras por polo y fase*

Paso relativo y_n/n_p =	6/6	5/6	4/6	3/6	2/6
$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ =	0,0265	0,0205	0,0199	0,0133	0,0066

n_{pf} = 3 *ranuras por polo y fase*

Paso relativo y_n/n_p =	9/9	8/9	7/9	6/9	5/9	4/9	3/9
$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ =	0,0129	0,0103	0,009	0,0097	0,0077	0,0052	0,0032

Σn_{pf} = 4 *ranuras por polo y fase*

Paso relativo y_n/n_p =	12/12	11/12	10/12	9/12	8/12	7/12	6/12	5/12	4/12
$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ =	0,0082	0,0066	0,0055	0,0054	0,0061	0,0053	0,0041	0,0028	0,002

n_{pf} = 5 *ranuras por polo y fase*

Paso relativo

y_n/n_p =	15/15	14/15	13/15	12/15	11/15	10/15	9/15	8/15	7/15	6/15	5/15
$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ =	0,0059	0,0050	0,0038	0,0034	0,0038	0,0044	0,0041	0,0034	0,0025	0,0018	0,0015

n_{pf} Ran. por polo y fase	Paso relativo y_n/n_p = 1	≈ 0.8 (1.er mínimo de permeancia)	≈ 0,6 (1.er máximo de permeancia)	≈ 0,4 (2.° mínimo de permeancia)
n_{pf} = 6	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ = 0,0047	0,0025	0,0034	0,0013
n_{pf} = 7	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ = 0,004	0,0018	0,0030	0,0010
n_{pf} = 8	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ = 0,0035	0,0015	0,0026	0,0010
n_{pf} = 9	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ = 0,0032	0,0012	0,0023	0,0008
n_{pf} = 10	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ = 0,0030	0,0010	0,0022	0,0008
n_{pf} = ∞	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ = 0,0020	0,0002	0,0015	0,0004

el alternador es de polos salientes la reactancia no debe computarse más que para aquellas ranuras que se encuentran ante las piezas polares bajo el arco b_p, fig. 1.04.08 a. La acción de las restantes se incluirán, como veremos, en el concepto de reacción transversal de la armadura. En resumen: para las cabezas de dientes de las máquinas sincrónicas de polos salientes

$$\boxed{\lambda_t = \frac{\delta}{a_\delta + 0{,}8\delta} \cdot \frac{L_\delta}{L}\frac{b_p}{\tau_p}k_a = \boxed{\left(\frac{\delta}{a_\delta + 0{,}8\delta}\right)\psi\frac{k_a}{K_L}}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)} \quad [1.06.08\ \text{a}]$$

o

$$\boxed{\lambda_t = \left(\frac{5\frac{\delta}{a_\delta}}{5 + \frac{4\delta}{a_\delta}}\right)\psi\frac{k_a}{K_L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)} \quad [1.06.08\ \text{b}]$$

Si se trata de motores asíncronos de escaso entrehierro y doble ranurado (en rotor y estator) la dispersión de cabeza de dientes se transforma en dispersión *tangencial, en zigzag* o *doblemente concatenada* (fig. 1.06.08 b). Este flujo de dispersión ofrece la particularidad de que no obstante hallarse concatenado, por mitad, solamente con el devanado primario o con el secundario, cruza repetidas veces el entrehierro.

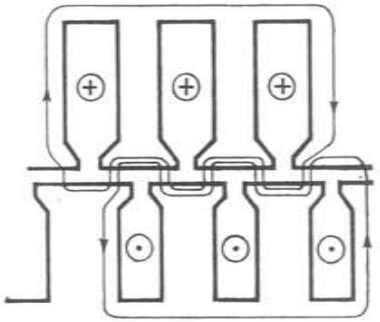


Fig. 1.06.08 b. Permeancia específica de la dispersión en zigzag.

La permeancia específica referida ya a la longitud total del inducido L viene dada por las siguientes ecuaciones:

Para los arrollamientos monofásicos o polifásicos,

$$\boxed{\lambda_z = \frac{n_p}{\pi^2}\frac{\tau_p}{\delta\, K_C k_s K_L}\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2}\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)/\text{cm} \quad [1.06.08\ \text{c}]$$

n_p = número de ranuras por polo $\frac{n}{2p}$

n = número total de ranuras del inducido

p = pares de polos de la máquina

τ_p = paso polar en cm

δ = entrehierro en cm

K_C = coeficiente de CARTER, [1.04.10 a y b]

k_s = coeficiente de saturación [1.04.06. f]

K_L = coeficiente de corrección por longitud activa = $\frac{L}{L_\delta}$ [1.04.09 c].

Tabla 1.06.08 b. — *Factor para la permeancia de zigzag en los devanados bifásicos*

Ranuras por polo y fase n_{pf}	Paso relativo y_n/n_p = 1	≈ 0,66 (mínimo de permeancia)
$n_{pf} = 2$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0717$	—
$n_{pf} = 3$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0388$	0,0177
$n_{pf} = 4$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0270$	0,0107
$n_{pf} = 5$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0216$	0,0075
$n_{pf} = 6$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0187$	0,0054
$n_{pf} = 7$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0169$	0,0045
$n_{pf} = 8$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0157$	0,0036
$n_{pf} = 9$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0149$	0,0031
$n_{pf} = 10$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0143$	0,0029
$n_{pf} = \infty$	$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0119$	0,0013

L = longitud total del inducido incluídos los canales de ventilación radial, en cm.
L_δ = longitud activa del entrehierro = $L - n_c\,\varepsilon_\delta$, [1.04.09.a]
n_c = número de canales de ventilación radial
ε_δ = longitud axial perdida por canal, $\varepsilon_\delta = f(\delta, \varepsilon_c)$ según las figs. 1.04.09 b y c.
ξ_ν = factor de bobinado para el ν^{mo} armónico de campo
ν = orden de los varios armónicos, presentes en la onda de campo, excluida la fundamental; (en los devanados trifásicos se anulan también el 3.er armónico y sus múltiplos y, desde luego, todos los de orden par).

Los valores de $\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$ aparecen en las tablas 1.06.08 a y b en función del número de ranuras por polo y fase n_{pf} y del paso relativo de bobinas, $\frac{y_n}{n_p}$ si se trata en su caso de arrollamientos en doble capa de paso acortado; (y_n, paso de bobinas medido en ranuras).

BIBLIOTECA
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Para los rotores de jaula de ardilla, la permeancia por cm de ranura

$$\lambda_z = \frac{n_p}{\pi^2}\,\frac{\tau_p}{\delta\,K_C\,k_s\,K_L}\;\Sigma\left(\frac{1}{\frac{n_2}{p}\,\nu \pm 1}\right)^2 \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right)/\mathrm{cm} \qquad [1.06.08\ \mathrm{d}]$$

Los símbolos tienen el mismo significado que en la ecuación anterior; la suma Σ se extiende en este caso a todos los armónicos pares e impares incluso la fundamental; n_2 es el número de ranuras del rotor.

Los valores de $\Sigma\left(\frac{1}{\frac{n_2}{p}\,\nu \pm 1}\right)$ pueden tomarse directamente de la tabla 1.06.08 c en función del número de ranuras por polo n_p

Como fórmula simplificada de la permeancia específica en zigzag, puede darse también la siguiente: para el devanado primario

$$\lambda_{z(1)} = \frac{\tau_{\delta(2)} - (a_{\delta(1)} + a_{\delta(2)}) + 2\delta}{12\,\delta}\;\frac{k_{a(1)}}{K_{L(1)}} \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right)/\mathrm{cm} \qquad [1.06.08\ \mathrm{e}]$$

Tabla 1.06.08 c. — *Factor para la permeancia de zigzag en los rotores de corto circuito*

Ranuras por polo $\left(\frac{n_2}{2_p}\right) = n_p$	$\Sigma\left(\frac{1}{\left(\frac{n_2}{p}\right)\nu \pm 1}\right)^2$
3	0,097
4	0,053
5	0,036
6	0,023
7	0,017
8	0,013
9	0,010
10	0,0083
12	0,0057
15	0,0036
20	0,0021
25	0,0013
30	0,0009
40	0,0005
50	0,0003
∞	0,0000

los subíndices adicionales (1) y (2) identifican en esta ecuación al primario o al secundario del motor asíncrono en cuestión bastando permutar éstos para aplicar la fórmula a uno u otro de ambos elementos. El factor $k_{a(1)}$, o $k_{a(2)}$, hace referencia al posible acortamiento del paso en un arrollamiento de doble capa y se obtiene siempre por la figura 1.05.14 c.

La expresión anterior se deduce como sigue: Consideremos por ejemplo, una ranura del estator ante la cual se presenta el rotor en cualquier posición intermedia, fig. 1.06.08 c. Despreciemos, como siempre en estos casos, la reluctancia del hierro, ciñéndonos a tener en cuenta la del aire, limitada ahora al entrehierro; el flujo de dispersión que lo cruza dos veces por cada ranura del estator, admitiremos que se cierra mitad sobre este bobinado

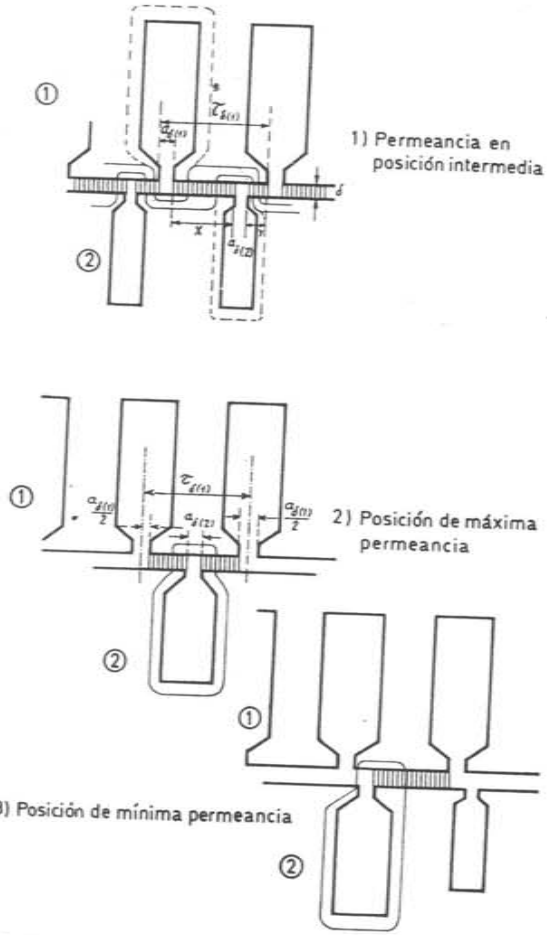


Fig. 1.06.08 c. Cálculo de la dispersión doblemente concatenada.

y mitad sobre el del rotor, lo que equivale también a afectar a uno y otro arrollamiento respectivamente de la mitad de la permeancia ofrecida por el circuito de dispersión considerado.

La reluctancia del mismo por unidad de longitud axial de la ranura inferior (secundario) con ambos trayectos de paso en serie valdrá, evidentemente, contando ya según lo que acabamos de decir, con una permeancia lineal $\lambda_{z(2)}$ para esta ranura mitad de la que ofrece el circuito magnético considerado,

$$\frac{1}{2\,\lambda_{z(2)}} = \frac{\delta}{x} + \frac{\delta}{y}\left(\frac{\text{Gb.cm}}{\text{M}}\right)$$

Si designamos por $\tau_{\delta(1)}$ el paso de ranura superior (primario), es decir, el correspondiente al dentado *opuesto*,

$$y = (\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)}) - x\,;$$

$$\frac{1}{2\,\lambda_{z(2)}} = \delta\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)} - x}\right)$$

y poniendo

$$\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)} = t_{\delta(1)}$$

$$\frac{1}{2\,\lambda_{z(2)}} = \delta\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{t_{\delta(1)} - x}\right)$$

$$2\,\lambda_{z(2)} = \frac{t_{\delta(1)}\,x - x^2}{\delta t_{\delta(1)}} \qquad [1.06.08\ \text{f}]$$

Para una ranura inferior cuyo eje coincida con el del diente superior, (fig. 1.06.08 c 2), $2\,\lambda_{z2}$ es máximo y vale

$$2\,\lambda_{z(2)} = \frac{t_{\delta(1)}}{4\,\delta}$$

Para una segunda ranura inferior cuya posición inicie su presencia frente a otra superior, (fig. 1.06.08 c 3), la permeancia estudiada se reduce a cero.

$$2\,\lambda_{z(2)} = 0$$

Si la variación de $2\lambda_{z(2)}$ fuese lineal, podríamos tomar como promedio de estas permeancias en todas las ranuras del rotor o estator caracterizados por el subíndice 2, la media aritmética de estos valores extremos o sea

$$2\,\lambda_{z(2)} = \frac{t_{\delta(1)}}{8\,\delta}$$

o bien, en definitiva

$$\lambda_{z(2)} = \frac{t_{\delta(1)}}{16\,\delta}$$

Sin embargo, la ley parabólica [f] de $\lambda_{z(2)}$ en función de x nos proporciona un promedio distinto que podemos hallar por la ecuación

$$2\,\lambda_{z(2)} = \frac{\int_0^{\frac{t_{\delta(1)}}{2}} 2\,\lambda_2\,dx}{\left(\frac{t_{\delta(1)}}{2}\right)} = \frac{2}{t_{\delta(1)}}\left(\frac{1}{\delta t_{\delta(1)}}\int_0^{\frac{t_{\delta(1)}}{2}}(t_{\delta(1)}x - x^2)\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\delta t_{\delta(1)}^2}\left[t_{\delta(1)}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{t_{\delta(1)}}{2}} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{t_{\delta(1)}}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{\delta\, t_{\delta(1)}^2}\left(\frac{t_{\delta(1)}}{2}\frac{t_{\delta(1)}^2}{4} - \frac{t_{\delta(1)}^3}{3\cdot 8}\right) = \frac{2}{\delta}\left(\frac{t_{\delta(1)}}{8} - \frac{t_{\delta(1)}}{24}\right)$$

$$\frac{2}{\delta}\,\frac{2\,t_{\delta(1)}}{24} = \frac{t_{\delta(1)}}{6\delta}$$

de donde

$$\lambda_{z(2)} = \frac{t_{\delta(1)}}{12\,\delta}$$

Al deducir esta expresión hemos prescindido implícitamente de la expansión lateral del flujo de dispersión frente a las ranuras. En realidad $t_{\delta(1)}$ deberá sustituirse por el arco efectivo $t_{\delta(1)}'$ que incluye el ensanchamiento de la sección de paso frente a las dos aberturas $a_{\delta(1)}$ y $a_{\delta(2)}$. Si observamos la expresión [1.04.10 b] del coeficiente de CARTER notaremos que los suplementos a añadir a $t_{\delta(1)}$ para obtener $t_{\delta(1)}'$ serían respectivamente

$$a_{\delta(1)} - \frac{\left(\frac{a_{\delta(1)}}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{a_{\delta(1)}}{\delta}}\,\delta = a_{\delta(1)}\left(1 - \frac{\frac{a_{\delta(1)}}{\delta}}{5 + \frac{a_{\delta(1)}}{\delta}}\right) = a_{\delta(1)}\left(1 - \frac{1}{1 + 5\,\frac{\delta}{a_{\delta(1)}}}\right)$$

y

$$a_{\delta(2)}\left(1 - \frac{1}{1 + 5\,\frac{\delta}{a_{\delta(2)}}}\right)$$

o sea

$$\lambda_{z(2)} = \frac{t'_{\delta(1)}}{12\,\delta} = \frac{t_{\delta(1)} + a_{\delta(1)}\left(1 - \frac{1}{1 + 5\,\frac{\delta}{a_{\delta(1)}}}\right) + a_{\delta(2)}\left(1 - \frac{1}{1 + 5\,\frac{\delta}{a_{\delta(2)}}}\right)}{12\,\delta} \qquad [1.06.08\ g]$$

En la práctica, basta suponer un ensanchamiento efectivo por cada permeancia del diente igual al doble del entrehierro escribiendo

$$\lambda_{z(2)} = \frac{t_{\delta(1)} + 2\delta}{12\,\delta} = \frac{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)} + 2\delta}{12\,\delta}$$

y análogamente para el otro devanado

$$\lambda_{z(1)} = \frac{t_{\delta(2)} + 2\delta}{12\,\delta} = \frac{\tau_{\delta(2)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)} + 2\delta}{12\,\delta}$$

como se pretendía demostrar, [e]. El factor $\frac{1}{K_{L(1)}}$ o $\frac{1}{K_{L(2)}}$ se introduce para referir la permeancia específica a la longitud total L del inducido y $k_{\sigma(1)}$ o $k_{\sigma(2)}$ tienen en cuenta, si tal es el caso, la presencia de un devanado de doble paso acortado.

También, admitiendo, a veces, que la expansión del flujo en el arco de las ranuras se puede tener, de cierto modo, en cuenta al considerar ampliada la longitud axial del circuito magnético de dispersión hasta el valor de L en lugar de L_δ, se simplifica el cálculo suprimiendo las correcciones 2δ y K_L con lo cual se adopta simplemente.

$$\boxed{\lambda_{z(1)} = \frac{\tau_{\delta(2)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)}}{12\,\delta}\,k_{\sigma(1)}}\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right)/\mathrm{cm} \qquad [1.06.08\ h]$$

y

$$\boxed{\lambda_{z(2)} = \frac{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)}}{12\,\delta}\,k_{\sigma(2)}}\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right)/\mathrm{cm} \qquad [1.06.08\ i]$$

1.06.09. Permeancia específica de las cabezas de bobinas λ_{cb} referidas a una ranura del inducido

Las soluciones teóricamente exactas son complicadas y sujetas, de todos modos, a fuertes desviaciones con respecto a la realidad por la imprecisión que los detalles y la disposición constructiva imprimen a los datos. Adoptaremos unas fórmulas más bien sencillas que bastan en casi todos los cálculos prácticos.

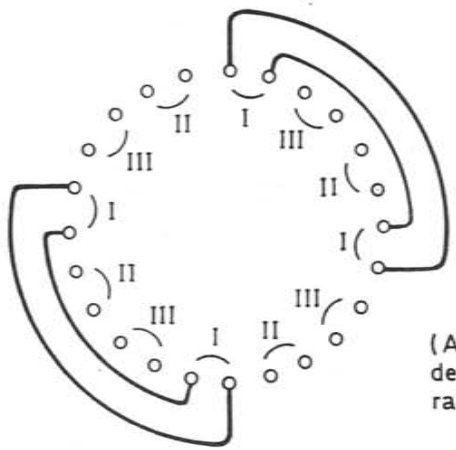


Fig. 1.06.09 a. Bobinado en una capa, del tipo de cabezas concentradas en un haz por par de polos.

a) *máquinas asincrónicas*

a—1 Bobinados estatóricos, o rotóricos de anillos rozantes, en una capa con las cabezas reunidas en un solo haz por par de polos (fig. 1.06.09 a y c).
Referida ya a una ranura del inducido y a la longitud total del mismo, L

$$\lambda_{cb} = n_{pf}\left(0{,}67\,\frac{L_{cb}}{L} - 0{,}43\,\frac{y_n\,\tau_m}{L}\right) \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.09\ a]$$

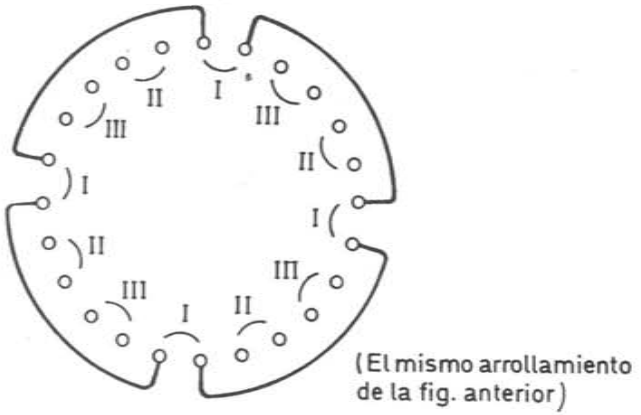


Fig. 1.06.09 b. Bobinado en una capa del tipo de cabezas subdivididas en un haz por polo.

a—2 Bobinados estatóricos, o rotóricos de anillos rozantes, en una capa con las cabezas subdivididas en dos haces a razón de un haz por polo (fig. 1.06.09 b y c)

$$\lambda_{cb} = n_{pf}\left(0{,}47\,\frac{L_{cb}}{L} - 0{,}3\,\frac{y_n\,\tau_m}{L}\right) \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.09\ b]$$

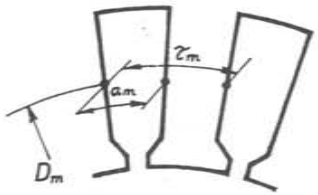


Fig. 1.06.09 c. Paso medio de ranura τ_m y anchura media de la misma a_m.

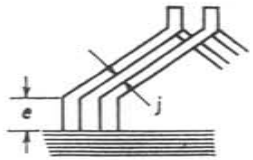


Fig. 1.06.09 d. Saliente recto de bobinas e y distancia entre cabezas sucesivas j para un arrollamiento en doble capa.

a—3 Bobinados estatóricos, o rotóricos de anillos rozantes, en dos capas (fig. 1.06.09 d y c)

$$\lambda = 1{,}13\,n_{pf}\,\xi_y^2\left(\frac{e}{L} + \frac{y_n\,\tau_m\,(a_m + j)}{4\,L\,\sqrt{\tau_m^2 - (a_m + j)^2}}\right) \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.09\ c]$$

a—4 Rotores de jaula en corto circuito (permeancia de los anillos de corto circuito), fig. 1.06.09 e

$$\lambda_{cb(2)} = \frac{n_{(2)}}{2m_{(1)}\,p}\,\frac{\tau_p}{L}\,g \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.09\ d]$$

En las ecuaciones anteriores,

$m_{(1)}$ = número de fases del estator
n_{pf} = número de ranuras por polo, y fase del devanado que se estudia.
$n_{(2)}$ = número de ranuras del rotor
L_{cb} = longitud media de una cabeza de bobina en cm. En ausencia de un estudio gráfico más detenido pueden tomarse como fórmulas de expresión para esta longitud las siguientes, (véase también párr. 2.04.32),
Devanados de corona

$$L_{cb} \approx \frac{4\,D_m}{2\,p} \qquad [1.06.09.\ e]$$

Devanados de cadena

$$L_{cb} \approx \frac{4{,}5\,D_m}{2p} \qquad [1.06.09\ f]$$

Devanados en V (en horquilla y doble capa)

$$L_{cb} \approx \frac{5\,D_m}{2\,p} \qquad [1.06.09\ g]$$

D_m = diámetro medio en las ranuras en cm (fig. 1.06.09 c)
y_n = paso de bobina medido en número de ranuras
L = longitud total del inducido incluidos los canales de ventilación radial, en cm
τ_m = paso medio de ranura en cm (fig. 1.06.09 c)
ξ_y = factor de bobinado por el acortamiento de paso si éste no es eléctricamente diametral (para paso diametral $\xi_y = 1$). Véase Tabla 1.04.15 a.

e = saliente recto de bobinas en cm (fig. 1.06.09 d)
a_m = anchura media de ranuras en cm (fig. 1.06.09 c)
j = juego o separación entre cabezas de bobinas consecutivas en cm (fig. 1.06.09 d)
g = factor de permeancia para rotores de jaula [fig. 1.06.09 f], dependiente de las relaciones $\frac{\tau_p}{w}$ y $\frac{w}{0{,}223\,(h_a + l_a)}$, siendo
τ_p = paso polar en el entrehierro en cm
w = distancia media entre conexiones frontales del estator y el rotor según la fig. 1.06.09 e, en cm
h_a = altura radial de un anillo de corto circuito en cm (fig. 1.06.09 e)
l_a = longitud axial de un anillo de corto circuito en cm (fig. 1.06.09 e).

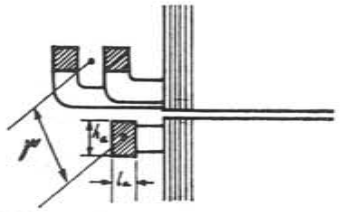


Fig. 1.06.09 e. Permeancia de los aros frontales.

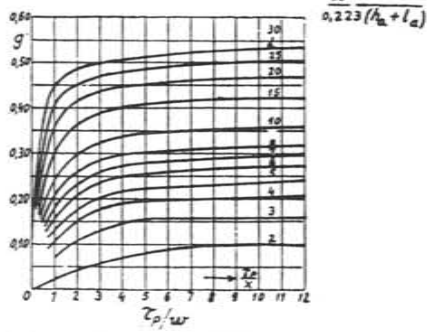


Fig. 1.06.09 f. Coeficiente de permeancia g para la dispersión, por fase, de los anillos frontales de corto circuito.

b) *máquinas sincrónicas*

b — 1 Bobinados en una capa

$$\boxed{\lambda_{cb} = n_{pf}\left(0{,}6\,\frac{L_{cb}}{L} - 0{,}3\,\frac{y_n\,\tau_m}{L}\right)}\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.09\ \text{h}]$$

b — 2 Bobinados en doble capa

$$\boxed{\lambda_{cb} = n_{pf}\left(0{,}43\,\xi_y^{\,2}\,\frac{L_{cb}}{L}\right)}\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.09\ \text{i}]$$

1.06.10. Fórmula final de la permeancia de dispersión por ranura Λ_x

Reducidas todas las permeancias específicas a la longitud axial L de la máquina tal como lo hemos venido efectuando en las ecuaciones expuestas, el valor de Λ_x que interviene en las fórmulas del párrafo 1.06.03, está dado por

$$\Lambda_x = L(\lambda_x) = L(\Sigma\ \lambda) \qquad [1.06.10\ \text{a}]$$

entendiéndose que $\Sigma\lambda$ incluye todas las permeancias lineales que integran la dispersión del devanado considerado

1.06.11. Ejemplos

Ejemplo 1. Calcular la f.e.m. de reactancia para el alternador trifásico de la figura 1.06.11 a, cuyas características son las siguientes:
Potencia: 850 kVA
Tensión compuesta: 5500 V.
Frecuencia: 50 Hz
Velocidad: 250 r/m (24 polos)
Los datos constructivos que interesan, junto con las dimensiones mostradas en la figura, se resumen en estos:
Devanado en dos capas
Número total de ranuras $n = 126$
Paso de bobinas $y_n = 5\ (1 \div 6)$
Conductores por ranura $Z_n = 18$
Dimensiones de cada conductor 2 en 11 de $\frac{2{,}6 \times 4{,}5\ \text{desnudo}}{3{,}2 \times 5{,}1\ \text{aislado}}$
Recubrimiento polar $\psi = 0{,}75$
Número de canales de ventilación radial $n_c = 4$
Longitud axial por canal $\varepsilon_c = 10$ mm.

a) *Permeancia específica de ranura* (párr. 1.06.04 a 1.06.07)

$$\lambda_r = \left(\frac{h_{ci} + h_{ce}}{3\,a} + \frac{h_o}{4a}\right) k_c\,\frac{L_{na}}{L}\,k_\lambda + \frac{h_s}{a}\,k_a\,\frac{L_{na}}{L} + \frac{2\,h_v}{a' + a_\delta}\,k_a\,\frac{L_{na}' + L_{na\delta}}{2\,L} + \frac{h_\delta}{a_\delta}\,k_a\,\frac{L_{na\delta}}{L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad [1.06.11\ \text{a}]$$

Para h_{ci} y h_{ce} tomaremos la altura radial de conductores aislados, o sea $h_{ci} = h_{ce} = 9 \cdot 3{,}2 = 28{,}8$ mm.
Por otra parte $h_0 = 8{,}5$ mm, $h_s = 2{,}5$ mm, $h_v = 5{,}5$ mm, $h_\delta = 0{,}5$ mm, $a_\delta = 16{,}5$ mm, $a' = 22{,}5$ mm
Respecto a los coeficientes de corrección k_c y k_a por paso acortado, tendremos
Ranuras por polo $n_p = \frac{n}{2_p} = \frac{126}{24} = 5{,}25$
Paso de ranuras $y_n = 5$ ranuras
Paso relativo $\frac{y_n}{n_p} = \frac{5}{5{,}25} = 0{,}953$
Para $\frac{y_n}{n_p} = 0{,}953$, en un devanado trifásico, la fig. 1.05.14 c nos da

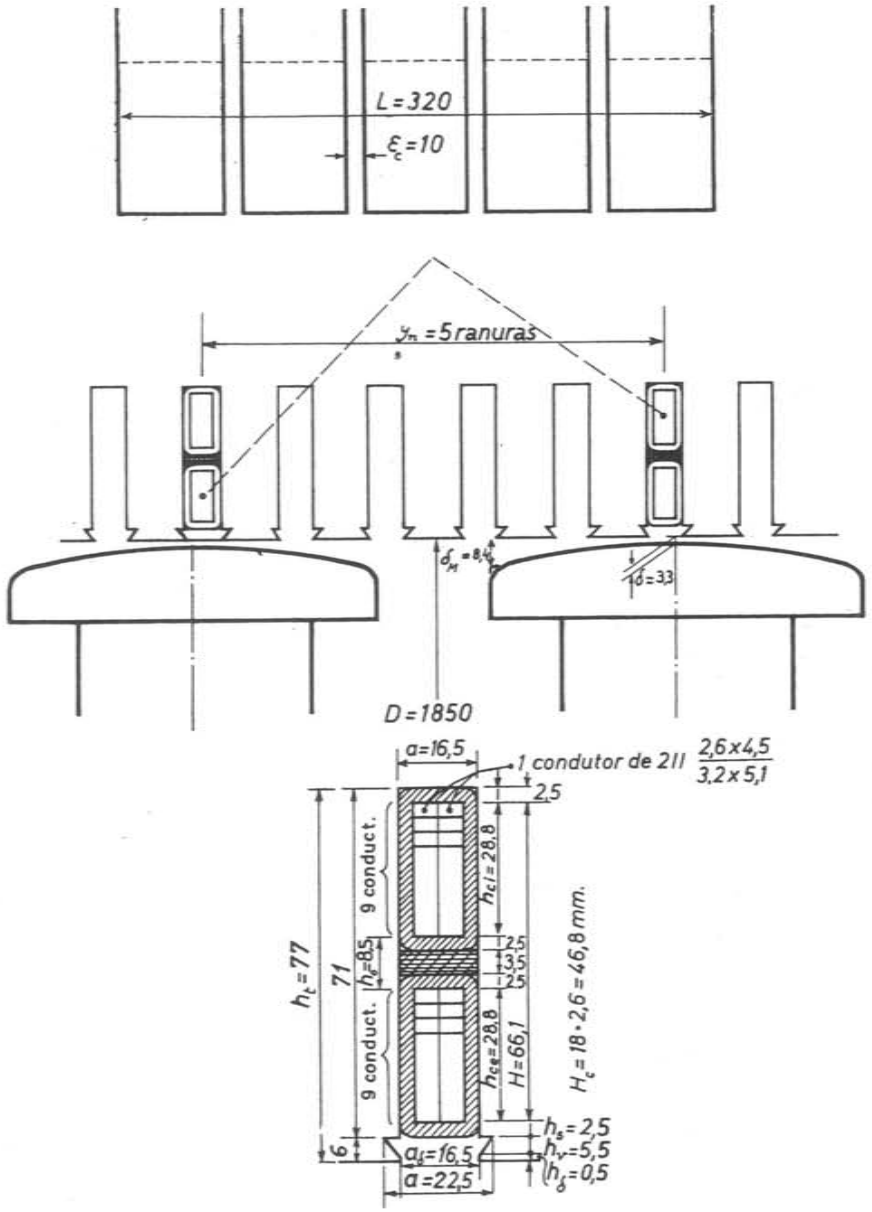


Fig. 1.06.11 a. Dimensiones de un alternador trifásico de 850 kVA, 5 500 V, 250 r/m para el cálculo de la reactancia.

$$k_c = 0{,}97 \qquad \text{y} \qquad k_e = 0{,}96$$

Cuanto al factor k_λ debido al efecto superficial o concentración de corriente (párr. 1.06.06) se hallará como sigue:

Anchura de la ranura $a = 16{,}5$ mm.

Anchura ocupada por el cobre $a_c = 2 \times 4{,}5 = 9$ mm.

Altura neta de cobre $H_c = 18 \cdot 2{,}6 = 46{,}8$ mm.

Altura bruta de conductores $H = 66{,}1$ mm.

Frecuencia $f = 50$ Hz

Resistividad del cobre 56 a la temperatura media de servicio según las Normas, (75 °C) (tabla 1.01.16 b). $\varrho_{75} = 0{,}0217 \dfrac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$

Como las dos barras que integran un cond ctor no van superpuestas sino que son colaterales sobre el mismo estrato, la altura radial del conductor será la de una sola barra, $h = 2{,}6$ mm y el coeficiente de circulación local k_α valdrá 1.

Así, la fórmula [1.06.06 b] nos da

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{a_c}{a}\frac{H_c}{H}\frac{f}{10^3\,\rho k_\alpha}} = 0{,}2 \cdot \pi \sqrt{\frac{9}{16{,}5}\frac{46{,}8}{66{,}1}\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217 \cdot 1}} = 0{,}593 \text{ cm}^{-1}$$

y de la [1.06.06 a] resulta una altura equivalente

$$\zeta = \alpha h = 0{,}593 \cdot 0{,}26 = 0{,}154 \text{ cm}^0$$

El número de estratos por ranura $\nu = 18$ y la altura aparente de conducción

$$\nu\,\zeta = 18 \cdot 0{,}154 = 2{,}78 \text{ cm}^0$$

Para $\nu\zeta = 2{,}78$ y $\nu = 18$ la fig. 1.06.06 b muestra un valor de k_λ que no se diferencia prácticamente de 1. Así sucede por lo general cuando el número ν de estratos es considerable lo que lleva consigo una altura h limitada. Puede decirse que esta corrección sólo tiene importancia en los rotores de corto circuito de ranura profunda.

Calculemos ahora las longitudes axiales efectivas de dispersión de ranura L_n.

Con una anchura $a = 16{,}5$ mm en la ranura, y canales de longitud geométrica $\varepsilon_c = 10$ mm, la longitud perdida por canal asciende según la fig. 1.06.05 b a $\varepsilon_{na} = 1{,}8$ mm; luego, [1.06.05 a], $L_{na} = L - n_c\,\varepsilon_{na} = 32 - 4 \cdot 0{,}18 = 31{,}28$ cm.

Análogamente, siendo $a_\delta = a = 16{,}5$ mm, $L_{na\delta} = 31{,}28$ cm. Cuanto a L'_{na}, con $a' = 22{,}5$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm, $\varepsilon_{na}' = 1{,}3$ mm y $L_{na}' = L - n_c\,\varepsilon_{na}' = 32 - 4 \cdot 0{,}13 = 31{,}48$ cm.

Sustituyendo todos estos valores en [a] hallamos para las ranuras

$$\lambda_r = \left(\frac{28{,}8 + 28{,}8}{3 \cdot 16{,}5} + \frac{8{,}5}{4 \cdot 16{,}5}\right) 0{,}97\,\frac{31{,}28}{32} + \frac{2{,}5}{16{,}5}\,0{,}96\,\frac{31{,}28}{32} + \frac{2 \cdot 5{,}5}{22{,}5 + 16{,}5}\,0{,}96 \times$$

$$\frac{31{,}48 + 31{,}28}{2 \cdot 32} + \frac{0{,}5}{16{,}5}\,0{,}96\,\frac{31{,}28}{32} = (1{,}160 + 0{,}129)\,0{,}947 + 0{,}145 \cdot 0{,}937 + 0{,}282 \cdot 0{,}941 +$$

$$+ 0{,}03 \cdot 0{,}937 = 1{,}220 + 0{,}136 + 0{,}266 + 0{,}028 = \underline{1{,}650}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

b) *Permeancia especifica de cabeza de diente.* Utilicemos la ecuación [1.06.08 b]

$$\lambda_t = \frac{5\,\dfrac{\delta}{a_\delta}}{5 + 4\,\dfrac{\delta}{a_\delta}}\,\psi\,\frac{k_e}{K_L}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.06.11 b]}$$

Como valor de δ tomaremos en este caso, simplemente, la media aritmética de los extremos: 3,3 y 8,4 mm, o sea

$$\delta_m = \frac{3{,}3 + 8{,}4}{2} = 5{,}8 \text{ mm}$$

k_a ya hemos visto que era igual a 0,96. El recubrimiento polar asciende según los datos a $\psi = 0{,}75$ y el coeficiente de longitud activa del entrehierro, [1.04.09 c y a],

$$K_L = \frac{L}{L_\delta} = \frac{L}{L - n_c \varepsilon_\delta}$$

Como los polos no llevan canales de ventilación la disposición de éstos corresponde a la fig. 1.04.09 b (2). Para $\delta_m = 5{,}8$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm la curva (2) nos da $\varepsilon_\delta = 2{,}5$ mm

$$K_L = \frac{320}{320 - 4 \cdot 2{,}5} = 1{,}03$$

Sustituyendo en [b]

$$\lambda_t = \frac{5\,\frac{5{,}8}{16{,}5}}{5 + 4\,\frac{5{,}8}{16{,}5}}\, 0{,}75\, \frac{0{,}96}{1{,}03} = 0{,}206 \cdot 0{,}932 = \underline{0{,}192} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

c) *Permeancia específica debida a las cabezas de bobina.* Tratándose de un alternador con arrollamiento en doble capa, aplicaremos la ecuación [1.06.09 i]

$$\lambda_{cb} = n_{pf}\left(0{,}43\, \xi_y^2 \frac{L_{cb}}{L}\right) \qquad [1.06.11 \text{ c}]$$

Como la máquina es trifásica, tendremos:

ranura por polo y fase $n_{pf} = \frac{n_n}{m} = \frac{5{,}25}{3} = 1{,}75$

y siendo el paso relativo de bobinas, según hemos visto $\frac{y_n}{n_p} = \frac{5{,}25}{5} = 0{,}953$, el factor de acortamiento (tabla 1.04.15 a) podemos tomarlo $\xi_y = 0{,}997$.

La longitud de una cabeza de bobina en el arrollamiento de doble capa [1.06.09 g],

$$L_{cb} \approx \frac{5 \cdot D_m}{2\,p}$$

El diámetro medio en las ranuras, aproximadamente,

$$D_m = D + h_t = 185 + 7{,}7 = 192{,}7 \text{ cm}$$

y

$$L_{cb} \approx \frac{5 \cdot 192{,}7}{24} = 40 \text{ cm}$$

de donde, [c],

$$\lambda_{cb} = 1{,}75 \cdot 0{,}43 \cdot 0{,}997^2 \frac{40}{32} = \underline{0{,}936} \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

d) *Permeancia específica* total de dispersión

$$\lambda_z = \Sigma\lambda = \lambda_r + \lambda_t + \lambda_{cb} = 1{,}650 + 0{,}192 + 0{,}936 = \underline{2{,}78} \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

e) *Permeancia equivalente por ranura* [1.06.10 a]

$$\Lambda_z = L\ \lambda_z = 32 \cdot 2{,}78 = 89 \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

f) *Inductancia por fase* [1.06.03 h]

$$L_z = 8\ \pi \cdot 10^{-9}\ p\ n_{pf}\ Z_n^2\ \Lambda_z \qquad \text{(H)} \qquad [1.06.11 \text{ d}]$$

$Z_n = 18$ conduct/ranura; $p = 12$ pares de polos; $n_{pf} = 1{,}75$ ran por polo y fase, y $\Lambda_z = 89\ \frac{\text{M}}{\text{Gb}}$

$$L_z = 8 \cdot \pi \cdot 10^{-9} \cdot 12 \cdot 1{,}75 \cdot 18^2 \cdot 89 = 0{,}0152 \text{ (H/fase)}$$

g) *Reactancia por fase* [1.06.03 h]

$$X = 2\ \pi\ f\ L_z = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0{,}0152 = 4{,}78 \ (\Omega\text{/fase})$$

h) *F.e.m. de reactancia por fase* [1.06.03 h]

$$E_z = X\ I_f$$

La corriente I_f por fase en esta máquina trifásica, en estrella, de $p = 850$ kVA $U = 5\,500$ V, tensión compuesta, es

$$I_f = \frac{P}{\sqrt{3}U} = \frac{850}{\sqrt{3} \cdot 5{,}5} = 89 \text{ (A/fase)}$$

luego,

$$E_z = 4{,}78 \cdot 89 = 426 \text{ (V/fase)}$$

y en valor relativo de la tensión por fase $U_f = \frac{5\,500}{\sqrt{3}} = 3\,170$ V

$$\overset{*}{e}_z = \frac{426}{3\,170}\, 100 = 13{,}4\ \%$$

i) *Variantes de cálculo.* Veamos, a título de orientación las diferencias que produce el emplear unas u otras fórmulas de las enunciadas o el prescindir de ciertas correcciones, simplificando el cálculo.

Si para la cuña de la ranura que tiene por bases a_δ y a' y por altura h_r hacemos uso de la ecuación exacta [1.06.04 b] tendremos

$$\lambda = 2{,}3\, \frac{h_r}{a' - a_\delta} \log_{10} \frac{a'}{a_\delta}$$

$$= 2{,}3\,\frac{5{,}5}{22{,}5 - 16{,}5}\,\log_{10}\frac{22{,}5}{16{,}5} = 0{,}284$$

en lugar de

$$\frac{2 \cdot 5{,}5}{12{,}5 + 16{,}5} = 0{,}282$$

diferencia insignificante.

Ya hemos visto que para devanados con numerosos conductores por ranura de escasa altura individual h, el efecto de la concentración de corriente reflejado en el factor k_1 no es apreciable, Si prescindimos además de los otros dos factores k_e y k_a por desfase de corriente entre las capas de ciertas ranuras y de $\frac{L_{ae}}{L}$ que tiene en cuenta la longitud efectiva del inducido para la dispersión de ranuras, hallaremos como permeancia específica, agrupando asimismo los conductores de una y otra capa,

$$\lambda_r = \frac{66{,}1}{3 \cdot 16{,}5} + \frac{2{,}5}{16{,}5} + \frac{2 \cdot 5{,}5}{22{,}5 + 16{,}5} + \frac{0{,}5}{16{,}5} =$$

$$= 1{,}34 + 0{,}152 + 0{,}282 + 0{,}03 = 1{,}804.$$

en vez de 1,650 antes hallado, con una diferencia del 9 %.

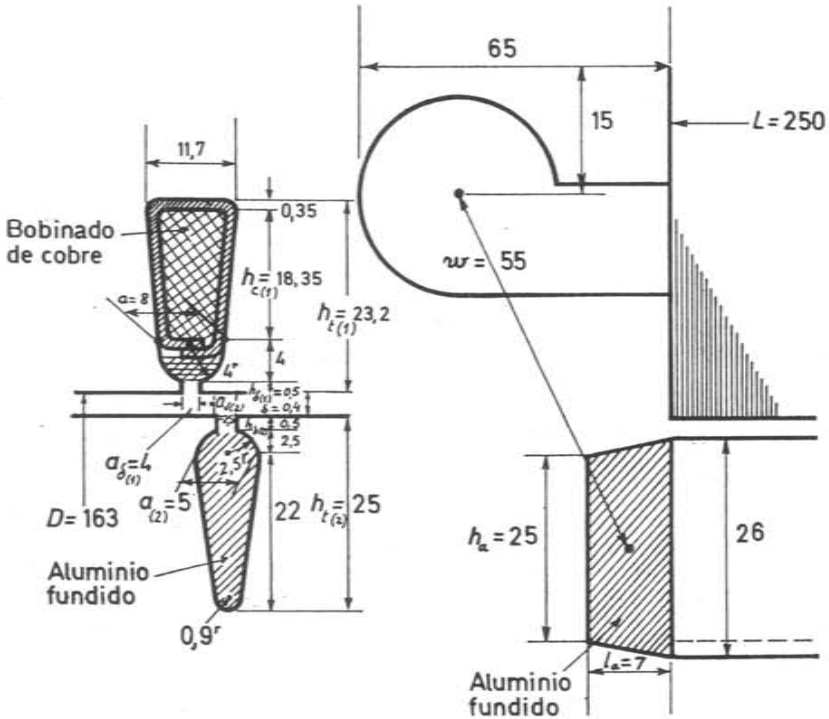


Fig. 1.06.11 b. Dimensiones de un motor de jaula, para el cálculo de las reactancias.

Si para las cabezas de diente tomamos la ecuación más sencilla [1.06.08 a] en lugar de la [b]

$$\lambda_t = \frac{\delta_m}{a_\delta + 0{,}8\delta_m}\,\frac{\psi k_a}{K_L} = \frac{5{,}8}{16{,}5 + 0{,}8 \cdot 5{,}8}\,\frac{0{,}75 \cdot 0{,}96}{1{,}03} = 0{,}192$$

que coincide exactamente con la cifra antes hallada. Incluso si prescindimos de los dos coeficientes de corrección k_a y K_L el valor de λ_t asciende solamente hasta 0,206.

Vemos, pues, que las fórmulas más sencillas son también perfectamente aplicables y que con un buen criterio selectivo podrá evitarse en muchas ocasiones alargar innecesariamente los cálculos para efectuar correcciones de poca monta.

Ejemplo 2. Calcular las f.e.m. de reactancia propias del estator y del rotor en un motor trifásico asincrónico de jaula de ardilla en aluminio inyectado, con ranura profunda, de las siguientes características:

(Los subíndices adicionales entre paréntesis (1) y (2) se refieren respectivamente a magnitudes del primario — estator — y del secundario — rotor —).

Potencia útil: 15 CV = P
Rendimiento: 0.85 = η
Cos φ : 0,84
Tensión : 220/380 V, conexión Δ/λ
Velocidad sincrónica : 1 000 r/m (6 polos) = N
Frecuencia : 50 Hz = f
Los datos constructivos se reflejan en la fig. 1.06.11 b, cuanto a las dimensiones, y los de bobinado son:
Número de ranuras del estator: 36 = $n_{(1)}$
Número de ranuras del rotor: 44 = $n_{(2)}$
Conductores del estator por ranura: 17 = $Z_{a(1)}$
Dimensiones: 2 hilos de cobre en paralelo de 1,9 mm Ø
Arrollamiento: en corona 1 capa y 1 haz por polo, paso diametral.

Estator

a) *Permeancia específica de ranura.* Como en este caso el devanado es de una capa sin desfase posible de las corrientes dentro de una misma ranura $k_{a(1)} = 1$ y $k_{a(1)} = 1$. El gran número de conductores de reducidas dimensiones por ranura hace prever que $k_{\lambda(1)}$ será también prácticamente igual a la unidad. No existen canales radiales de ventilación con lo cual $L_{a(1)} = L$.

Así, la expresión de esta permeancia se reduce a, [1.06.04 h, d y a],

$$\lambda_{r(1)} = \frac{h_{a(1)}}{3a_{(1)}} + 0{,}785 + \frac{h_{\delta(1)}}{a_{\delta(1)}} = \frac{18{,}35}{3 \cdot 8} + 0{,}785 + \frac{0{,}5}{4} =$$

$$= 0{,}763 + 0{,}785 + 0{,}125 = \underline{1{,}673}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

b) *Permeancia específica de cabeza de dientes* (en zig-zag). Apliquemos primero la ecuación [1.06.08 c], que para el estator (primario) se traduce en

$$\lambda_{a(1)} = \frac{n_{a(1)}}{\pi^2}\,\frac{\tau_p}{\delta K_C k_s K_{L(1)}}\,\Sigma\left(\frac{\xi_y}{\nu}\right)^2 \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.06.11 e]}$$

Número total de ranuras estatóricas $n_{(1)} = 36$
» de pares de polos $p = 3$
$\Big\}\; n_{p(1)} = \frac{n_{(1)}}{2p} = \frac{36}{6} = 6$ ran/polo

Paso polar $\tau_p = \dfrac{\pi D}{2p} = \dfrac{\pi \cdot 16{,}3}{6} = 8{,}53$ cm

Coeficiente de CARTER [1.04.10 b]

$$K_c = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta - \dfrac{\left(\dfrac{a_\delta}{\delta}\right)^2}{5 + \left(\dfrac{a_\delta}{\delta}\right)}\delta},$$

Para el estator:

Paso de ranura en el entrehierro $\tau_{\delta(1)} = \dfrac{\pi D}{n_{(1)}} = \dfrac{\pi \cdot 163}{36} = 14{,}33$ mm

Entrada de ranura sobre el entrehierro $a_{\delta(1)} = 4$ mm
Entrehierro $\delta = 0{,}4$ mm

$$K_{c(1)} = \frac{14{,}23}{14{,}23 - \dfrac{\left(\dfrac{4}{0{,}4}\right)^2}{5 + \left(\dfrac{4}{0{,}4}\right)}0{,}4} = 1{,}23$$

Para el rotor:

Paso de ranura en el entrehierro $\tau_{\delta(2)} = \dfrac{\pi D}{n_{(2)}} = \dfrac{\pi \cdot 163}{44} = 11{,}62$ mm

Entrada de ranura sobre el entrehierro $a_{\delta(2)} = 2{,}5$ mm

$$K_{c(2)} = \frac{11{,}62}{11{,}62 - \dfrac{\left(\dfrac{2{,}5}{0{,}4}\right)^2}{5 + \left(\dfrac{2{,}5}{0{,}4}\right)}0{,}4} = 1{,}14$$

El coeficiente de CARTER combinado puede tomarse igual al producto de los dos anteriores [1.04.10 c]

$$K_c = K_{c(1)}\, K_{c(2)} = 1{,}23 \cdot 1{,}14 = 1{,}4.$$

Cuanto al coeficiente de saturación k_s, [1.04.06 f],

$$k_s = \frac{\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_{d(1)} + \hat{\theta}_{d(2)}}{\hat{\theta}_\delta},$$

siendo $\hat{\theta}_\delta$ los amperios-vueltas para el entrehierro δ y $\hat{\theta}_{d(1)}$, $\hat{\theta}_{d(2)}$ los correspondientes a un diente del estator y a uno del rotor, requiere el cálculo previo de la excitación en carga la cual a su vez está subordinada a la caída de reactancia que tratamos de calcular. Hemos de admitir un valor previo, corrigiéndolo si acaso más tarde al completar los cálculos de la corriente de vacío. Por estudios similares podemos tomar en principio $k_s = 1{,}3$.

Teniendo en cuenta nuevamente que no existen canales de ventilación radial

$$K_{L(1)} = 1$$

Cuanto al parámetro $\Sigma\left(\dfrac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2$, la tabla 1.06.08 a relativa a los arrollamientos trifásicos nos da, para $n_{p/(1)} = \dfrac{n_{(1)}}{2p \cdot m_{(1)}} = \dfrac{36}{6 \cdot 3} = 2$ ranuras por polo y fase y un paso diametral, es decir, un paso relativo

$$\frac{y_{s(1)}}{n_{p(1)}} = \frac{6}{6} = 1$$

la cifra

$$\Sigma\left(\frac{\xi_\nu}{\nu}\right)^2 = 0{,}0265.$$

Sustituyendo valores en [e]

$$\lambda_{z(1)} = \frac{6}{\pi^2}\,\frac{8{,}53}{0{,}04 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}3 \cdot 1}\,0{,}0265 = \underline{1{,}89}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right).$$

Utilizando la fórmula simplificada [1.06.08 e],

$$\lambda_{z(1)} = \frac{\tau_{\delta(2)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)} + 2\delta}{12\,\delta}\,\frac{k_{a(1)}}{K_{L(1)}}$$

y como quiera que tanto el coeficiente por desfase de corrientes, $k_{a(1)}$ como el de corrección por longitud axial efectiva $K_{L(1)}$ ya hemos visto que, en este caso, valían la unidad,

$$\lambda_{z(1)} = \frac{11{,}62 - 4 - 2{,}5 + 2 \cdot 0{,}4}{12 \cdot 0{,}4} = 1{,}23\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

La diferencia es sensible con respecto al cálculo anterior: $\lambda_{z(1)} = 1{,}89$,
Conservaremos este último valor de 1,89.

c) *Permeancia específica por ranura debida a las cabezas de bobina.* Con el arrollamiento de una capa y un haz por polo, la ecuación [1.06.09 b] nos da

$$\lambda_{cb(1)} = n_{p/(1)}\left(0{,}47\,\frac{L_{cb(1)}}{L} - 0{,}3\,\frac{y_{s(1)}\,\tau_{m(1)}}{L}\right)\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right) \qquad \text{[1.06.11 f]}$$

pudiendo adoptarse como longitud media de la cabeza de bobina [1.06.09 e]

$$L_{cb(1)} = \frac{4\,D_{m(1)}}{2p}$$

Tenemos, pues,
Diámetro medio en las ranuras, fig. 1.06.11 b,

$$D_{m(1)} = D + h_{z(1)} = 16{,}3 + 2{,}32 = 18{,}62 \text{ cm}$$

$$L_{cb(1)} = \frac{4 \cdot 18{,}62}{6} = 12{,}5 \text{ cm}$$

paso medio de ranura

$$\tau_{m(1)} = \frac{\pi D_{m(1)}}{n_{(1)}} = \frac{\pi \cdot 18{,}62}{36} = 1{,}625 \text{ cm}$$

$$\lambda_{cb(1)} = 2\left(0{,}47\frac{12{,}5}{25} - 0{,}3\frac{6 \cdot 1{,}625}{25}\right) = \underline{0{,}236}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right).$$

d) *Permeancias del estator por ranura,* [1.06.10 a]

$$\lambda_{r(1)} = \Sigma\,\lambda_{(1)} = \lambda_{c(1)} + \lambda_{r(1)} + \lambda_{cb(1)} = 1{,}673 + 1{,}890 + 0{,}236 = \underline{3{,}709}\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

$$\Lambda_{r(1)} = L\Sigma\lambda_{(1)} = 25 \cdot 3{,}709 = 92{,}6\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

e) *F.e.m. de reactancia del estator.* Según la ecuación [1.06.03 h] tendremos por fase de este devanado trifásico

$$E_{r(1)} = 16\,\pi^2 \cdot 10^{-9}\, f\, p\, n_{p/f(1)}\, Z_{n(1)}^2\, (\lambda_{r(1)} \cdot L)\, I_{f(1)} \qquad \text{[V/fase]}$$

Frecuencia $f = 50$ Hz
Pares de polos $p = 3$
Conductores por ranura $Z_{n(1)} = 17$
Ranuras por polo y fase $n_{p/f(1)} = 2$
Permeancia específica por ranura $\lambda_{r(1)} = 3{,}709\left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$
Longitud de inducido $L = 25$ cm.
Corriente por fase $I_{f(1)} = \dfrac{P}{m_{(1)}\, U_{f(1)}\, \eta \cos\varphi} = \dfrac{15 \cdot 736}{3 \cdot 220 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}84} = 23{,}4$ (A/fase);

luego,

$$E_{r(1)} = 16 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-9} \cdot 50 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 17^2 \cdot 3{,}709 \cdot 25 \cdot 23{,}4 = \underline{29{,}7} \text{ (V/fase)}$$

$$\varepsilon_{r(1)} = \frac{29{,}7}{220}\,100 = \underline{13{,}5}\,\%$$ de la tensión en bornes por fase.

La reactancia propiamente dicha es de

$$X_{(1)} = \frac{E_{r(1)}}{I_{f(1)}} = \frac{29{,}7}{23{,}4} = \underline{1{,}27} \quad (\Omega\text{/fase})$$

y el c.d.a.i. resultante por dispersión del estator,

$$L_{r(1)} = \frac{X_{(1)}}{2\pi f} = \frac{1{,}27}{2\pi \cdot 50} = 0{,}00404 \text{ (H)} \equiv \underline{4{,}04} \text{ (m H/fase)}.$$

Rotor

f) *Permeancia específica de ranura.* El efecto superficial, reflejado en el factor $k_{\lambda(2)}$, con un conductor único de gran altura radial, es ahora apreciable. Dicho efecto

impide también sumar simplemente las permeancias parciales de cada configuración geométrica local en que podría subdividirse la sección de la ranura, ya que la tendencia de la corriente a concentrarse hacia la periferia altera la distribución normal de las líneas de fuerza. Recurrimos a la simplificación de tomar como altura $h_{c(2)}$ de conductor un valor intermedio entre los 22 mm de la altura trapecial y los 25 mm totales del diente. Pongamos, por ejemplo, $h_{c(2)} = 24$ mm. Cuanto al factor k_e procedentes de los desfases internos entre la corriente de los diversos estratos, ya va incluido en este caso, dentro de $k_{\lambda(2)}$. El coeficiente k_a no ha lugar a considerarlo ahora por lo que a la ranura se refiere, puesto que toda ella se encuentra ocupada por la barra de aluminio fundido y sólo aparecen fenómenos de concatenación progresiva, si bien, dada las formas presentes este hecho se produce de acuerdo con unas leyes más complicadas que las expuestas al estudiar su influencia, aunque esta misma complicación nos lleve a prescindir de tomarlas en cuenta compensando la omisión, como hemos dicho, mediante una estimación adecuada de la altura efectiva de barra. La exactitud así alcanzada es suficiente.

Siendo como para el estator $K_{L(2)} = \dfrac{L_\delta}{L} = 1$, pondremos, pues, sencillamente,

$$\lambda_{r(2)} = \frac{h_{c(2)}}{3\,a_{(2)}}\,k_{\lambda(2)}$$

Para hallar k_λ empecemos por calcular α, [1.06.06 b];

$$\alpha_{(2)} = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{a_{c(2)}}{a_{(2)}}\frac{H_{c(2)}}{H_{(2)}}\frac{f_{(2)}}{10^3 \rho_{(2)}\,k_{\alpha(2)}}} \quad (\text{cm}^{-1})$$

No habiendo conductores en paralelo dentro de la misma ranura, $k_{\alpha(2)} = 1$ y dada la ausencia de aislamiento en el conductor, $\dfrac{a_{c(2)}}{a_{(2)}}\dfrac{H_{c(2)}}{H_{(2)}} = 1$. Para el cálculo de las propiedades de los motores asincrónicos, se reduce el rotor al reposo con lo cual las f.e.m. del mismo, tanto la debida al flujo común como la que procede del flujo de dispersión adquieren la frecuencia de la red: en este caso $f_{(2)} = f = 50$ Hz, siendo en cambio la resistencia del circuito rotórico $R_{(2)}$ la que se incorpora como variable en función del deslizamiento, al tomar para la resistencia precisamente el valor $\dfrac{R_{(2)}}{\sigma}$ en lugar de $R_{(2)}$. (Sobre estos principios que se deducen al estudiar el circuito equivalente, volveremos más tarde. Ver capítulo 17).

Cuanto al valor de $\rho_{(2)}$ resistividad del aluminio inyectado, tomada a la temperatura adecuada, insistimos en lo dicho repetidas veces a propósito de la resistividad del cobre: la temperatura media de funcionamiento, según las Normas, será de 75 °C y a ella hay que referir todos los valores de servicio. Cuando se utilicen estas magnitudes para calcular el par de arranque en frío, habrá que referirlas a la temperatura ambiente de 20 °C y cuando se trate de hallar las pérdidas, a efectos del calentamiento, deberá tomarse como base la temperatura media límite correspondiente a la clase de aislamiento empleado. Por el momento tomamos $\Delta\theta = 75$ °C con lo cual si el conductor fuese de cobre 56 su resistividad sería de $0{,}0217\ \dfrac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}$; para el aluminio, la resistividad a cualquier temperatura puede considerarse que varía en la misma relación que la del cobre. A 20 °C esta relación era (aluminio inyectado, párrafo 1.01.06) $\dfrac{56}{33} = 1{,}7$. Luego, a 75 °C

$$\rho_{(2)} = 0{,}0217 \cdot 1{,}7 = 0{,}0368\ \frac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m.}}$$

Por tanto,

$$\alpha_{(2)} = 0{,}2\ \pi \sqrt{\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0368}} = 0{,}732$$

La sustitución en [1.06.06 a] nos conduce a

$$\zeta_{(2)} = h_{(2)}\ \alpha_{(2)} = 2{,}4 \cdot 0{,}732 = 1{,}76\ (\text{cm}^2)$$

$$(\nu\ \zeta)_{(2)} = 1 \cdot 1{,}76 = 1{,}76\ (\text{cm}^2)$$

y según la fig. 1.06.06 b, $k_{\lambda(2)} = 0{,}83$

o

$$\lambda_{r(2)} = \frac{24}{3 \cdot 5}\, 0{,}83 = \underline{1{,}33}\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

g) *Permeancia específica de cabeza de diente.* Para rotores de corto circuito, [1.06.08 d],

$$\lambda_{z(2)} = \frac{n_{p(2)}}{\pi^2}\, \frac{\tau_p}{\delta\ K_C\ k_s\ K_{L(2)}}\, \Sigma \left(\frac{1}{\frac{n}{p}\,\nu \pm 1}\right)^2 \quad \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

Con un número de ranuras por polo

$$n_{p(2)} = \frac{n_{(2)}}{2p} = \frac{44}{6} = 7{,}35$$

la tabla 1.06.08 c nos da (por interpolación)

$$\Sigma \left(\frac{1}{\frac{n}{p}\,\nu \pm 1}\right)^2 = 0{,}015$$

y

$$\lambda_{z(2)} = \frac{7{,}35}{\pi^2}\, \frac{8{,}53}{0{,}04 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}3 \cdot 1}\, 0{,}015 = \underline{1{,}31}\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

(Comprobemos, de paso, la fórmula simplificada [1.06.08 e])

$$\lambda_{z(2)} = \frac{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)} - a_{\delta(2)} + 2\delta}{12\ \delta}\, \frac{k_{s(2)}}{K_{L(2)}}$$

Para $k_{s(2)}$ tomemos de la fig. 1.05.14 c el mismo valor que se derivaría, con un devanado trifásico, de acuerdo con $k_{c(2)}$ (identificando $k_{s(2)}$ con el factor de reducción $k_{\lambda(2)}$ que experimenta la permeancia en el cuerpo del bobinado), lo cual constituye una aproximación suficiente. Para $k_{s(2)} = k_{\lambda(2)} = 0{,}83$, $k_{s(2)} = 0{,}78$,

Por tanto,

$$\lambda_{z(2)} = \frac{14{,}23 - 4 - 2{,}5 + 2 \cdot 0{,}4}{12 \cdot 0{,}4}\, \frac{0{,}78}{1} = 1{,}39\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

también discrepante del valor anterior 1,31 que conservaremos.

h) *Permeancia específica por ranura debida a los aros frontales de corto circuito.* Para un rotor de jaula, [1.06.09 d],

$$\lambda_{cb(2)} = \frac{n_{(2)}}{2\ m_{(1)}\ p}\, \frac{\tau_p}{L}\, g.$$

siendo

$$g = \text{f}\left(\frac{\tau_p}{w}, \frac{w}{0{,}223\ (h_a + l_a)}\right)$$ según fig. 1.06.09 f

$$\frac{\tau_p}{w} = \frac{8{,}53}{5{,}5} = 1{,}55$$

$$\frac{w}{0{,}223\ (h_a + l_a)} = \frac{5{,}5}{0{,}223\ (2{,}5 + 0{,}7)} = 7{,}7$$

Dados estos dos últimos parámetros, la figura mencionada nos proporciona $g = 0{,}24$,

y

$$\lambda_{cb(2)} = \frac{44}{2 \cdot 3 \cdot 3}\, \frac{8{,}53}{25}\, 0{,}24 = \underline{0{,}835}\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

i) *Permeancia del rotor por ranura*

$$\lambda_{s(2)} = \Sigma\lambda_{(2)} = \lambda_{r(2)} + \lambda_{z(2)} + \theta_{cb(2)} = 1{,}33 + 1{,}31 + 0{,}835 = \underline{3{,}475}\ \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$$

j) *F.e.m. de reactancia del rotor.* Seg [1.06.03 q]

$$E_{s(2)} = 16\ \pi^2 \cdot 10^{-9}\, f\ (\lambda_{s(2)}\ L)\ I_b \qquad \text{(V/fase)} \qquad [1.06.11\ \text{g}]$$

Tomemos, según lo dicho, $f = 50$ Hz.

La corriente por barra es fácil de calcular atendiendo a la potencia del motor, ya que según se sabe, prácticamente, llamando E_b a la f.e.m. por barra en reposo, en V,

$$P = n_{(2)}\ E_b\ I_b\ \eta_m\ (1 - \sigma) \qquad \text{(W)} \qquad [1.06.11\ \text{h}]$$

siendo η_m el rendimiento mecánico del motor y σ el deslizamiento a P.C. Cuanto a la f.e.m. por barra del rotor, es la misma que por conductor del estator, y ésta, a su vez, se deduce de la tensión en bornes admitiendo a priori una cierta caída de tensión en carga que, si conviene, pueda rectificarse por aproximaciones sucesivas terminado el cálculo del motor, después del primer tanteo.

Suponiendo que la caída en el estator sea de un 8 % la f.e.m. por fase desciende, con el arrollamiento en triángulo (conexión de marcha) a

$$0{,}92 \cdot 220 = 202{,}5\ \text{V/fase}$$

Como hay 36 ranuras en total o $\frac{36}{3} = 12$ ranuras por fase con 17 conductores por ranura ($17 \times 12 = 204$ conductores por fase), la f.e.m. por conductor vale

$$E_b = \frac{202{,}5}{204 \cdot 0{,}966} = 1{,}03\ \text{V/conductor}$$

($\zeta_{(1)} = 0{,}966$ es el factor de bobinado para $n_{pf} = 2$)

El rendimiento mecánico será aproximadamente $\eta_m \approx 0{,}98$ y el deslizamiento $\sigma \approx 0{,}04$ (o sea, 4 %). De [*h*],

$$I_b = \frac{P}{n_{(2)}\, E_b\, \eta_m\, (1-\sigma)} = \frac{15 \cdot 736}{44 \cdot 1{,}03 \cdot 0{,}98 \cdot 0{,}96} = 265 \text{ A/barra}$$

Sustituyendo ahora en [g],

$$E_{x(2)} = 16 \cdot \pi^2 \cdot 10^{-8} \cdot 50\ (3{,}475 \cdot 25)\ 265 = 0{,}182 \text{ (V/fase)}.$$

En valor relativo, pues,

$$\varepsilon_{x(2)} = \frac{0{,}182}{2 \cdot 1{,}03}\ 100 = 9{,}2\ \%.$$

Cada fase, en número de ellas igual al de ranuras por polo $\left(m_{(2)} = \frac{n_{(2)}}{2p}\right)$ consta de *dos barras en serie* y p grupos de éstos en paralelo.

A esto le corresponde una reactancia por fase rotórica

$$X_{(2)} = \frac{E_{x(2)}}{I_{f(2)}} = \frac{E_{x(2)}}{pI_b} = \frac{0{,}182}{3 \cdot 265} = \frac{0{,}182}{795} = 0{,}229 \cdot 10^{-3} (\Omega/\text{fase})$$

y una inductancia

$$L_{(2)} = \frac{X_{(2)}}{2\pi f} = \frac{0{,}229}{2\pi \cdot 50}\ 10^{-3} = 0{,}73 \cdot 10^{-6} \text{ (H/fase)}.$$

Por barra, tendríamos: (una barra constituye la mitad de una espira y p espiras en paralelo forman una fase rotórica).

$$E_{b(2)} = 1{,}03 \text{ (V/barra)}$$

$$E_{bx(2)} = \frac{0{,}182}{2} = 0{,}091 \text{ (V/barra)}$$

$$X_{b(2)} = \frac{1}{2}\,(3 \cdot 0{,}229 \cdot 10^{-3}) = 0{,}344 \cdot 10^{-3} \text{ (}\Omega\text{/barra)}$$

$$L_{b(2)} = \frac{1}{2}\,(3 \cdot 0{,}73 \cdot 10^{-6}) = 1{,}095 \cdot 10^{-6} \text{ (H/barra)}.$$

1.06.12. Dispersión en los transformadores

Su estudio puede referirse fácilmente al que acabamos de efectuar para las máquinas rotativas asimilando la posición de los bobinados del transformador en las ventanas del núcleo a la de las bobinas de las máquinas alojadas en sus ranuras.

Expondremos todas las permeancias en unidades C.G.S. $\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$; las longitudes se expresarán, pues, en cm; la permeabilidad absoluta del aire $\mu_0 = 1$.

1.06.13. Bobinados de columna concéntricos

Consideremos en primer lugar un transformador de columnas sobre cada una de las cuales van montados los dos arrollamientos primario y secundario de una misma fase (fig. 1.06.13 a). El flujo de dispersión se muestra en dicha figura. La sección cilíndrica por la generatriz AA asimila el conjunto de cada

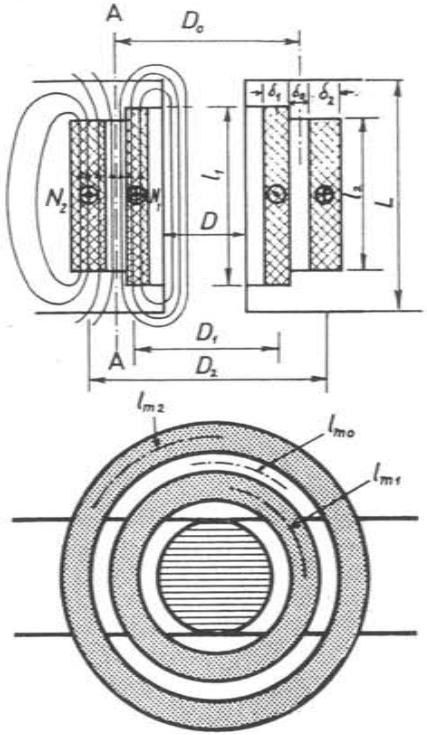


Fig. 1.06.13 a. Dispersión en los transformadores de arrollamientos concéntricos.

$$L_1 = l_1 + 2\,\delta_1 \leqslant L$$
$$L_2 = l_2 + 2\,\delta_2 \leqslant L$$
$$\Lambda_{x1} = \left(\frac{\delta_o\, l_{mo}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{3}\right)\frac{1}{L_1}$$
$$\Lambda_{x2} = \left(\frac{\delta_o\, l_{mo}}{2} + \frac{\delta_2\, l_{m2}}{3}\right)\frac{1}{L_2}.$$

bobinado primario o secundario al de una serie de espiras alojadas en ancha ranura, y a los efectos prácticos de la reluctancia el circuito puede considerarse limitado a las entrecaras y cuerpos de las bobinas recorridos por el flujo en cuestión paralelamente al eje de la columna, es decir, a la dirección del flujo disperso. Asignando a cada arrollamiento la mitad de la permeancia correspondiente a la corona central entre ambas, donde el flujo es de concatenación íntegra con todas las espiras, la permeancia de dispersión del bobinado (1) vendrá dada por

$$\boxed{\Lambda_{x1} = \frac{\frac{\delta_0}{2}\, l_{m0}}{L_1} + \frac{\frac{\delta_1}{3}\, l_{m1}}{L_1}}\ \left(\frac{\text{Gb}}{\text{M}}\right) \qquad [1.06.13\text{ a}]$$

(todas las longitudes, en cm).

L_1 es una longitud equivalente para las líneas medias de fuerza. Aproximadamente

$$L_1 = l_1 + 2\,\delta_1 \qquad \text{(cm)} \qquad [1.06.13\text{ b}]$$

sin que deba tomarse nunca $L_1 > L$ (L = luz axial de la ventana); l_{m0} y l_{m1} son las circunferencias medias caracterizadas por los respectivos subíndices numéricos: cero para la entrecara y 1 para el arrollamiento (1). Designemos también por N_1 el número total de espiras de este arrollamiento, por fase o por columna. Entonces, la inductancia de dispersión por fase, [1.05.15 c], con las dimensiones lineales en cm,

$$L_{x1} = 4\,\pi \cdot 10^{-9}\, N_1^2\, \Lambda_{x1} =$$

$$= 4\,\pi \cdot 10^{-9}\, \frac{N_1^2}{L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{3} \right) \text{(H/fase)} \qquad [1.06.13\text{ c}]$$

y la reactancia de dispersión así como la f.e.m. de reactancia por fase,

$$X_1 = 2\pi f\, L_{x1} = 8\pi^2 \cdot 10^{-9}\, f\, \frac{N_1^2}{L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{3} \right) \text{(Ω/fase)} \qquad [1.06.13\text{ d}]$$

$$E_{x1} = X_1\, I_{f1} = 8\,\pi^2 \cdot 10^{-9}\, f\, \frac{N_1^2}{L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{3} \right) I_{f1} \text{ (V/fase)} \qquad [1.06.13\text{ e}]$$

Análogamente, cambiando los subíndices 1 por 2 tendremos las expresiones para el segundo arrollamiento (2).

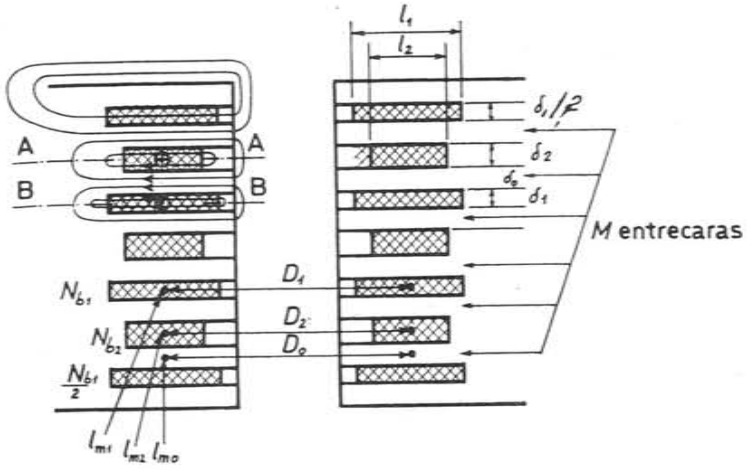
1.06.14. Bobinados de discos alternados

Las bobinas de uno y otro arrollamiento van intercaladas entre sí sobre la misma columna (fig. 1.06.14 a).

El sentido de las líneas de fuerza de dispersión pasa a ser radial.

Si N_{b1} es el número de espiras por bobina individual de uno de los devanados y N_{b2} el de espiras por bobina del otro, los planos medios transversales AA y BB interceptan unos conjuntos electromagnéticos parciales cuyas permeancias de dispersión pueden expresarse, según hemos ido viendo, por ecuaciones como la siguiente: bobina del devanado 1

$$\Lambda_{xb1} = \frac{\frac{\delta_0}{2} l_{m0}}{L_1} + \frac{\frac{\delta_1/2}{3}\, l_{m1}}{L_1} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}} \right) \qquad [1.06.14\text{ a}]$$



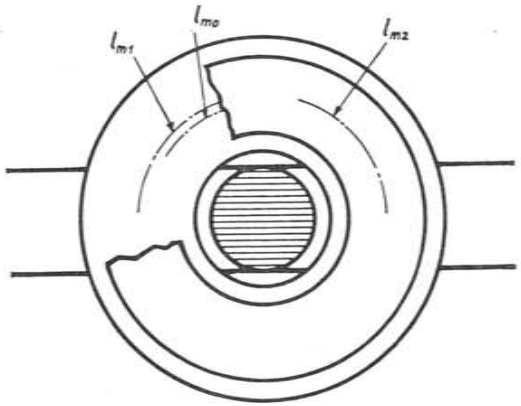


Fig. 1.06.14 a. Dispersión en los transformadores de bobinas alternadas,

$L_1 = l_1 + \delta_1 \leqslant L$

$L_2 = l_2 + \delta_2 \leqslant L$

$$\Lambda_{x1} = \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6} \right) \frac{1}{ML_1}$$

$$\Lambda_{x2} = \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_2\, l_{m2}}{6} \right) \frac{1}{ML_2}$$

En esta fórmula se toman como secciones de paso para el flujo de dispersión las correspondientes a las superficies cilíndricas de las espiras medias así en cada bobina como en la entrecara. La expresión exacta sería de tipo logarítmico como en el caso, por ejemplo, de la capacidad entre cilindros concéntricos, pero el error que se comete acudiendo a esta simplificación dado el grueso radial de las bobinas con respecto a su diámetro es perfectamente admisible. Cuanto a las longitudes L_1 de las líneas de fuerza, cabe también poner, con suficiente aproximación,

$$L_1 = l_1 + \delta_1 \quad \text{(cm)} \qquad [1.06.14\text{ b}]$$

siempre que esta ecuación no conduzca a valores de L_1 superiores a la mitad

del ancho de la ventana, medido radialmente, máxima longitud que es posible atribuir a dichas líneas de fuerza.

Si por cada columna existen M entrecaras activas de dispersión (6 en la fig. 1.06.14 a; la subdivisión de una bobina, de alta o de baja en dos, a efectos de mejorar la refrigeración no daría origen a entrecaras activas),

$$L_{x1} = 4\,\pi \cdot 10^{-9}\, M \left(\frac{N_{b1}}{2}\right)^2 \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2\, L_1} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6\, L_1}\right)$$

$$= 4\,\pi \cdot 10^{-9} \left(M \frac{N_{b1}}{2}\right)^2 \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2\, M L_1} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6\, M L_1}\right) \text{ (H/fase)}$$

y como evidentemente el número de espiras por fase o por columna del arrollamiento (1) es $N_1 = M \frac{N_{b1}}{2}$,

$$L_{x1} = 4\,\pi \cdot 10^{-9} \frac{N_1^2}{M\, L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6}\right) \left(\frac{\text{H}}{\text{fase}}\right) \qquad [1.06.14\text{ c}]$$

Comparando esta ecuación con la [1.06.13 c] se ve que la inductancia por fase tiende a ser inferior a la que correspondería a los arrollamientos dispuestos en dos bobinas concéntricas por columna, aunque esta disminución viene contrarrestada en parte por la menor longitud efectiva L_1 de las líneas de fuerza.

La disposición en bobinas alternadas conduce generalmente a una importante reducción en la dispersión del transformador.

La reactancia de dispersión será, como siempre,

$$X_1 = 2\pi f L_{x1} = 8\,\pi^2 \cdot 10^{-9}\, f \frac{N_1^2}{M\, L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6}\right) (\Omega/\text{fase}) \qquad [1.06.14\text{ d}]$$

y la f.e.m. de reactancia

$$E_{x1} = X_1\, I_{f1} = 8\,\pi^2 \cdot 10^{-9} \frac{N_1^2}{M\, L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6}\right) I_{f1} \quad \text{(V/fase)} \qquad [1.06.14\text{ e}]$$

La permeancia equivalente resulta así

$$\boxed{\Lambda_{x1} = \frac{1}{M\, L_1} \left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6}\right)} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.06.14\text{ f}]$$

Sustituyendo los subíndices 1 por 2 tendríamos las características de dispersión referentes al segundo bobinado.

1.06.15. Arrollamientos doblemente concéntricos

Cuando la reactancia de un transformador con bobinados cilíndricos en columna pudiera llegar a ser excesiva, lo que suele ocurrir en los de muy alta tensión, se acude a subdividir el de baja en dos mitades emplazando una de ellas interior y otra exteriormente al devanado de alta, fig. 1.06.15 a.

Nos hallamos así en un caso análogo al de los transformadores de bobinas alternadas y es fácil deducir por un proceso similar las siguientes expresiones para sus características de reactancia.

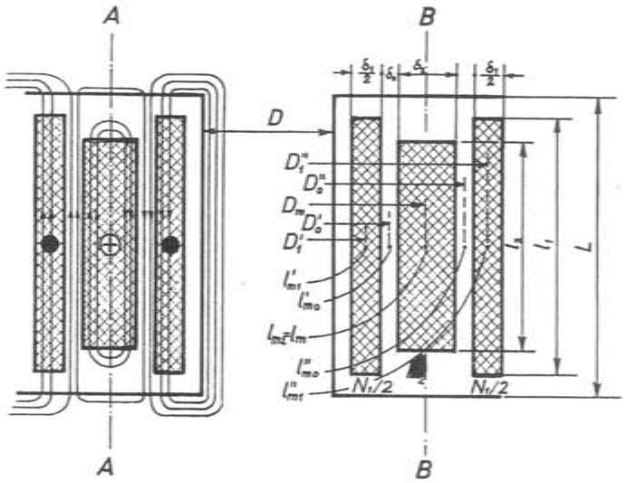


Fig. 1.06.15 a. Dispersión en los transformadores biconcéntricos simétricos

$$L_1 = l_1 + \delta_1 \leqslant L$$

$$L = l_2 + \delta_2 \leqslant L$$

$$\Lambda_{x1} = \left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_1}{6}\right) \frac{l_m}{2\, L_1}$$

$$\Lambda_{x2} = \left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_2}{6}\right) \frac{l_m}{2\, L_2}$$

Inductancia de dispersión de uno de los arrollamientos:

$$L_{x1} = 4\,\pi \cdot 10^{-9} \left(\frac{N_1}{2}\right)^2 \left(\frac{\frac{\delta_0}{2} l'_{m0}}{L_1} + \frac{\frac{\delta_1/2}{3} l'_{m1}}{L_1} + \frac{\frac{\delta_0}{2} l''_{m0}}{L_1} + \frac{\frac{\delta_1/2}{3} l''_{m1}}{L_1}\right) \quad \text{(H/fase)}$$

Reuniendo el primer y el tercer sumando del paréntesis por un lado; y el segundo y el cuarto, por otro, al mismo tiempo que podemos admitir

$$l'_{m0} + l''_{m0} = 2\ l_m$$

$$l'_{m1} + l''_{m1} = 2\ l_m,$$

$$L_{x1} = 4\ \pi \cdot 10^{-9} \left(\frac{N_1}{2}\right)^2\ 2 \left(\frac{\frac{\delta_0}{2} l_m}{L_1} + \frac{\frac{\delta_1/2}{3} l_m}{L_1}\right)$$

$$= 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_1^2\ \frac{l_m}{2\ L_1} \left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_1}{6}\right) \text{ (H/fase)} \qquad [1.06.15\ a]$$

Para L_1 puede tomarse

$$L_1 = l_1 + 2\ \frac{\delta_1}{2} = l_1 + \delta_1 \quad \text{(cm)} \qquad [1.06.15\ b]$$

o bien, simplemente, L si la suma anterior excede de esta longitud.

Obsérvese que la expresión [1.06.15 a] da como permeancia equivalente de dispersión para uno de los dos arrollamientos

$$\boxed{\Lambda_{x1} = \frac{l_m}{2\ L_1} \left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_1}{6}\right)} \left(\frac{\text{Gb}}{\text{M}}\right) \qquad [1.06.15\ c]$$

y esta es la misma que se obtendrá cortando el sistema por el cilindro axial medio AA, BB y superponiendo longitudinalmente las dos mitades, salvo por lo que se refiere al valor l_m de la espira media. En líneas generales, las permeancias de dispersión y con ellas las reactancias

$$X_1 = 2\pi f\ L_{x1} = 8\ \pi^2 \cdot 10^{-9}\ f\ N_1^2\ \frac{l_m}{2\ L_1} \left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_1}{6}\right) \text{ (Ω/fase)} \qquad [1.06.15\ d]$$

y la f.e.m. de reactancia

$$E_{x1} = X_1 I_{f1} = 8\ \pi^2 \cdot 10^{-9}\ f\ N_1^2\ \frac{l_m}{2\ L_1} \left(\frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_1}{6}\right) I_{f1} \text{ (V/fase)} \qquad [1.06.15\ e]$$

se reducen a la mitad de las que resultarían con la disposición simple concéntrica.

Para el segundo devanado basta poner los subíndices 2 en vez de 1.

Cuando las densidades de corriente no son las mismas en las dos fracciones del arrollamiento subdividido hay que tratar los devanados como asimétricos de acuerdo con el párrafo siguiente.

1.06.16. Generalización de las disposiciones anteriores

Bobinados doblemente concéntricos asimétricos. Si en la disposición doblemente concéntrica de la fig. 1.06.15 a las espiras del arrollamiento subdividido no se distribuyen por igual entre la bobina interior y la exterior, la ecuación [1.06.15 c] resulta inadecuada para la permeancia de dispersión del bobinado 1.

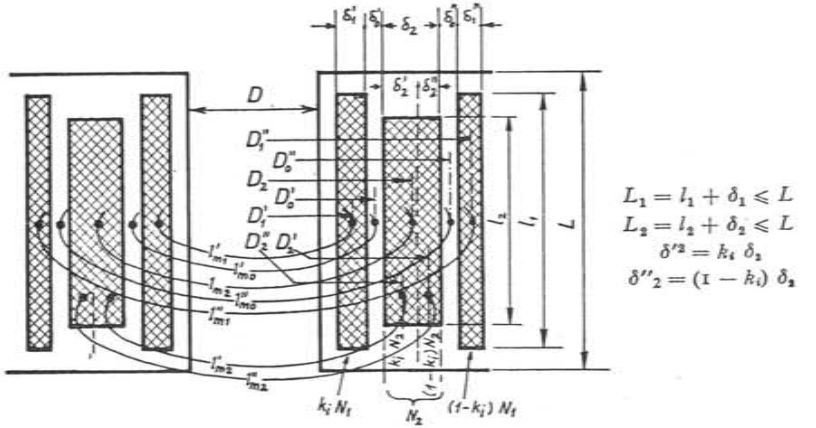


Fig. 1.06.16 a. Dispersión en los transformadores biconcéntricos asimétricos.

$$\Lambda_{x1} = \left[k_i^2 \left(\frac{\delta'_0}{2} l'_{m0} + \frac{\delta'_1}{3} l'_{m1}\right) + (1 - k_i)^2 \left(\frac{\delta''_0}{2} l''_{m0} + \frac{\delta''_1}{3} l''_{m1}\right)\right] \frac{1}{L_1}$$

$$\Lambda_{x2} = \left[k_i^2 \left(\frac{\delta'_0}{2} l'_{m0} + \frac{\delta'_2}{3} l'_{m2}\right) + (1 - k_i)^2 \left(\frac{\delta''_0}{2} l''_{m0} + \frac{\delta''_2}{3} l''_{m2}\right)\right] \frac{1}{L_2}$$

Designando por k_i a la fracción del total de espiras N_1 asignadas a la bobina interior ($k_i \cdot N_1$ espiras) y, por tanto, siendo $(1 - k_i)$ la fracción de N_1 que va en la bobina exterior, fig. 1.06.16 a,

$$L_{x1} = 4\ \pi \cdot 10^{-9} \left[[(k_i\ N_1)^2 \left(\frac{\frac{\delta'_0}{2} l'_{m0}}{L_1} + \frac{\frac{\delta'_1}{3} l'_{m1}}{L_1}\right) + \right.$$

$$\left. + [(1 - k_i)\ N_1]^2 \left(\frac{\frac{\delta''_0}{2} l_{m0}''}{L_1} + \frac{\frac{\delta''_1}{3} l''_{m1}}{L_1}\right)\right] =$$

$$L_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_1^2 \left[k_i^2 \left(\frac{\delta'_0}{2} \frac{l'_{m0}}{L_1} + \frac{\delta'_1}{3} \frac{l'_{m1}}{L_1}\right) + (1 - k_i)^2 \left(\frac{\delta''_0}{2} \frac{l''_{m0}}{L_1} + \frac{\delta''_1}{3} \frac{l_{m1}''}{L_1}\right)\right] \qquad [1.06.16\ a]$$

de donde la permeancia combinada para el arrollamiento 1

$$\Lambda_{x1}=\frac{1}{L_1}\left[k_i^2\left(\frac{\delta_0'}{2}l'_{m0}+\frac{\delta_1'}{3}l'_{m1}\right)+(1-k_i)^2\left(\frac{\delta_0''}{2}l_{m0}''+\frac{\delta_1''}{3}l_{m1}''\right)\right]\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right) \qquad [1.06.16\ \mathrm{b}]$$

La expresión en esencia, se equipara a la de los devanados simétricos [1.06.15 c] ponderando el espesor de cada grueso parcial δ con el factor de su correspondiente desarrollo medio l_m y del cuadrado de la fracción de espiras que le corresponde.

Claramente se ve que si en [b] hacemos $k_i = 0{,}5$, $\delta'_0 = \delta''_0 = \delta_0$ y $\delta'_1 = \delta''_1 = \frac{\delta_1}{2}$,

$$\Lambda_{x1}=\frac{0{,}25}{L_1}\left[\frac{\delta_0}{2}(l_m{}'_0+l_m{}''_0)+\frac{\delta_1}{6}(l_m{}'_1+l_m{}''_1)\right]$$

Poniendo, además, $l_m{}'_0 + l_m{}''_0 = l_m{}'_1 + l_{m1}{}'' = 2\ l_m$

$$\Lambda_{x1}=\frac{l_m}{2\,L_1}\left(\frac{\delta_0}{2}+\frac{\delta_1}{6}\right)\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right)$$

con lo cual caemos de nuevo en la expresión [1.06.15 c].

Al calcular k_i, si las densidades de corriente Δ_i en las bobinas interiores y Δ_e en las exteriores del arrollamiento fraccionado, no fueran idénticas, deberían ponderarse las espiras respectivas según estas densidades.

Por lo que se refiere al arrollamiento (2), estableceremos idealmente la subdivisión de sus espiras en la misma relación que las que aparecen frente a él pertenecientes al arrollamiento (1), es decir, fraccionándolo entre dos anillos ficticios de $k_i N_2$ y $(1 - k_i) N_2$ espiras; se comprende que así llegaríamos a unas ecuaciones idénticas a las [a] y [b] sin otra diferencia que el cambio de los subíndices 1 por otros 2.

Respecto a las longitudes L_1 y L_2 puede hacerse

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= l_1 + \delta_1' + \delta_1'' = l_1 + \delta_1 \quad (\mathrm{cm}) \\ L_2 &= l_2 + \delta_2' + \delta_2'' = l_2 + \delta_2 \quad (\mathrm{cm}) \end{aligned}\right\} \qquad [1.06.16\ \mathrm{c}]$$

1.06.17. Bobinados concéntricos de columna con entrecaras muertas

Las necesidades de refrigeración pueden aconsejar el establecer canales axiales de ventilación a lo largo de uno u otro arrollamiento alterándose con ello la ley de concatenación progresiva que conducía a una reducción de la permeancia resultante hasta $\frac{1}{3}$ del valor correspondiente a un sistema de concatenación total.

Consideremos primero el caso de dos arrollamientos subdivididos en coronas de espesor uniforme y con canales de la misma dimensión radial, aunque puede ser distinto el número de las subdivisiones del primario y del secundario (fig. 1.06.17 a).

La permeancia de dispersión combinada para el devanado 1 por ejemplo, se obtiene sumando al término normal correspondiente al sistema sencillo

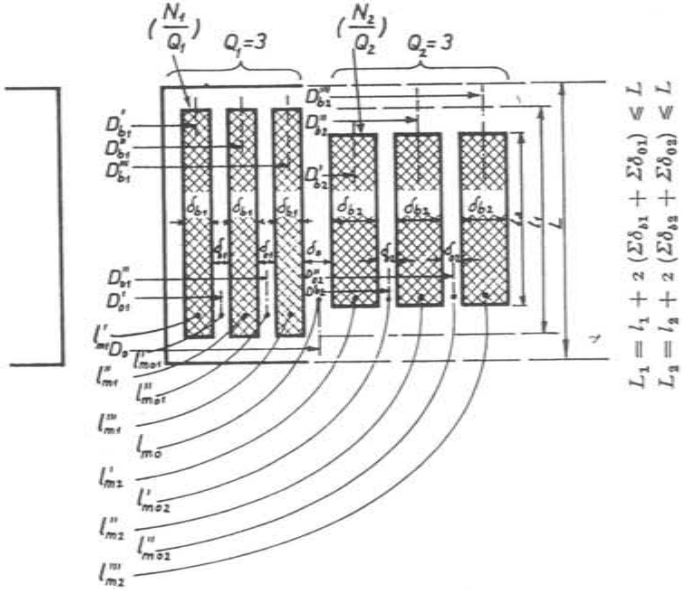


Fig. 1.06.17 a. Dispersión en los transformadores concéntricos con entrecaras muertas.

$$\Lambda_{x1}=\left[\left(\frac{\delta_0}{2}\,l_{m0}+\frac{\Sigma\,\delta_{b1}\,l_{m1}}{3}\right)+\frac{Q_1-1{,}5+\frac{1}{2\,Q_1}}{Q_1-1}\,\frac{\Sigma\,\delta_{01}\,l_{m01}}{3}\right]\frac{1}{L_1}$$

$$\Lambda_{x2}=\left[\left(\frac{\delta_0}{2}\,l_{m0}+\frac{\Sigma\,\delta_{b2}\,l_{m2}}{3}\right)+\frac{Q_2-1{,}5+\frac{1}{2\,Q_2}}{Q_2-1}\,\frac{\Sigma\,\delta_{02}\,l_{m02}}{3}\right]\frac{1}{L_2}.$$

de dos únicas bobinas, una serie de términos, donde intervienen las secciones de las entrecaras muertas, afectados de cierto coeficiente numérico según el fraccionamiento que se adopte del bobinado.

La expresión completa es [1]

(1) El paréntesis del último sumando $\left(Q_1 - 1{,}5 + \frac{1}{2Q_1}\right)$ para $Q_1 = 2$ bobinas vale $\frac{3}{4}$ y su producto por $\frac{\delta_{01}}{3}$ se convierte en $\frac{\delta_{01}}{4}$. Por tal motivo hemos hecho figurar la distancia h_0 de la fig. 1.06.07a croquis 6 que aparece entre las dos bobinas, al trasladarla a la ecuación [1.06.07 h], por $\frac{1}{4}$ de su valor h_0.

Se observa también que a medida que Q_1 aumenta, el citado paréntesis tiende a valer $(Q_1 - 1{,}5)$

$$\Lambda_{x1} = \frac{1}{L_1}\left[\left(\frac{\delta_0}{2} l_{m0} + \frac{\delta_{b1}}{3}\Sigma\, l_{m1}\right) + \left(Q_1 - 1{,}5 + \frac{1}{2Q_1}\right)\frac{\delta_{01}}{3}\frac{\Sigma\, l_{m01}}{Q_1 - 1}\right]\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right) \qquad [1.06.17\ \mathrm{a}]$$

con $L_1 = l_1 + 2\,(\Sigma\delta_{b1} + \Sigma\delta_{01})$ y, como máximo, $L_1 = L$ [1.06.17 b]

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\, l_{m1} &= l_m'_1 + l_m''_1 + \ldots\ldots \\ \Sigma\, l_{m01} &= l_m'_{01} + l_m'_{01} + \ldots\ldots \end{aligned}\right\} \qquad [1.06.17\ \mathrm{c}]$$

Designado por N_1 el número de espiras por fase del devanado 1 repartidas por igual entre las Q_1 bobinas concéntricas de la columna correspondiente

$$\left.\begin{aligned} L_{x1} &= 4\,\pi \cdot 10^{-9}\, N_1^2\, \Lambda_{x1} \\ X_1 &= 2\,\pi f\, L_{x1} \\ E_{x1} &= X_1\, I_{f1} \end{aligned}\right\} \qquad [1.06.17.\mathrm{d}]$$

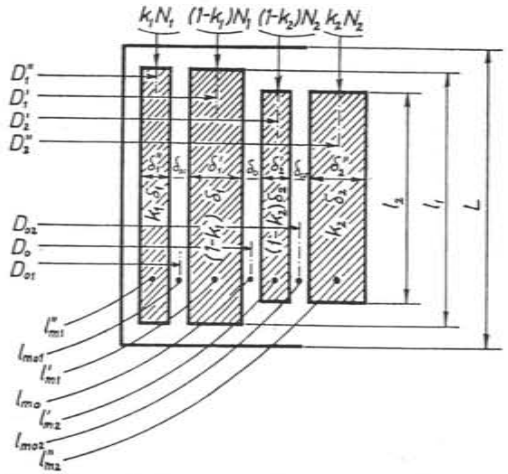


Fig. 1.06.17 b. Dispersión en los transformadores concéntricos con entrecaras muertas y desigual distribución de las bobinas.

$$\Lambda_{x1} = \left[\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \alpha_1\,(\delta'_1\, l'_{m1}) + \beta_1\left(\delta_{01}\, l_{m01} + \frac{\delta_1''\, l_{m1}''}{3}\right)\right]\frac{1}{L_1}$$
$$\left[\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \alpha_2\,(\delta'_2\, l'_{m2}) + \beta_2\left(\delta_{02}\, l_{m02} + \frac{\delta_2''\, l_{m2}''}{3}\right)\right]\frac{1}{L_2}.$$

que no difiere tampoco, entonces, en gran medida, de $(Q_1 - 1)$, o sea del número de entrecaras δ_{01}, convirtiéndose el término, aproximadamente, en $\frac{(Q_1 - 1)\delta_{01}}{3}$ lo cual autoriza, si se aplica al aislamiento de las diversas capas de una bobina, a incorporarlo al grueso del cobre para el cálculo de la reactancia.

Si la repartición de espiras de cada arrollamiento entre las varias bobinas no es uniforme, puede emplearse la misma ecuación [a] tomando para δ_{b1} y δ_{01} unos valores ponderados, o sea, sustituyendo el producto $\delta_{b1}\,\Sigma\, l_{m1}$ por $\Sigma\,\delta_{b1}\, l_{m1}$ y el producto $\delta_{01}\,\Sigma\, l_{m01}$ por $\Sigma\,\delta_{01}\, l_{m01}$ como se ve en la fig. 1.06.17 a.

En el caso de la subdivisión de uno y otro devanado en dos bobinas muy distintas como suele ocurrir al disponer tomas para variaciones de voltaje (fig. 1.06.17 b) puede aplicarse la siguiente fórmula:

$$\Lambda_{x1} = \frac{1}{L_1}\left[\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \alpha_1\,(\delta_1'\, l'_{m1}) + \beta_1\left(\delta_{01}\, l_{m01} + \frac{\delta_1''\, l_{m1}''}{3}\right)\right]\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right) \qquad [1.06.17\ \mathrm{e}]$$

δ_0 es la anchura radial de la entrecara activa o de separación entre ambos arrollamientos, con su desarrollo medio l_{m0}

δ_1' es el grueso radial de la bobina del arrollamiento 1 más próxima a dicha entrecara, con una longitud de espira media l'_{m1}

δ_{01} es la anchura radial de la entrecara muerta del devanado 1; y su desarrollo medio, l_{m01}

δ_1'' es el grueso radial de la bobina del arrollamiento 1 más alejada. de la entrecara activa, cuya espira media vale l_{m1}''.

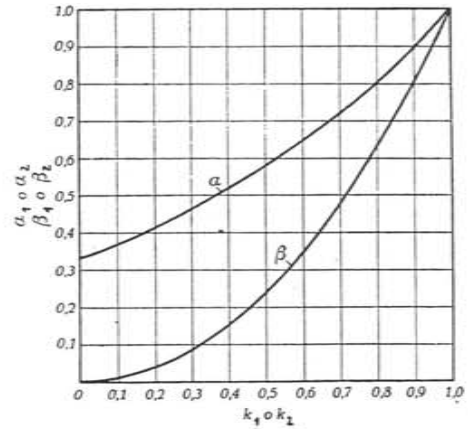


Fig. 1.06.17 c. Dispersión de un transformador con uno o ambos arrollamientos concéntricos, subdivididos en dos bobinas desiguales. Coeficientes de proporción.

α_1 y β_1 son dos coeficientes a tomar de la fig. 1.06.17 c que dependen de la fracción k_1 sobre el total de espiras N_1 del arrollamiento considerado, correspondiente a la segunda bobina citada, es decir, a la más alejada de la entrecara activa.

Como siempre, además,

$$\left.\begin{aligned} L_{x1} &= 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_1^2\ \Lambda_{x1} \quad \text{(H/fase)} \\ X_1 &= 2\ \pi\ f\ L_{x1} \quad \text{(Ω/fase)} \\ E_{x1} &= X_1\ I_f \quad \text{(V/fase)} \end{aligned}\right\} \quad [1.06.17\ f]$$

La sustitución del subíndice 1 por el 2 hace valederas las ecuaciones para este segundo devanado.

1.06.18. Arrollamientos recorridos por corrientes desfasadas

Este caso se presenta en los transformadores de distribución con el secundario en zigzag y en otros para rectificadores. Al estudiar la dispersión de las máquinas rotatorias ya nos encontramos ante un problema similar cuando los bobinados eran de doble capa y paso acortado.

El fenómeno se traduce en la aparición de unas componentes suplementarias de la f.e.m. de reactancia que, no obstante los desfases de las corrientes inductoras, dan una resultante, por la combinación de estos mismos, en fase con la f.e.m. debida a la inductancia de dispersión principal. En efecto:

Imaginemos al secùndario de un transformador en zigzag, fig. 1.06.18 a. En (1) se muestra el esquema de conexiones y en (2) el diagrama vectorial de f.e.m. y corrientes que, para mayor sencillez del trazado, lo cual no altera el principio, hemos supuesto con cos $\varphi = 1$.

La f.e.m. de la fase w, por ejemplo, se compone de la inducida, con signo positivo, en la semibobina a y la inducida, con signo opuesto, en la semibobina $(-c)$. Según lo que acabamos de decir, el vector de la corriente I_w en dicha fase w, se superpone al de la f.e.m..

Al circular la corriente I_w por las dos semibobinas (a) y $(-c)$ engendra las f.e.m. de autoinducción respectivas $(\omega\ L_{(a)}\ I_w)$ y $(\omega\ L_{(-c)}\ I_w)$ retrasadas de 90° respecto a dicha corriente, tal como se muestra en el diagrama (2); la suma de ambos vectores equivale a la f.e.m. $E_{\sigma 2}$ de reactancia normal en una fase secundaria completa, aunque ésta se monte distribuida sobre dos núcleos distintos.

Pero, además, existe la inductancia mutua de $(-a)$, recorrida por la corriente I_u, sobre a lo cual origina en esta última una f.e.m. suplementaria $\omega M_{(-a)a}\ I_u$ que retrasa de 90° respecto a $(-I_u)$ o adelanta de 90° respecto a $(+I_u)$, según se ha dibujado en el diagrama. De la misma manera la semibobina c recorrida en sentido positivo por la corriente I_v induce sobre $(-c)$ otra f.e.m. $\omega M_{c(-c)}\ I_v$ que por introducirse en circuito con sentido negativo adelanta también de 90° respecto a la corriente inductora I_v tal y como aparece en el diagrama.

Estas dos últimas f.e.m. de inducción mutua dan una resultante E_{M2} en fase con $E_{\sigma 2}$ viniendo así a incrementar, simplemente la inductancia, propia del arrollamiento secundario.

La f.e.m. normal de reactancia $E_{\sigma 2}$ se deduce de la expresión corriente

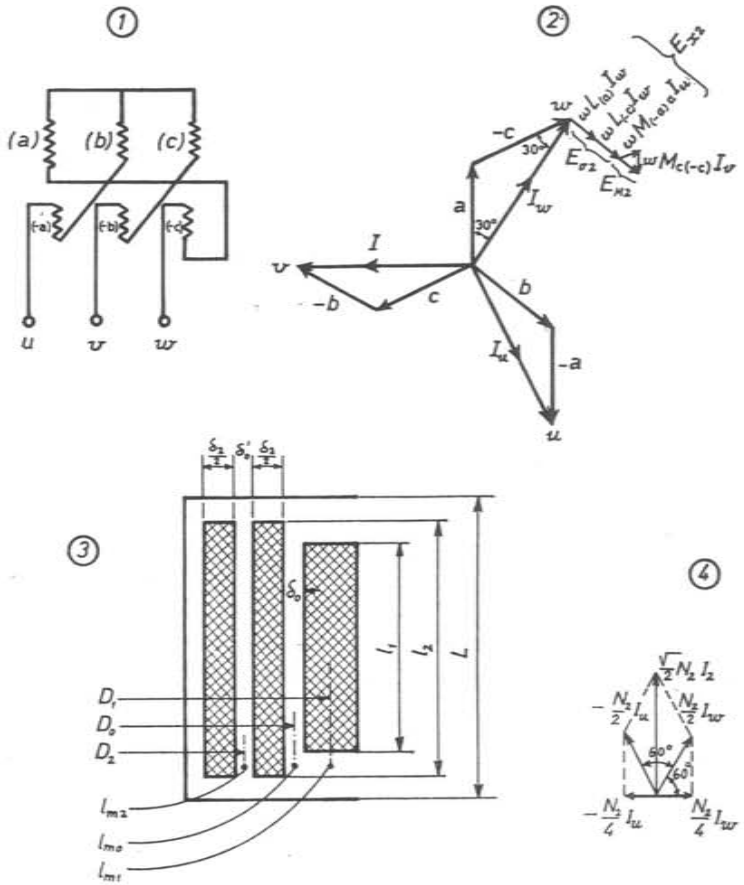


Fig. 1.06.18 a. Cálculo de la f.e.m. de reactancia para el secundario en zigzag de un transformador.

$$L_2 = l_2 + 2\ \delta_2 + 2\ \delta'_0 \leqslant L$$

$$L'_2 = l_2 + \delta_2 \leqslant L$$

$$\Lambda_{x2} = \frac{3}{4\ L_2}\left(\frac{\delta_0\ l_{m0}}{2} + \frac{\delta_2\ l_{m2}}{3} + \frac{\delta'_0\ l_{m2}}{4}\right) + \frac{l_{m2}}{16\ L'_2}\left(\delta'_0 + \frac{\delta_2}{3}\right)$$

relativa a la permeancia de dispersión del secundario como devanado conjunto, sin dejar de tener en cuenta, empero, que la presencia del desfase entre las dos mitades de una columna equivale a una reducción del número de espiras activas.

Normalmente, (figura 1.06.18 a croquis 3)

$$\Lambda_{\sigma 2} = \frac{1}{L_2}\left(\frac{\delta_0\ l_{m0}}{2} + \frac{\delta_2\ l_{m2}}{3} + \frac{\delta_0'\ l_{m2}}{4}\right)\ \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right)$$

con

$$L_2 = l_2 + 2\ \delta_2 + 2\ \delta_0' \leqslant L \qquad [1.06.18\ a]$$

Pero el desfase citado se traduce en la reducción de las espiras efectivas secundarias al valor $\frac{\sqrt{3}}{2} N_2$. Si queremos calcular la inductancia propia $L_{\sigma 2}$ sobre la base de N_2 espiras por fase, deberemos multiplicar el valor de $\Lambda_{\sigma 2}$ por el cuadrado de dicha relación $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ tomando

$$\boxed{\Lambda_{\sigma 2} = \frac{3}{4\ L_2}\left(\frac{\delta_0\ l_{m0}}{2} + \frac{\delta_2\ l_{m2}}{3} + \frac{\delta_0'\ l_{m2}}{4}\right)} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.06.18\ b]$$

Entonces,

$$\left.\begin{aligned} L_{\sigma 2} &= 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_2^2\ \Lambda_{\sigma 2} \quad \text{(H/fase)} \\ X_{\sigma 2} &= 2\ \pi\ f\ L_{\sigma 2} \quad \text{(}\Omega\text{/fase)} \\ \text{y} \qquad E_{\sigma 2} &= X_{\sigma 2}\ I_2 \quad \text{(V/fase)} \end{aligned}\right\} \qquad [1.06.18\ c]$$

Estrictamente, esta f.e.m. de dispersión secundaria es la que proviene de la excitación combinada de la f.m.m. primaria y su opuesta del secundario debida la última a la componente $\frac{\sqrt{3}}{2}\ 2$ de la corriente I_2 neutralizada por el primario (véase también el diagrama 4).

Cuanto a la permeancia de inducción mutua entre las dos mitades secundarias de cada columna, equiparable, según acabamos de ver, a un incremento de la permeancia de autoinducción [b], comencemos por valorarla en términos normales correspondientes a las dos semibobinas de espesores idénticos $\frac{\delta}{2}$ separadas por la entrecara δ_0'

$$\Lambda_{M2} = \frac{2}{L_2'}\left(\frac{\delta_0'}{2} + \frac{\delta_2/2}{3}\right) l_{m2} = \frac{l_{m2}}{L'_2}\left(\delta_0' + \frac{\delta_2}{3}\right) \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

$$L'_2 = l_2 + \delta_2 \qquad [1.06.18\ d]$$

Sobre esta permeancia actúa un bobinado que sólo posee la mitad de las espiras propias de una fase secundaria, o sea $\frac{N_2}{2}$, recorridas por las corrientes I_2 de dos fases distintas. Pero de estas corrientes, habremos de tomar ahora en cuenta nada más que las componentes en oposición, habiéndose computado ya las componentes en fase por su acción combinada con I_1 sobre

la permeancia $\Lambda_{\sigma 2}$. Nótese que las corrientes de fase opuesta en las dos semibobinas responden a las condiciones de cualquier bobina simple en la cual las intensidades a uno y otro lado del eje longitudinal van, efectivamente, en oposición de fase.

Para el grupo $(+a)(-a)$, por ejemplo, recorrido por las intensidades (I_w) y $(-I_u)$ respectivamente, creadoras de unos amperios vueltas $\frac{N_2}{2} I_w$ y $-\frac{N_2}{2} I_u$, las componentes en oposición mencionadas establecen unos Av (diagrama (4)),

$$\frac{N_2}{4} I_w \quad \text{y} \quad -\frac{N_2}{4} I_u \quad \text{(Av)}$$

o en valor absoluto, sencillamente,

$$\frac{N_2}{4} I_2 \quad \text{(Av)}$$

Si tomamos, una vez más, como base para el cálculo de la inductancia de este género L_{M2}, el número total de espiras por fase N_2, deberemos reducir Λ_{M2} en la relación de $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ adoptando

$$\boxed{\Lambda_{M2} = \frac{l_{m2}}{16\ L'_2}\left(\delta_0' + \frac{\delta_2}{3}\right)} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.06.18\ e]$$

con lo cual

$$\left.\begin{aligned} L_{M2} &= 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_2^2\ \Lambda_{M2} \quad \text{(H/fase)} \\ X_{M2} &= 2\ \pi\ f\ L_{M2} \quad \text{(}\Omega\text{/fase)} \\ \text{y} \qquad E_{M2} &= X_{M2}\ I_{f2} \quad \text{(V/fase)} \end{aligned}\right\} \qquad [1.06.18\ f]$$

En total, llegamos a las siguientes expresiones que engloban simultáneamente los efectos de la autoinducción y de la inducción mutuas, limitadas al arrollamiento secundario

$$\boxed{\Lambda_{x2} = \Lambda_{\sigma 2} + \Lambda_{M2}} \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \qquad [1.06.18\ g]$$

$$\left.\begin{aligned} L_{x2} &= 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_2^2\ \Lambda_{x2} \quad \text{(H/fase)} \\ X_2 &= 2\ \pi\ f\ L_{x2} \quad \text{(}\Omega\text{/fase)} \\ E_{x2} &= X_2\ I_{f2} \quad \text{(V/fase)} \end{aligned}\right\} \qquad [1.06.18\ h]$$

Todos estos valores se hallan, pues, referidos al número total de espiras por fase secundaria N_2. Cuando se estudia la tensión de corto circuito de un transformador, conviene referir ambos devanados, con sus permeancias, inductancias, reactancias y caídas de tensión por efectos del flujo disperso, a un mismo arrollamiento, al primario en el caso de la conexión en zig-zag. Al no ser aquí la relación de transformación para las f.e.m. igual a la de las

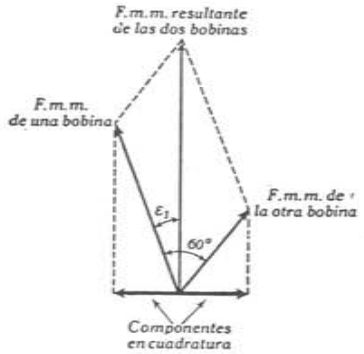


Fig. 1.06.18 b. Corrientes desafasadas en bobinas asimétricas.

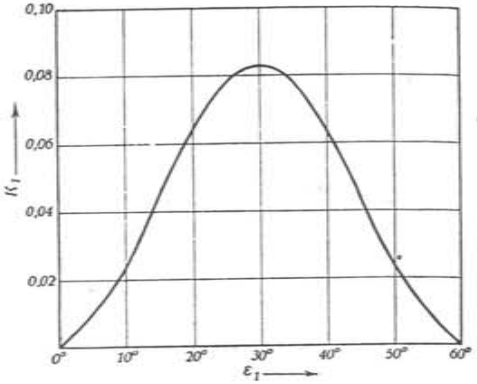


Fig. 1.06.18 c. Coeficiente para el cálculo de la permeancia con bobinas asimétricas recorridas por corrientes desfasadas entre sí.

espiras correspondientes, la reducción del secundario al primario exige una nueva corrección, como veremos oportunamente cuando tratemos de los parámetros de corto circuito referentes a los transformadores (capítulo 2.02.7 f)

La circunstancia de ser, por lo general δ_0' muy reducido, puesto que el secundario de los transformadores de distribución en zig-zag es siempre de baja tensión, unida a la presencia del divisor 16 en [e] permite normalmente prescindir de esta f.e.m. E_{M2} en el cálculo del transformador. Sólo en los que alimentan rectificadores de alta tensión puede llegar a adquirir alguna importancia la inductancia mutua dentro del secundario. Si las dos fracciones del bobinado con sus corrientes desfasadas de 60º no son idénticas, (fig. 1.06.18 b), el factor 1/16 de la ecuación [d] se sustituirá por $(^3/_4)\ K_1$, tomando K_1 de la curva mostrada en la fig. 1.06.18 c en función del ángulo ε_1, es decir,

$$\boxed{\Lambda_{M2} = \frac{3}{4} K_1 \frac{l_m^{\,2}}{L_2}\left(\delta_0' + \frac{\delta_2}{3}\right)} \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right) \qquad [1.06.18\ \mathrm{i}]$$

1.06.19. Ejemplos (1)

Ejemplo 1. Calcular las f.e.m. de reactancia primaria y secundaria para el siguiente transformador monofásico de bobinas concéntricas

Potencia: 66 kVA

Tensiones: 7600/462-231 V

Frecuencia: 50 Hz

En la fig. 1.06.19 a se muestran las dimensiones y número de espiras del bobinado por columna. Los arrollamientos primarios de ambas columnas van en serie y los secundarios también en serie a 462 V y en paralelo a 231 V.

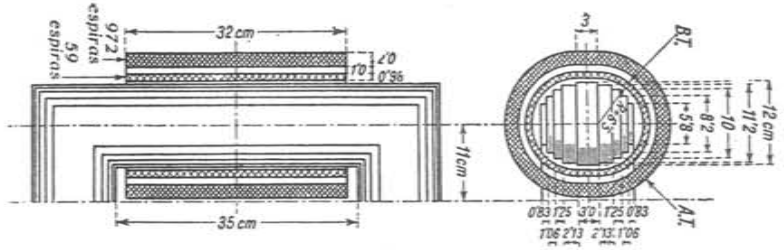


Fig. 1.06.19 a. Cálculo de la reactancia de dispersión de un transformador de bobinas concéntricas

Permeancias de dispersión por columna [1.06.13 a]

$$\Lambda_{x1} = \left(\frac{\delta_0}{2} l_{m0} + \frac{\delta_1}{3} l_{m1}\right) \frac{1}{L_1}\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right) \qquad \text{(devanado exterior)}$$

$$\Lambda_{x2} = \left(\frac{\delta_0}{2} l_{m0} + \frac{\delta_2}{3} l_{m2}\right) \frac{1}{L_2}\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Gb}}\right) \qquad \text{(devanado interior)}$$

Según el dibujo, $\delta_0 = 1$ cm $\quad \delta_1 = 2$ cm., $\quad \delta_2 = 0{,}98$ cm

$l_{m2} = 2 \times 3 + \pi\ (13 + 0{,}98) \qquad = 50$ cm

$l_{m0} = 2 \times 3 + \pi\ (13 + 2 \cdot 0{,}98 + 1) \qquad = 56{,}5$ »

$l_{m1} = 2 \times 3 + \pi(13 + 2 \cdot 0{,}98 + 2 \cdot 1 + 2) = 65{,}5$ »

Para las longitudes axiales del circuito magnético tomaríamos, [1.06.13 b],

$$L_1 = l_1 + 2\delta_1 = 32 + 2 \cdot 2 = 36 \text{ cm}$$

$$L_2 = l_2 + 2\ \delta_2 = 32 + 2 \cdot 0{,}98 = 34 \text{ cm}$$

pero como la primera excede de $L = 35$ cm, adoptamos

$$L_1 = 35 \text{ cm}$$

(1) Los datos para la elaboración de estos ejemplos están tomados del libro citado del autor, sobre Transformadores.

$$L_2 = 34 \text{ cm}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones de las permeancias

$$\Lambda_{x1} = \left(\frac{1 \cdot 56{,}5}{2} + \frac{2 \cdot 65{,}5}{3}\right)\frac{1}{35} = 2{,}05\ \frac{\text{M}}{\text{Gb}} \qquad \text{por columna}$$

$$\Lambda_{x2} = \left(\frac{1 \cdot 56{,}5}{2} + \frac{0{,}98 \cdot 50}{3}\right)\frac{34}{1} = 1{,}31\ \frac{\text{M}}{\text{Gb}} \qquad \text{por columna}$$

de donde, [1.06.13 c, d y e], también *por columna*, con $\frac{N_1}{2} = 972$ espiras primarias y $\frac{N_2}{2} = 59$ espiras secundarias, las inductancias de dispersión valdrán:

$$L_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9}\left(\frac{N_1}{2}\right)^2 \Lambda_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 972^2 \cdot 2{,}05 = 24{,}4 \times 10^{-3} \quad \text{(H/columna)}$$

$$L_{x2} = 4\pi \cdot 10^{-9}\left(\frac{N_2}{2}\right)^2 \Lambda_{x2} = 4\pi \cdot 10^{-9} 59^2 \cdot 1{,}31 = 57{,}2 \times 10^{-6} \quad \text{(H/columna)}$$

o el doble para las dos columnas con los bobinados en serie (tensiones nominales 7 600 y 462 V), es decir

$L_{x1} = 2 \cdot 24{,}4 \cdot 10^{-3} = 48{,}8 \cdot 10^{-3}$ H para el primario de 7 600 V

$L_{x2} = 2 \cdot 57{,}2 \cdot 10^{-3} = 114{,}4 \cdot 10^{-6}$ H para el secundario a 462 V

Con ello, las reactancias del transformador, [1.06.13 d],

$X_1 = 2\pi f L_{x1} = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 48{,}8 \cdot 10^{-3} = 15{,}35\ \Omega$ para el primario

$X^2 = 2\pi f L_{x2} = 2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 114{,}4 \cdot 10^{-6} = 0{,}036\ \Omega$ para el secundario

Las corrientes nominales respectivas son

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{7{,}6}{66} = 8{,}7 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{P}{U_2} = \frac{66}{0{,}462} = 143 \text{ A}$$

y las f.e.m. de reactancia, [1.06.13 e],

$$E_{x1} = X_1\ I_1 = 15{,}35 \cdot 8{,}7 = 133{,}5 \text{ V}$$

$$E_{x2} = X_2\ I_2 = 0{,}036 \cdot 143 = 5{,}15 \text{ V}$$

en la conexión de 462 V.

En %,

$$\overset{*}{e}_{x1} = \frac{133{,}5}{7\,600}\,100 = 1{,}76\ \%$$

$$\overset{*}{e}_{x2} = \frac{5{,}15}{462}\,100 = 1{,}115\ \%$$

Al estudiar los circuitos equivalentes veremos que la f.e.m. relativa de reactancia del transformador, como impedancia en serie, para los efectos de la regulación y de la corriente de corto circuito, es igual precisamente a la suma de ambos valores

$$\overset{*}{e}_x = 1{,}76 + 1{,}115 = 2{,}875\ \%$$

Ejemplo 2. Calcular las f.e.m. de reactancia para el transformador monofásico acorazado de bobinas alternadas de la fig. 1.06.19 b cuyas características son:

Potencia: 1 000 kVA

Tensiones: 22 000/2 200 V

Frecuencia: 50 Hz

El primario está compuesto de 540 espiras en serie y el secundario de 108 espiras en dos vías en paralelo lo que equivale a 54 espiras para el devanado.

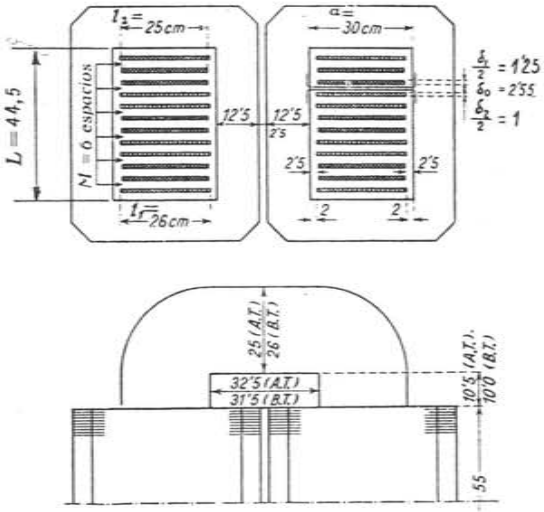


Fig. 1.06.19 b. Cálculo de la reactancia de dispersión de un transformador de bobinas alternadas.

Permeancias de dispersión, [1.06.14 f]

$$\Lambda_{x1} = \frac{1}{ML_1}\left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{6}\right)\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \text{ para el primario de A.T.}$$

$$\Lambda_{x2} = \frac{ML_2}{1}\left(\frac{\delta_0 l_{m0}}{2} + \frac{\delta_2\, l_{m2}}{6}\right)\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right) \text{ para el secundario de B.T.}$$

Según las dimensiones de dibujo,

$$\delta_0 = 2{,}55 \text{ cm}, \qquad \delta_1 = 2{,}5 \text{ cm}, \qquad \delta_2 = 2 \text{ cm}$$

$M = 6$ entrecaras de dispersión (existen además otras 5 entrecaras de refrigeración que no influyen sobre la reactancia)

Según [1.06.14 b],

$$L_1 = l_1 + \delta_1 = 25 + 2{,}5 = 27{,}5 \text{ cm}$$

$$L_2 = l_2 + \delta_2 = 26 + 2 = 28 \text{ cm}$$

y

$$l_{m1} = 2\ (55 + 2 \cdot 10{,}5 + 32{,}5 + \pi \cdot 12{,}5) = 295{,}6 \text{ cm}$$

$$l_{m2} = 2\ (55 + 2 \cdot 10 + 31{,}5 + \pi \cdot 13) = 294{,}6 \text{ »}$$

$$l_{m0} = \frac{l_{m1} + l_{m2}}{2} = \frac{295{,}6 + 294{,}6}{5} = 295{,}1 \text{ cm}$$

Por tanto,

$$\Lambda_{z1} = \frac{1}{6 \cdot 27{,}5}\left(\frac{2{,}55 \cdot 295{,}1}{2} + \frac{2{,}5 \cdot 295{,}6}{6}\right) = 3{,}025\ \frac{\text{M}}{\text{Gb}}$$

$$\Lambda_{z2} = \frac{1}{6 \cdot 28}\left(\frac{2.55 \cdot 295{,}1}{2} + \frac{2 \cdot 294{,}6}{6}\right) = 2{,}82\ \frac{\text{M}}{\text{Gb}}$$

tras de lo cual, [1.06.14 c],

$$L_{z1} = 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_1^2 \Lambda_{z1} = 4\ \pi \cdot 10^{-9} \cdot 540^2 \cdot 3{,}025 = 11{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{H}$$

$$L_{z2} = 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_2^2\ \Lambda_{z2} = 4\ \pi \cdot 10^{-9} \cdot 54^2 \cdot 2{,}82 = 103{,}5\ 10^{-6}\ \text{H}$$

Por tanto,

$$X_1 = 2\pi f\, L_{z1} = 2\pi \cdot 50 \cdot 11{,}1 \cdot 10^{-3} = 3{,}49\ \Omega$$

$$X_2 = 2\pi f\, L_{z2} = 2\pi \cdot 50 \cdot 103{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}0324\ \Omega$$

Como

$$I_1 = \frac{P}{U_1} = \frac{1000}{22} = 45{,}5 \text{ A}$$

e

$$I_2 = \frac{P}{U_2} = \frac{1000}{2{,}2} = 455 \text{ A}$$

$$E_{z1} = X_1\ I_1 = 3{,}94 \cdot 45{,}5 = 159 \text{ V}$$

$$E_{z1} = X_2\ I_2 = 0{,}0324 \cdot 455 = 14.7 \text{ V}$$

En valores relativos,

$$\overset{*}{\epsilon}_{z1} = \frac{159}{22\,000}\ 100 = 0{,}72\ \%$$

$$\overset{*}{\epsilon}_{z2} = \frac{14{,}7}{2200}\ 100 = 0{,}67\ \%$$

Anticipamos también que la tensión de reactancia relativa de corto circuito será

$$\overset{*}{\epsilon}_z = 0{,}72 + 0{,}67 = 1{,}39\ \%$$

Ejemplo 3. Calcular las f.e.m. de reactancia para el transformador trifásico biconcéntrico asimétrico de la fig. 1.06.19 c cuyas características son:

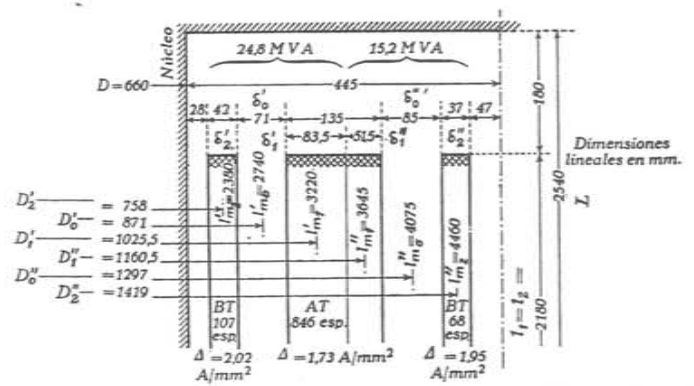


Fig. 1.06.19 c. Cálculo de la reactancia de dispersión para un transformador de bobinas doblemente concentricas asimétricas.

Potencia: 40 000 kVA
Tensiones: 13,2/128-112,2 kV Δ/λ
Frecuencia: 50 Hz

La bobina interior del arrollamiento, subdividido, trabaja a 2,02 A/mm² y la exterior a 1,95 A/mm²

Sobre la figura en cuestión se han indicado las espiras de cada bobina y las dimensiones correspondientes

Aplicaremos las ecuaciones [1.06.16 a, b y c] identificando en este caso con el subíndice 1 el devanado de alta tensión (central), y con el 2, el de baja.

$$\Lambda_{z1} = \frac{1}{L_1}\left[k_i^2\left(\frac{\delta_0'}{2}\, l'_{m0} + \frac{\delta_1'}{3}\, l'_{m1}\right) + (1 - k_i)^2\left(\frac{\delta_0''}{2}\, l_{m0}'' + \frac{\delta_1''}{3}\, l_{m1}''\right)\right]\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

$$L_1 = l_1 + \delta_1 \text{ (cm)}$$

$$\Lambda_{z2} = \frac{1}{L_2}\left[k_i^2\left(\frac{\delta'_0}{2}\, l'_{m0} + \frac{\delta'_2}{3}\, l'_{m2}\right) + (1 - k_i)^2\left(\frac{\delta_0''}{2}\, l_{m0}'' + \frac{\delta_2''}{3}\, l_{m2}''\right)\right]\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$$

$$L_2 = l_2 + \delta'_2 + \delta_2'' \text{ (cm)}$$

Ponderando las espiras del bobinado 2 según las densidades de corriente en una y otra fracción del mismo,

$$k_i = \frac{107 \cdot 2{,}02}{107 \cdot 2{,}02 + 68 \cdot 1{,}95} = 0{,}62; \qquad 1 - k_i = 0{,}38$$

(Si hubiéramos tenido en cuenta solamente los números de espiras,

$$k_i = \frac{107}{107 + 68} = 0{,}61;$$

en este caso, el resultado es poco diferente)

Según el dibujo cuyas cotas para la alta corresponden a la toma de 112,2 kV,

$\delta'_0 = 7{,}1$ cm $\quad l'_{m0} = 274$ cm $\quad \delta'_1 = 8{,}35$ cm $\quad l'_{m1} = 322$ cm

$\delta''_0 = 8{,}5$ cm $\quad l_{m0}'' = 407{,}5$ cm $\quad \delta''_1 = 5{,}15$ cm $\quad l''_{m1} = 364{,}5$ cm

$\delta'_2 = 4{,}2$ cm $\quad l_m'_2 = 238$ cm

$\delta''_2 = 3{,}7$ cm $\quad l_m''_2 = 446$ cm

En consecuencia,

$$L_1 = 218 + 13{,}5 = 231{,}5 \text{ cm}$$

$$L_2 = 218 + 4{,}2 + 3{,}7 = 225{,}9 \text{ cm}$$

$$\Lambda_{x1} = \frac{1}{231{,}5}\left[0{,}62^2\left(\frac{7{,}1}{2}274 + \frac{8{,}35}{3}322\right) + 0{,}38^2\left(\frac{8{,}5}{2}407{,}5 + \frac{5{,}15}{3}364{,}5\right)\right] =$$

$$\frac{1}{231{,}5}(720 + 340) = 4{,}57\,\frac{\text{M}}{\text{Gb}}$$

$$\Lambda_{x2} = \frac{1}{225{,}9}\left[0{,}62^2\left(\frac{7{,}1}{2}274\right) + \frac{4{,}2}{3}238\right) + 0{,}38^2\left(\frac{8{,}5}{2}407{,}5 + \frac{3{,}7}{3}446\right)\right]$$

$$= \frac{1}{225{,}9}(500 + 330) = 3{,}67\,\frac{\text{M}}{\text{Gb}}$$

Ahora,

$$L_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9}\, N_1^2\, \Lambda_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 846^2 \cdot 4{,}57 = 0{,}0413 \text{ H/fase}$$

$$L_{x2} = 4\pi \cdot 10^{-9}\, N_2^2\, \Lambda_{x2} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot [107 + 68)^2 \cdot 3{,}67 = 0{,}00141 \text{ H/fase}$$

$$X_1 = 2\pi f L_{x1} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}0413 = 13\ \Omega/\text{fase}$$

$$X_2 = 2\pi f L_{x2} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}00141 = 0{,}443\ (\Omega/\text{fase})$$

y como

$$I_{f1} = \frac{P}{\sqrt{3}U_1} = \frac{40000}{\sqrt{3} \cdot 112{,}2} = 206 \text{ A/fase (conexión estrella)}$$

e

$$I_{f2} = \frac{P}{3U_2} = \frac{40000}{3 \cdot 13{,}2} = 1010 \text{ A/fase (conexión triángulo),}$$

resulta

$$E_{x1} = X_1\, I_{f1} = 13 \cdot 206 = 2\,680 \text{ V/fase}$$

$$E_{x2} = X_2\, I_{f2} = 0{,}443 \cdot 1010 = 447 \text{ V/fase}$$

En valores relativos de las tensiones nominales,

$$\dot{\varepsilon}_{x1} = \frac{E_{x1}}{U_{f1}}100 = \frac{2{,}68}{\left(\frac{112{,}2}{\sqrt{3}}\right)}100 = 4{,}15\ \%$$

$$\dot{\varepsilon}_{x2} = \frac{E_{x2}}{U_2}100 = \frac{0{,}447}{13{,}2}100 = 3{,}39\ \%$$

La tensión de reactancia en corto circuito

$$\dot{\varepsilon}_x = 4{,}15 + 3{,}39 = 7{,}54\ \%$$

Ejemplo 4. Calcular las f.e.m. de reactancia para el transformador trifásico de bobinas fraccionales según la fig. 1.06.19 d cuyas características son

Potencia: 6 300 kVA
Tensiones: 110 ± 5 %/10,5 kV λ/λ
Frecuencia: 50 Hz
El primario de alta tensión consta de 2158-2270-2382 espiras por fase o columna en una sola bobina y el secundario, de baja, de 651 espiras en tres vías que equivalen a

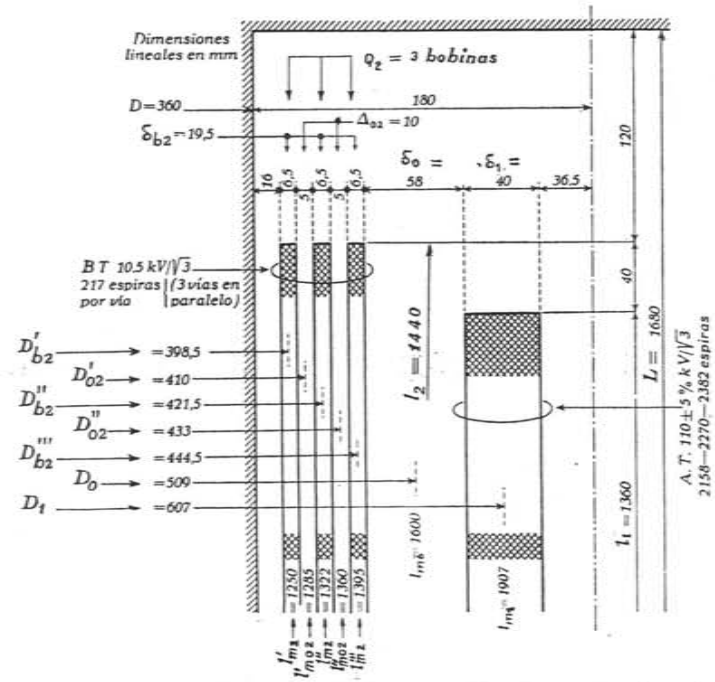


Fig. 1.06.19 d. Cálculo de la reactancia de dispersión de un transformador con el bobinado de baja subdividido por canales axiales de refrigeración.

$\frac{651}{3} = 217$ espiras por fase; las 651 espiras distribuidas a su vez en tres bobinas con dos canales de refrigeración axial entre ellas según muestra la fig. 1.06.19 d donde se hallan también acotados los bobinados.

Son aplicables las fórmulas [1.06.13 a] y [1.06.17 a]

$$\Lambda_{s1} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\delta_0}{2} l_{m0} + \frac{\delta_1}{3} l_{m1}\right) \quad \left(\frac{M}{Gb}\right)$$

$$\Lambda_{s2} = \frac{1}{L_2}\left[\frac{\delta_0}{2} l_{m0} + \frac{\delta_{b2}}{3} \Sigma\, l_{m2} + \left(Q_2 - 1{,}5 + \frac{1}{2Q_2}\right)\frac{\delta_{02}}{3}\frac{\Sigma\, l_{m02}}{Q_2 - 1}\right] \quad \left(\frac{M}{Gb}\right)$$

Tenemos según la figura,

$\delta_0 = 5{,}8$ cm $\quad l_{m0} = 160$ cm $\quad \delta_1 = 4$ cm $\quad l_{m1} = 190{,}7$ cm

$$L_1 = l_1 + 2\,\delta_1 = 136 + 2 \cdot 4 = 144 \text{ cm}$$

$$\Lambda_{s1} = \frac{1}{144}\left(\frac{5{,}8}{2} 160 + \frac{4}{3} 190{,}7\right) = 4{,}98 \frac{M}{Gb}$$

De la misma figura,

$$\delta_{b2} = 0{,}65 \text{ cm}$$

$$\Sigma\, l_{m2} = l_{m2}' + l_{m2}'' + l_{m2}''' = 125 + 132{,}2 + 139{,}5 = 396{,}7 \text{ cm}$$

$Q_2 = 3$ bobinas
$\delta_{02} = 0{,}5$ cm

$$\Sigma\, l_{m02} = l_m'_0 + l_m''_0 = 128{,}5 + 136 = 264{,}5 \text{ cm}$$

$$L_2 = l_2 + 2\,(\Sigma\delta_{b2} + \Sigma\delta_{02}) = 144 + 2\,(3 \cdot 0{,}65 + 2 \cdot 0{,}5) = 149{,}9 \text{ cm}$$

Llevando estos valores a la ecuación de Λ_{s2}

$$\Lambda_{s2} = \frac{1}{149{,}9}\left[\frac{5{,}8}{2} 160 + \frac{0{,}65}{3} 396{,}7 + \left(3 - 1{,}5 + \frac{1}{6}\right)\frac{0{,}5}{3}\frac{264{,}5}{3-1}\right] = 3{,}91 \frac{M}{Gb}$$

Por tanto, la inductancia para la toma media del primario que corresponde a las dimensiones de la bobina dibujada,

$$L_{s1} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot N_1^2 \Lambda_{s1} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 2\,270^2 \cdot 4{,}98 = 0{,}323 \text{ H/fase}$$

y para el secundario

$$L_{s2} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot N_2^2 \Lambda_{s2} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 217^2 \cdot 3{,}91 = 0{,}00231 \text{ H/fase}$$

con sus correspondientes reactancias

$$X_1 = 2\pi f L_{s1} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}323 = 101{,}5 \ \Omega\text{/fase}$$

$$X_2 = 2\pi f L_{s2} = 2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}00231 = 0{,}727 \ \Omega\text{/fase}$$

y, siendo las corrientes por fase

$$I_{f1} = \frac{P}{\sqrt{3}\,U_1} = \frac{6300}{\sqrt{3} \cdot 110} = 33{,}1 \text{ A/fase}$$

$$I_{f2} = \frac{P}{\sqrt{3}\,U_2} = \frac{6300}{\sqrt{3} \cdot 10{,}5} = 347 \text{ A/fase}$$

resultan las f.e.m. de reactancia

$$E_{s1} = X_1\, I_{f1} = 101{,}5 \cdot 33{,}1 = 3360 \text{ V/fase}$$

$$E_{s2} = X_2\, I_{f2} = 0{,}727 \cdot 347 = 252 \text{ V/fase}$$

En valores relativos, y teniendo en cuenta que las tensiones nominales por fase son, respectivamente,

$$U_{f1} = \frac{110}{\sqrt{3}} = 63{,}5 \text{ kV} \qquad U_{f2} = \frac{10{,}5}{\sqrt{3}} = 6{,}05 \text{ kV}$$

resultan

$$\dot{\varepsilon}_{s1} = \frac{3{,}36}{63{,}5} 100 = 5{,}3 \ \%$$

$$\dot{\varepsilon}_{s2} = \frac{0{,}252}{6{,}05} 100 = 4{,}17 \ \%$$

y la tensión de corto circuito por reactancia

$$\dot{\varepsilon}_s = 5{,}3 + 4{,}17 = 9{,}47 \ \%$$

Ejemplo 5. Calcular las f.e.m. de reactancia por dispersión, normales y suplementaria de inducción mutua, en un transformador trifásico de distribución con secundario en zigzag cuyas características son

Potencia: 125 kVA
Tensiones: 10 000 ± 5 %/400 V Y/z
Frecuencia: 50 Hz

El número de espiras primarias es de 1 160-1 220-1 280 y el de espiras secundarias 28 + 28, todas por fase. Las dimensiones de las bobinas aparecen en la fig. 1.06.19 e
Las ecuaciones a emplear son [1.06.13 a] y [1.06.18 b, e y g]

$$\Lambda_{s1} = \frac{1}{L_1}\left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_1\, l_{m1}}{3}\right) \quad \left(\frac{M}{Gb}\right)$$

$$\Lambda_{s2} = \frac{3}{4\,L_2}\left(\frac{\delta_0\, l_{m0}}{2} + \frac{\delta_2\, l_{m2}}{3} + \frac{\delta'_0\, l_{m2}}{4}\right) \quad \left(\frac{M}{Gb}\right)$$

$$\Lambda_{M2} = \frac{l_{m2}}{16\,L'_2}\left(\delta'_0 + \frac{\delta_2}{3}\right) \quad \left(\frac{M}{Gb}\right)$$

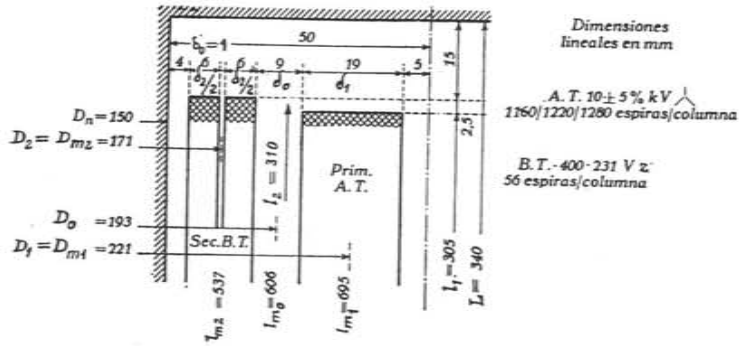


Fig. 1.06.19 e. Cálculo de la reactancia de dispersión de un transformador en zigzag.

$$\Lambda_{x2} = \Lambda_{\sigma 2} + \Lambda_{M2}$$

y con las dimensiones dadas en la fig. 1.06.19 e,

$\delta_0 = 0{,}9$ cm, $l_{m0} = 60{,}6$ cm, $\delta_1 = 1{,}9$ cm, $l_{m1} = 69{,}5$ cm, $\delta'_0 = 0{,}1$ cm

$\delta_2 = 0{,}6 + 0{,}6 = 1{,}2$ cm $l_{m2} = 53{,}7$ cm

así como, [1.06.13 b], [1.06.18 a], [1.06.18 d],

$L_1 = l_1 + 2\,\delta_1 = 30{,}5 + 2 \cdot 1{,}9 = 34{,}3$ cm; como es mayor que $L = 34$ cm, tomaremos $L_1 = 34$ cm,

$$L_2 = l_2 + 2\delta_2 + 2\delta_0 = 31 + 2 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 0{,}1 = 33{,}6$$

$$L'_2 = l_2 + \delta_2 = 31 + 1{,}2 = 32{,}2 \text{ cm},$$

$$\Lambda_{x1} = \frac{1}{34}\left(\frac{0{,}9 \cdot 60{,}6}{2} + \frac{1{,}9 \cdot 69{,}5}{3}\right) = 2{,}1 \ \frac{M}{Gb}$$

$$\Lambda_{\sigma 2} = \frac{3}{4 \cdot 33{,}6}\left(\frac{0{,}9 \cdot 60{,}6}{2} + \frac{1{,}2 \cdot 53{,}7}{3} + \frac{0{,}1 \cdot 53{,}7}{4}\right) = 1{,}14 \ \frac{M}{Gb}$$

$$\Lambda_{M2} = \frac{53{,}7}{16 \cdot 32{,}2}\left(0{,}1 + \frac{1{,}2}{3}\right) = 0{,}052 \ \frac{M}{Gb}$$

y, [1.016.18 g],

$$\Lambda_{x2} = \Lambda_{\sigma 2} + \Lambda_{M2} = 1{,}14 + 0{,}052 = 1{,}19 \ \frac{M}{Gb}$$

Se observa ya que la permeancia adicional o de inducción mutua Λ_{m2} es muy inferior a las inductancias propias Λ_{x1} y $\Lambda_{\sigma 2}$

El c.d.a.i. primario resulta, suponiendo que las dimensiones del dibujo valgan para la toma media ($N_1 = 1\,220$ espiras/fase), [1.06.13 c],

$$L_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_1^2 \Lambda_{x1} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 1\,220^2 \cdot 2{,}1 = 0{,}0393 \quad \text{H/fase}$$

y el secundario, referidas las permeaciones al número de espiras N_2, [1.06.18 h],

$$L_{x2} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot N_2^2 \Lambda_{x2} = 4\pi \cdot 10^{-9} \cdot 56^2 \cdot 1{,}19 = 47 \cdot 10^{-6} \quad \text{H/fase}$$

de los cuales corresponden a la inductancia adicional procedente de la acción mutua,

$$47 \cdot 10^{-6}\,\frac{0{,}052}{1{,}19} = 2{,}05 \cdot 10^{-6} \quad \text{H/fase.}$$

De aquí se deducen las reactancias

$$X_1 = 2\pi f L_{x1} = 2\ \pi \cdot 50 \cdot 0{,}0393 = 12{,}35 \ \Omega/\text{fase}$$

$$X_2 = 2\pi f L_{x2} = 2\pi \cdot 50 \cdot 47 \cdot 10^{6} = 0{,}01475 \ \Omega/\text{fase}$$

y siendo las corrientes

$$I_{f1} = \frac{P}{\sqrt{3}\,U_1} = \frac{125}{\sqrt{3} \cdot 10} = 7{,}21 \text{ A/fase}$$

$$I_{f2} = \frac{P}{\sqrt{3}\,U_2} = \frac{125}{\sqrt{3} \cdot 0{,}4} = 180 \text{ A/fase}$$

las f.e.m. de reactancia resultan ser

$$E_{x1} = X_1\ I_{f1} = 12{,}35 \cdot 7{,}21 = 89 \quad \text{V/fase}$$

$$E_{x2} = X_2\ I_{f2} = 0{,}01475 \cdot 180 = 2{,}65 \quad \text{V/fase}$$

En valores relativos, con las tensiones por fase

$$U_{f1} = \frac{U_1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5{,}78 \text{ kV} \qquad U_{f2} = \frac{U_2}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}4}{\sqrt{3}} = 0{,}231 \text{ kV},$$

$$\varepsilon_{x1} = \frac{89}{5780}\ 100 = 1{,}54\ \%$$

$$\varepsilon_{x2} = \frac{2{,}65}{231}\ 100 = 1{,}15\ \%$$

o en total

$$\varepsilon_x = 1{,}54 + 1{,}15 = 2{,}69\ \%.$$

1.07. REACCIÓN DE INDUCIDO

1.07.01. Máquinas de corriente continua

La corriente que circula por el inducido de una máquina de corriente continua crea una f.m.m. y un campo que reacciona sobre el campo inductor principal modificando el valor de la f.e.m. de la máquina, efecto que es necesario tener en cuenta para el cálculo de la excitación necesaria en carga.

1.07.02. Reacción transversal

La fig. 1.07.02 a muestra esquemáticamente las corrientes en los conductores del inducido en relación con la polaridad de los inductores y con el sentido de giro, para el caso de un generador, en el cual, naturalmente, ambos sentidos: el de las f.e.m. y el de las corrientes en la armadura, coinciden. Si se tratase de un motor, los sentidos marcados seguirían siendo válidos para las f.e.m., y las intensidades circularán en sentidos inversos.

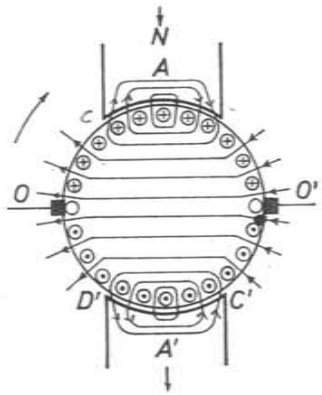


Fig. 1.07.02 a. F.m.m. y flujo transversal.

El conjunto de los conductores del inducido, independientemente del sistema de conexiones frontales se comporta como una bobina excitada por la corriente de carga; con las escobillas en la línea neutra, engendra una f.m.m. de reacción transversal estacionaria en el espacio lo mismo que la de los polos principales N y S.

Al girar la armadura dentro de su propio campo, se crean en los conductores individuales unas f.e.m. suplementarias que, sin embargo, no se manifiestan entre las escobillas y carecen por tanto, de efecto alguno sobre la f.e.m. total debido a que las que aparecen en cada mitad OA, $O'A'$ de una vía son de sentido contrario y simétricamente iguales a las que aparecen en la otra

mitad AO', $A'O$ de la misma vía en cuestión, hallándose todos los conductores en serie.

Pero el flujo transversal, se cierra también en parte, atravesando el entrehierro y dientes, por las expansiones polares CD, $C'D'$ reforzando el flujo principal en una mitad AD, $A'D'$ de la zona polar y debilitándolo en la otra mitad AC, $A'C'$. Si no existiese el fenómeno de saturación ferromagnética, la compensación entre los términos aditivos y sustractivos de este flujo suplementario sería perfecta y la f.e.m. por vía, que es la f.e.m. de la máquina, quedaría asimismo invariable. La saturación hace que el incremento de flujo bajo el arco mitad de una expansión polar sea menor que la reducción bajo la otra mitad del mismo arco, y esta reducción del flujo resultante, provocada por la corriente de carga, repercute sobre la f.e.m. total inducida disminuyendo el valor de la misma.

Si se colocasen otras escobillas adicionales en A y A' (con las precauciones adecuadas para limitar la corriente de corto circuito en las bobinas afectadas

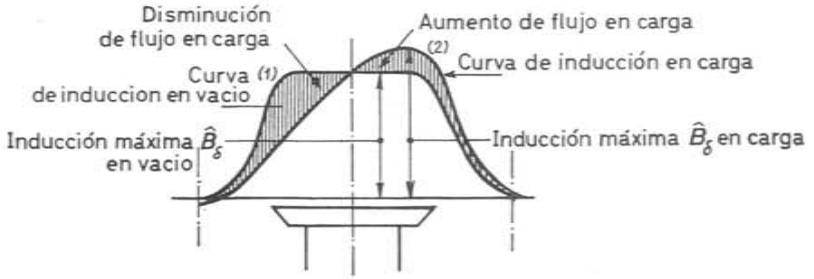


Fig. 1.07.02 b. Distorsión del campo en el entrehierro por la reacción transversal.

por dichas escobillas) aparecería entre aquellas la f.e.m. debida al flujo transversal lo cual constituye el fundamento de las dinamos de corriente constante.

La distribución del flujo en vacío sobre el entrehierro de un paso polar corresponderá a la curva de inducción (1) de la fig. 1.07.02 b. En carga, tendremos una curva de distribución parecida a la (2) lo cual implica un descenso del flujo total, flujo que se halla representado por el área comprendida entre esta última curva y el eje de abscisas.

1.07.03. Tensión máxima entre delgas

La reacción transversal, provoca, pues, una distorsión del campo magnético y reduce el flujo resultante, a la vez que aumenta la inducción máxima y con ello también la f.e.m. máxima en cada bobina individual, favoreciendo así la aparición de chispas entre delgas al pasar los conductores bajo estas zonas de inducción incrementada. El peligro se agrava durante las fluctua-

ciones de carga, como consecuencia de la f.e.m. estática debida a las variaciones del flujo transversal. Esta nueva f.e.m., que tiende a mantener constante el flujo en cuestión se sumará naturalmente a la de origen dinámico *cuando se descarga un generador* o *al aumentar la carga de un motor* y, si coincide con una conmutación deficiente, que inicie la formación de chispas entre delgas, la rápida rotación de la armadura puede trasladar los pequeños arcos sucesivos, reforzados, antes de su extinción, a lo largo de un paso polar completo provocando así un corto circuito exterior entre escobillas («aro de fuego» o «flash-over»). De ello, surgen limitaciones para la tensión admisible entre delgas. El valor medio de la misma ε_{Km} viene dado por

$$\boxed{\varepsilon_{Km} = \frac{U}{K/2p}} \quad \text{(V)} \qquad [1.07.03\ a]$$

U tensión nominal de la máquina en V

K número de delgas del colector; $\frac{K}{2p}$ número de delgas por polo.

ε_{Km} no debe exceder de:
16 V en máquinas sin devanado compensador
20 V » » con » »

Cuanto al valor máximo de la f.e.m. por cada sección del arrollamiento será, evidentemente,

$$\hat{\varepsilon}_K = \left(\frac{Z}{K}\right) \hat{B}_{\delta l}\ L_\delta\ v \quad \text{(V)} \qquad [1.07.03\ b]$$

Z, número total de conductores de la máquina; $\frac{Z}{K}$ conductores por sección del bobinado.

$\hat{B}_{\delta l} = (K_M\ K_L\ K_C \hat{B}_\delta)\ K_t$. Inducción máxima en el entrehierro en, carga con el significado ya conocido (ver Circuito Magnético principal [1.04.08 c, d], [1.04.09 c] y [1.04.10 a y b]) de $\hat{B}_\delta$ y de los factores K_M K_L y K_C. El factor $K_t = \frac{\hat{B}_{\delta l}}{\hat{B}_\delta}$ tiene en cuenta, precisamente el efecto de la distorsión debida al flujo transversal. Las inducciones se expresarán en T

L_δ longitud efectiva del inducido en m, [1.04.09 a];

v velocidad periférica de la armadura en m/s.

El devanado de cualquier tipo que sea con $2p$ polos y $2a$ vías presenta entre delgas contiguas un número de secciones $\frac{p}{a}$

y por tanto la f.e.m. máxima entre delgas adyacentes, será igual a

$$\boxed{\hat{\varepsilon}_K = \frac{p}{a}\frac{Z}{K}\ \hat{B}_{\delta l}\ L_\delta\ v_a} \quad \text{(V)} \qquad [1.07.03\ c]$$

Tratemos ahora de valorar el efecto del flujo de reacción transversal sobre la f.e.m. de la máquina para lo cual comenzaremos por determinar la f.m.m. que lo produce.

1.07.04. F.m.m. de reacción transversal

Por cada par de polos se reproducen las distribuciones de corrientes e inducciones representadas básicamente para una máquina bipolar en la fig. 1.07.02 a. Así, *por par de polos*, y con las escobillas en la línea neutra, el número de conductores transversalmente activos en sentido magnético es $\frac{Z}{p}$ y el de espiras, $\frac{Z}{2p}$; la corriente por conductor I_c si la de línea la representamos por I y la máquina tiene $2a$ vías, será $I_c = \frac{I}{2a}$. La f.m.m. máxima, en el eje transversal, valdrá, pues,

$$\hat{\mathcal{E}}_t = \left(\frac{Z}{2p}\right)\left(\frac{I}{2a}\right) = \frac{ZI}{4pa} \quad \text{(Av/par de polos)}$$

pero designando por q la carga lineal específica del inducido en Ac/cm

$$Z\ I_c = 2p\ \tau_p\ q. \qquad \text{(Ac)}$$

y

$$\hat{\mathcal{E}}_t = \tau_p\ q \qquad \text{(Av/par de polos)}$$

siendo τ_p el paso polar en cm.

Esta f.m.m. transversal máxima actúa sobre las líneas de fuerza que pasan por el eje interpolar y cruzan dos veces el entrehierro o mejor dicho su prolongación entre las expansiones polares. Evaluándola por entrehierro simple, tendremos la f.m.m. máxima de reacción transversal *por polo*

$$\boxed{\hat{\mathcal{E}}_t = \frac{ZI}{8pa} = \frac{\tau_p}{2}\ q} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.04\ a]$$

La f.m.m. en cuestión varía escalonadamente por saltos de $Z_n\ I_c$ amperios

conductores siendo $(Z_n\, I_c)$ la corriente adicional ligada a cada línea media de fuerza cerrada, con Z_n = número de conductores por ranura $= \frac{Z}{n}$; (n = número de ranuras).

La fig. 1.07.04 a equivalente a la 1.07.02 a desarrollada, muestra el gráfico de la f.m.m. transversal de la armadura de tal modo que la distancia

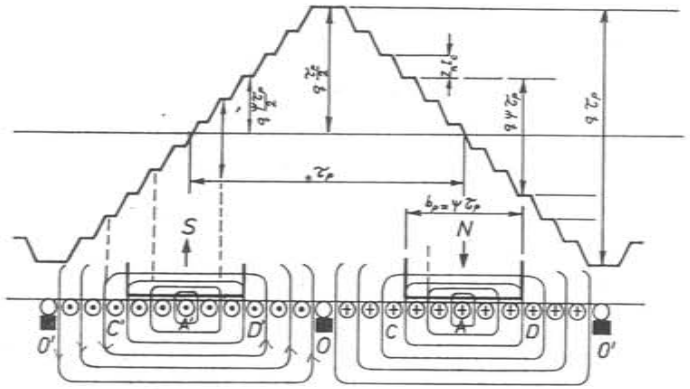


Fig. 1.07.04 a. F.m.m. de reacción transversal.

vertical entre escalones representa la f.m.m. $Z_n\, I_c$ asociada con cada nueva ranura; $\left(\frac{\tau_p}{2}\, q\right)$, la ordenada máxima de la onda (f.m.m. transversal por polo) y $(\tau_p\, q)$ la f.m,m. total del arrollamiento (por par de polos) para el trayecto completo de una línea de fuerza que pasa por los ejes interpolares o zona neutra.

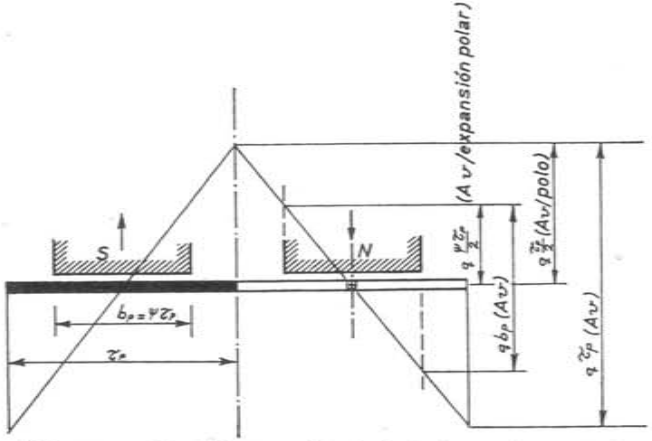


Fig. 1.07.04 b. Diagrama lineal de la f.m.m. transversal.

La parte horizontal de cada escalón corresponde teóricamente a la extensión periférica de un diente, espacio durante el cual la f.m.m. del inducido permanece constante. La parte inclinada de estos mismos escalones representa el crecimiento lineal de la f.m.m. en cuestión a lo largo del desarrollo periférico de la ranura abierta.

Sin grave error, cabe sustituir la línea quebrada por otra recta pasando por el centro de los peldaños, como muestra la fig. 1.07.04 b con lo cual admitimos implícitamente una distribución uniforme q de la capa de corriente.

La f.m.m. asignada a cualquier punto de la periferia puede interpretarse así como la tensión magnética transversal aplicada a la mitad del trayecto simétrico, cerrado, propio de la línea de fuerza del flujo de reacción que pasa por dicho punto. El trayecto total está constituido esencialmente por un doble entrehierro (que va cada uno desde la superficie del inducido hasta la cara del polo bajo las expansiones polares, y hasta el yugo en los espacios interpolares) más la longitud de dos dientes ya que el recorrido de las líneas de fuerza transversales en el resto del hierro no ofrece prácticamente reluctancia.

Si bien la f.m.m. máxima de reacción transversal por polo vale

$$\hat{\mathcal{E}}_t = \frac{\tau_p}{2}\, q$$

la que actúa sobre el extremo de cada expansión polar, interpretada como hemos dicho, se reduce proporcionalmente a $\frac{b_p}{\tau_p} = \psi$, siendo, pues, igual a

$$\boxed{\mathcal{E}_t = \frac{\psi\ \tau_p}{2}\, q = \frac{b_p}{2}\, q \qquad \text{(Av)}} \qquad [1.07.04\ \text{b}]$$

1.07.05. Efecto de la reacción transversal sobre la f.e.m. de la máquina en carga

Ya hemos visto que la distorsión del campo con la carga provoca a la vez un aumento de la inducción máxima y una disminución del flujo resultante; ésta da origen a una reducción de la f.e.m. inducida al cargarse la máquina. Para recuperar el valor de la f.e.m. primitiva, habrá que incrementar la excitación principal en la medida necesaria a fin de restablecer el flujo.

La manera de hallar el valor numérico del incremento de excitación θ_{tb} que hay que suministrar para compensar el efecto de la reacción transversal se indica en las figs. 1.07.05 a y b.

Tracemos la característica de vacío de la máquina tomando en consideración solamente la reluctancia del entrehierro y de los dientes que, como

acabamos de decir, son las únicas partes del circuito magnético afectadas por el flujo transversal.

La curva (1) muestra esta «característica de paso».

$$E = \mathrm{f}\,(\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d)$$

tomando por base la excitación por polo, y sea M el punto correspondiente a la f.e.m. en vacío E_0. La f.m.m. transversal correspondiente a cada extremo de la expansión polar valía, [1.07.04 b],

$$\mathcal{E}_t = \frac{b_p}{2}\, q \quad \text{(Av/polo)}$$

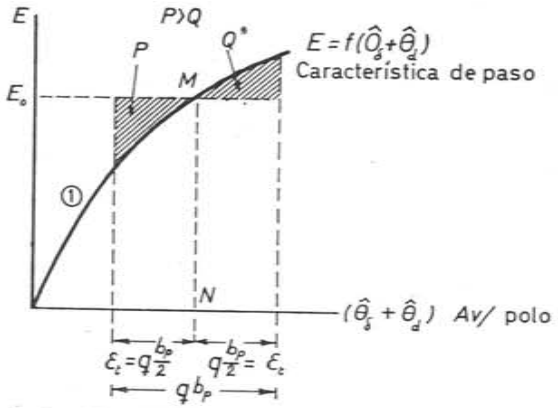


Fig. 1.07.05 a. Reducción del la f.e.m. por causa de la reacción transversal. Proporcional a (Área *P*-Area *Q*).

Llevémosla a uno y otro lado del punto N. La reducción operada del flujo y con ella la de la f.e.m. será proporcional a la diferencia de áreas (P − Q).

Restablecer el flujo primitivo equivale a correr el segmento ($b_p\, q$) hacia

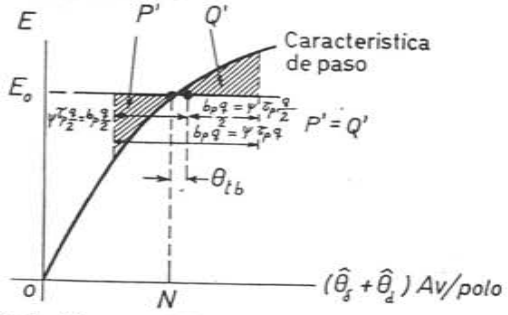


Fig. 1.07.05 b. Excitación necesaria por polo θ_{tb}, para compensar el efecto de la reacción transversal (Área P' = Área Q').

la derecha hasta que las superficies rayadas P' y Q' se igualen (fig. 1.07.05 b). θ_{tb} representa así la excitación por polo, suplementaria, que requiere la máquina para compensar el efecto de la reacción transversal.

El valor de θ_{tb} suele variar entre un 5 y un 10 % de la excitación normal de la máquina en vacío por polo. Puesto que al final hay que fijar un suplemento arbitrario de excitación como medida de seguridad, a veces no es necesario llevar a cabo esta construcción bastando adoptar por término medio un valor de θ_{tb} igual al diez por ciento citado.

La reacción transversal desaparece prácticamente si la máquina tiene devanado compensador.

1.07.06. Reacción longitudinal

Cuando la máquina de corriente continua no lleva polos auxiliares es inevitable, casi siempre, decalar las escobillas a fin de mejorar la conmutación, avanzándolas en el sentido de giro si se trata de una dinamo y en sentido contrario si se trata de un motor.

Al separar las escobillas de la línea neutra, las espiras del inducido comprendidas en el doble ángulo de decalaje β, recorridas por la corriente de carga,

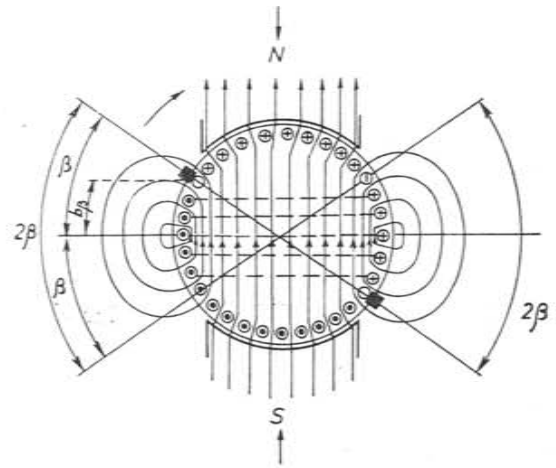


Fig. 1.07.06 a. Reacción longitudinal antagónica.

engendran una f.m.m. en la dirección axial de los polos principales y si el decalaje mencionado se ha producido en sentido favorable a la conmutación la reacción es de carácter antagónico, es decir, opuesta a la de los polos principales como puede verse en la fig. 1.07.06 a donde se hallan de manifiesto los

sentidos de las corrientes en el inducido de una dinamo y la aparición de la f.m.m. antagónica debida a los conductores comprendidos dentro del ángulo 2β que a los efectos magnéticos se comportan como si constituyesen espiras según las líneas de puntos.

1.07.07. F.m.m. de reacción longitudinal

Con una carga específica de q Ac/cm y un decalaje de las escobillas de β^o eléctricos correspondiente a un arco b_β referido a la periferia del inducido, la reacción longitudinal asciende a, (fig. 1.07.06 a),

$$\mathcal{E}_l = 2\, b_\beta\, q \quad \text{(Av/par de polos)}$$

o

$$\mathcal{E}_l = b_\beta\, q \quad \text{(Av/polo)}$$

que habrá que añadir, simplemente, a la excitación principal para compensar el efecto de dicha reacción.

$$\boxed{\theta_{lb} = \mathcal{E}_l = b_\beta\, q} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.07\ a]$$

La dificultad estriba en la imposibilidad de prever la magnitud del ángulo $\beta\ \sigma$ del arco b_β que será necesario para obtener una conmutación satisfactoria de la máquina.

Si ésta lleva polos auxiliares, las escobillas permanecen en la línea neutra (condición indispensable ademas para las máquinas que hayan de girar indistintamente en ambos sentidos), y la reacción antagónica con $\beta = 0$ y $b_\beta = 0$ es entonces nula. Disponiendo de polos auxiliares es factible a veces decalar algo las escobillas en sentido desfavorable para la conmutación transformando la reacción longitudinal de antagónica en magnetizante a fin de obtener un cierto grado de compoundaje con la carga.

En la imposibilidad de conocer de antemano el valor de β o de b_β, y por tanto los amperios vueltas antagónicos que serán preciso compensar con un suplemento de la excitación principal, hay que admitir para b_β un valor previo comprendido entre $\frac{\tau_p - b_p}{2} = \frac{1-\psi}{2}\,\tau_p$ (máximo prácticamente posible, puesto que con ello se llegaría a la zona de inducción constante bajo los polos) y la mitad de dicha cifra. Como máximo, pues,

$$\theta_{lM} = (1-\psi)\,\frac{\tau_p}{2}\,q \quad \text{(Av/polo)}.$$

A título de orientación puede tomarse $\psi = 0{,}7$. y

$$\boxed{\theta_{lb}} \approx \frac{2}{3}\,\theta_{lM} = \frac{2}{3}\,\frac{1-0{,}7}{2}\,\tau_p\, q = \boxed{0{,}1\,\tau_p\, q} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.07\ b]$$

lo que corresponde a un 20 % de los Av totales de reacción por polo $\frac{\tau_p}{2}\,q$.

1.07.08. Máquinas de corriente alterna

La reacción de inducido es de naturaleza muy distinta según se trate de máquinas monofásicas o polifásicas.

1.07.09. Devanado monofásico concentrado

La fig. 1.07.09 a muestra esquemáticamente el desarrollo de la armadura de una máquina de cuatro polos con dos únicas bobinas (1 ranura por polo); y, de puntos, el recorrido de las líneas de fuerza creadas por la corriente alterna que circula por los conductores.

Si I_c es el valor eficaz de la misma, o $(\sqrt{2}\,I_c)$ el valor máximo, supuesta de variación senoidal en el tiempo, y Z_n el número de conductores por ranura,

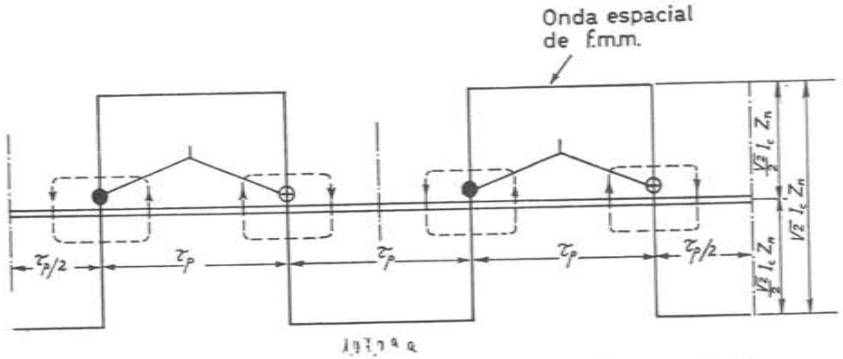


Fig. 1.07.09 a. F.m.m. de un devanado monofásico concentrado.

la f.m.m. engendrada por cada bobina, constante bajo el arco abrazado por sus dos lados, alcanza un valor máximo de

$$\sqrt{2}\ (Z_n\ I_c) \quad \text{(Av/par de polos)} \qquad [1.07.09\ a]$$

el cual se aplica al circuito magnético completo de cada línea de fuerza. Todas ellas cruzan dos veces el entrehierro. Tracemos para cada punto del mismo

una ordenada correspondiente a la mitad de aquella f.m.m., lo que equivale a acumular en el entrehierro simétricamente, por mitades, la reluctancia del resto del circuito magnético asociado. La característica de f.m.m. instantánea máxima toma la forma de rectángulos alternados señalada en la figs. 1.07.09 a y b. La ecuación temporal de la corriente hace variar simultáneamente la altura instantánea de los rectángulos en cuestión entre un máximo positivo

$$\hat{\theta}_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,(I_c\ Z_n) \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.09\ b]$$

y el mismo valor negativo, sin alterar la forma o la distribución de la onda de f.m.m., estacionaria en el espacio.

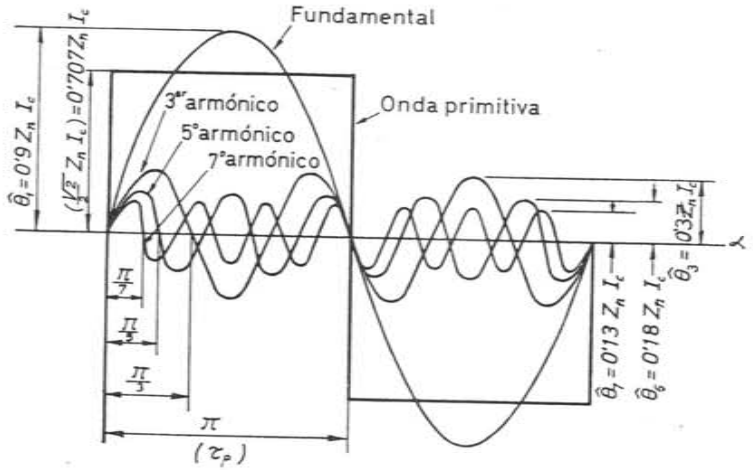


Fig. 1.07.09 b. Análisis armónico la onda de f.m.m. de un devanado monofásico concentrado.

Como esta onda rectangular es el punto clave para el estudio ulterior de las máquinas con arrollamientos distribuidos monofásicos o polifásicos que son los que se emplean en la práctica, detengámonos un momento en su análisis.

La onda espacial puede desarrollarse por el método de FOURIER en sus componentes armónicos entre los cuales el primero o sea el fundamental es el que ofrece mayor interés.

La amplitud de la fundamental tiene por valor

$$\hat{\theta}_1 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,I_c\ Z_n\right) = 0{,}9\ I_c\ Z_n \quad \text{(Av/polo)}$$

y su origen coincide con el de la onda rectangular; origen común, por lo demás, a todos los restantes armónicos.

La amplitud de uno cualquiera de éstos, de orden ν, vale

$$\hat{\theta}_\nu = \frac{1}{\nu}\,\hat{\theta}_1$$

para los impares; y cero, para los armónicos pares, los cuales no entran, pues, en la composición de la onda primitiva.

En general, pues

$$\boxed{\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9}{\nu}\,(I_c\ Z_n)} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.09\ c]$$

o también en función de la carga media lineal $q = \dfrac{Z_n\,I_c}{\tau_p}$ [1.07.09 d]

$$\boxed{\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9}{\nu}\,(\tau_p\ q)} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.09\ e]$$

La ecuación anterior se deduce como sigue. Utilicemos el desarrollo de FOURIER que, por razón de simetría de la onda, podemos limitar a un semiperíodo π y prescindir como nulo del término constante ($\theta_0 = 0$). La expresión de la curva compleja durante este semiperíodo es, sencillamente,

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,I_c\ Z_n = \text{Cte.} = \hat{\theta}$$

de donde las componentes ortogonales a_ν y b_ν de las amplitudes correspondientes a los armónicos sucesivos de orden ν resultan ser:

Para la fundamental,

$$a_1 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^\pi y\,\cos\alpha\,d\alpha = \frac{2\,\hat{\theta}_0}{\pi}\,[\text{sen}\ \alpha]_0^\pi = 0$$

$$b_1 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^\pi y\,\text{sen}\,\alpha\,d\alpha = \frac{2\,\hat{\theta}_0}{\pi}\,[-\cos\alpha]_0^\pi = \frac{4}{\pi}\,\hat{\theta}$$

$$\text{tg}\ \beta_1 = \frac{a_1}{b_1} = 0;\ \text{con}\ a_1 = 0\ \text{y}\ b_1 > 0,\ \beta_1 = 0$$

$$\hat{\theta}_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = \frac{4}{\pi}\,\hat{\theta}_0 = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,I_c\ Z_n\right) = 0{,}9\ (I_c\ Z_n).$$

Análogamente, para el 3.º armónico,

$$a_3 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi} y \cos 3\alpha \, d\alpha = \frac{2\hat{\theta}_0}{\pi}\int_0^{\pi} \cos 3\alpha \, d\alpha = \frac{2\hat{\theta}_0}{\pi}\left[\frac{\operatorname{sen} 3\alpha}{3}\right]_0^{\pi} = 0$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi/2}\int_0^{\pi} y \operatorname{sen} 3\alpha \, d\alpha = \frac{2\hat{\theta}_0}{\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} 3\alpha \, d\alpha = \frac{2\hat{\theta}_0}{\pi}\left[-\frac{\cos 3\alpha}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{\hat{\theta}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\beta_3 = \frac{a_3}{b_3} = 0 \; ; \text{ con } a_3 = 0 \text{ y } b_3 > 0, \; \beta_3 = 0$$

$$\hat{\theta}_3 = \sqrt{a_3^2 + b_3^2} = \frac{4}{\pi}\frac{\hat{\theta}_0}{3} = \frac{4}{\pi}\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} I_c Z_n\right)}{3} = \frac{0{,}9}{3}(I_c \, Z_n)$$

Para el 5.º armónico, hallaríamos de la misma manera

$$\theta_5 = \frac{0{,}9}{5}(I_c \, Z_n); \quad \beta_5 = 0$$

La simetría de la onda respecto a los ejes polares reduce siempre a cero los términos a. La ecuación de la onda espacial de excitación, con los ángulos α en grados eléctricos contados a la escala de la onda primitiva a partir del origen de la misma, será

$$\theta = 0{,}9 \; (I_c \, Z_n) \operatorname{sen} \alpha + 0{,}3 \; (I_c \, Z_n) \operatorname{sen} 3\alpha + 0{,}18 \; (I_c \, Z_n) \operatorname{sen} 5\alpha + \ldots$$

tal y como se representa en la fig. 1.07.09 b.

Los máximos, siguen, como vemos, la ley expuesta

$$\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9}{\nu}(I_c \, Z_n)$$

1.07.10. Devanado monofásico distribuido

La fig. 1.07.10 a muestra la curva original de f.m.m. correspondiente a un arrollamiento monofásico tetrapolar de $n_p = 6$ ranuras por polo, de las cuales sólo $n_b = 4$ van bobinadas (1), en el momento en que la corriente pasa por un máximo.

La f.m.m. por escalón de la curva corresponde a una bobina concentrada y asciende, como hemos visto, cuando la corriente de carga I pasa por un máximo en los Z_n conductores por ranura, a [1.07.09 a].

$$\sqrt{2}\,(I_c \, Z_n) \quad \text{(Av)}$$

(1) Este es un tipo de arrollamiento muy normal para motores monofásicos donde se acostumbra dejar vacía la tercera parte de las ranuras cuya utilización no vendría compensada por el gasto de cobre y las pérdidas por efecto JOULE, dada la escasa contribución de dichas ranuras a la formación de la f.e.m. a causa del pequeño arco polar que abrazan. En realidad, estas ranuras se utilizan después para alojar el devanado de arranque. En rigor, para mejorar la forma de onda en los motores monofásicos, el número de conductores por ranura no se mantiene tampoco constante.

la f.m.m. de armadura máxima por polo a

$$\frac{n_b}{2}\sqrt{2}\; I_c \; Z_n \quad \text{(Av/polo)}$$

siendo, como hemos dicho, n_b el número de ranuras bobinadas por polo.

Para efectuar el análisis armónico de esta onda escalonada pueden seguirse el método de superposición, consistente en imaginar repetido varias

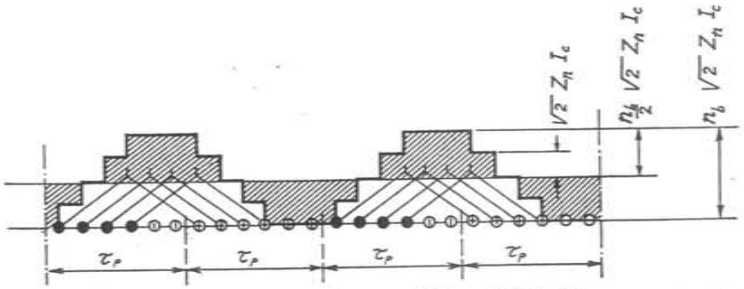


Fig. 1.07.10 a. F.m.m. de un devanado monofásico distribuido, con ranuras vacías.

veces el sistema senoidal de la fig. 1.07.09 b, a razón de un diagrama completo por bobina, es decir, tantos sistemas como ranuras bobinadas por polo existen, con un desfase espacial entre sistemas consecutivos igual al paso de ranura medido en unidades de ángulo eléctrico.

La descomposición armónica de cada onda rectangular de f.m.m. debida a una bobina, da origen según acabamos de hallar a una cierta fundamental de amplitud máxima, igual que para el arrollamiento concentrado.

$$\hat{\theta}_1 = 0{,}9 \; (I_c \; Z_n) \quad \text{(Av/polo)}$$

y si la máquina lleva n_b ranuras bobinadas por polo

$$\hat{\theta}_1 = 0{,}9 \; n_b \, \xi_1 \, (I_c \; Z_n) \quad \text{(Av/polo)}$$

donde ξ_1 es el factor de arrollamiento del 1.er armónico para el conjunto previsto de ranuras activas. (En el ejemplo propuesto, la resultante de 4 vectores desfasados entre sí de $\gamma = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$ eléctricos da $\xi_1 = 0{,}83$ (tabla 1.04.13 c).

Análogamente para cualquier otro armónico de orden ν (impar)

$$\boxed{\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9}{\nu} n_b \, \xi_\nu \, (I_c \; Z_n)} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.10 \text{ a}]$$

El valor de ξ_ν en cada caso se obtiene por la composición de n_b vectores iguales, desfasados de $\gamma_\nu = \nu \frac{\pi}{n_p}$ entre cada dos de ellos consecutivos, ya que el ángulo γ_ν mencionado, referido al período propio de cada armónico, resulta de un valor ν veces mayor que el de la fundamental.

En los párrafos 1.04.13 y 14 las tablas c y d respectivamente contienen los valores de los coeficientes de distribución y de paso para los arrollamientos monofásicos de factura uniforme (Z_n constante en las n_b ranuras bobinadas por polo). La tabla 1.04.13 d muestra los factores de distribución que afectan a la fundamental para aquellos otros devanados usuales, de un número de conductores por ranura variable.

Con objeto de simplificar el desarrollo en serie de FOURIER, se ha mantenido el supuesto de que los escalones de f.m.m. son perfectamente rectangulares mientras que en realidad sus flancos aparecen inclinados, como en la fig. 1.07.04 a, y, en cualquier caso, los vértices de estos escalones se presentan además redondeados contribuyendo todo ello a suavizar la forma de la onda y a disminuir la importancia de los armónicos de f.m.m.

La simplificación es, sin embargo, prácticamente admisible.

Si designamos por q los Av/cm medios que constituyen la carga específica de corriente de la máquina,

$$n_b \; Z_n \; I_c = q \; \tau_p$$

de donde, [a],

$$\boxed{\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9}{\nu} \xi_\nu \; (q \; \tau_p)} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.07.10 \text{ b}]$$

que sólo se distingue de la del arrollamiento concentrado [1.07.09 e] por la introducción del factor de bobinado ξ_ν

1.07.11. Devanado trifásico concentrado

a) *Onda de f.m.m.* Si se toman tres bobinas de un sistema trifásico —es decir, recorridas por corrientes alternas (que supondremos senoidales); *desfasadas temporalmente de 1/3 de período* — y se montan sobre una armadura, *decaladas geométricamente entre sí de 1/3 del doble paso polar* (fig. 1.07.11 a), se obtiene una onda de f.m.m. combinada, cuya amplitud y forma permanecen aproximadamente invariables, la cual gira alrededor de la armadura con velocidad de rotación constante $N = \frac{60 f}{p}$ r/m (f = frecuencia de la corriente en Hz).

Aunque a los efectos más importantes las conclusiones que se derivan

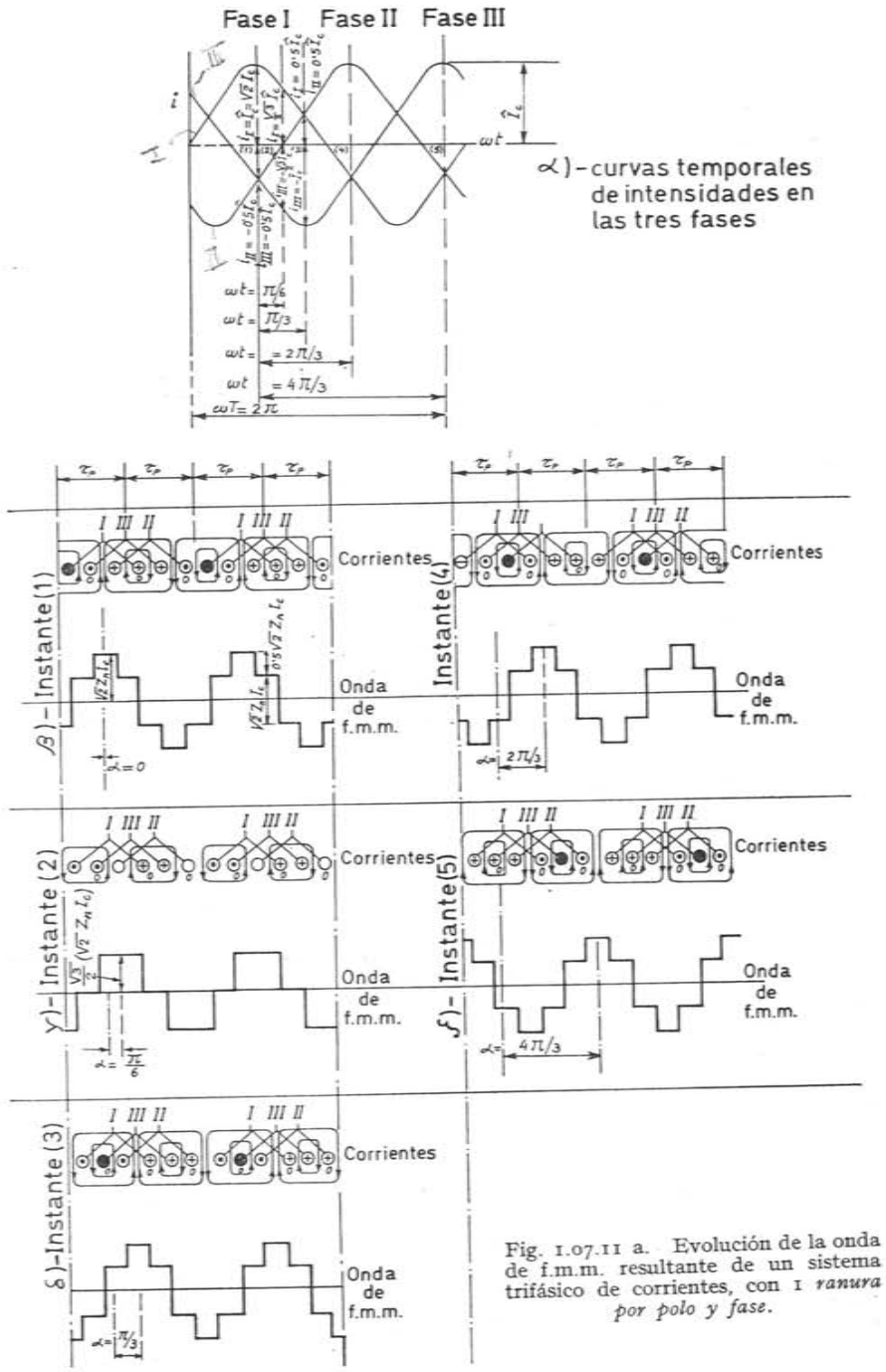


Fig. 1.07.11 a. Evolución de la onda de f.m.m. resultante de un sistema trifásico de corrientes, con 1 *ranura por polo y fase.*

del indicado «campo rotatorio» son totalmente válidas, no se debe perder de vista el fenómeno físico, que se reduce a la presencia de tres campos *alternos*, fijos en el espacio, cuyos máximos de corriente inductora y por tanto de f.m.m. van pasando sucesivamente de las bobinas de una fase a las de otra con la apariencia de un continuo girar.

La fig. 1.07.11 a muestra gráfica y progresivamente el fenómeno, al mismo tiempo que nos permite hallar la expresión numérica de la f.m.m. rotatoria. Esta expresión será utilizable tanto para valorar los efectos de la reacción de inducido cuando se aplique a un devanado de este género recorrido por la corriente de carga (caso de los alternadores), como para deducir el valor de la corriente magnetizante por fase si el arrollamiento trifásico es de tipo inductor (caso de los motores asíncronos).

En α puede verse el diagrama de corrientes instantáneas en cada una de las fases del bobinado. Se han señalado cinco instantes (1) a (5) básicos para el estudio de la f.m.m. resultante en la máquina. Cada uno de estos puntos lleva acotado su ángulo temporal ωt en fracción del semiperíodo π de la corriente, referidos todos ellos al momento (1) que consideraremos como inicial en el cual la intensidad en la fase I pasa por un máximo.

Las figuras β a ζ representan esquemáticamente el arrollamiento trifásico desarrollado, la corriente en cada ranura y la distribución de la f.m.m. resultante del conjunto de amperios vueltas. Los ángulos eléctricos espaciales α marcados para la abscisa central correspondientes a los máximos positivos de las distintas ondas de f.m.m. se refieren siempre al eje de la fase I tomado como origen, y están expresados a su vez en fracciones del ángulo eléctrico π o 180° correspondiente al paso polar τ_p.

I_c representa el valor eficaz de la corriente por conductor o por fase e $\hat{I}_c = \sqrt{2} I_c$ el valor máximo; Z_n el número de conductores por ranura y q la carga específica de la armadura en amperios conductores eficaces/cm. Con esto, la f.m.m. engendrada por cada par de ranuras de una misma fase cuando circula la corriente máxima será

$$\sqrt{2}\, I_c\, Z_n \quad \text{(Av)}$$

y en los momentos en que dicha corriente desciende por ejemplo a $\frac{\sqrt{3}}{2} I_c$, $\frac{1}{2} I_c$, etc., las f.m.m. respectivas por par de ranura se reducen, correlativamente, a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{2}\, I_c\, Z_n), \quad \frac{1}{2} (\sqrt{2}\, I_c\, Z_n), \quad \text{etc.,} \quad \text{(Av)}$$

Para poder trazar el diagrama espacial de f.m.m. en cada momento hay que proceder a marcar previamente el sentido y la intensidad de la corriente en todas las ranuras en el instante considerado. La figura α) nos da la magnitud

y signo temporales de la corriente en las tres fases. De acuerdo con ellas, en el momento (1) la intensidad es máxima y positiva para la fase I y negativa de valor 0,5 $\hat{I}_c$ para las fases III y II.

Sobre la fig. β referente al instante (1), se han marcado las entradas O de cada bobina, es decir, las ranuras homólogas de las distintas fases, decaladas entre sí de 120° magnéticos y admitiremos que la corriente es positiva cuando penetra en dichas ranuras por el plano del dibujo. Sobre las entradas O de la fase I marcaremos, pues, cruces (corriente positiva) y sobre las de las otras dos fases II y III, puntos (corrientes negativas).

Ahora, independientemente de la fase a que pertenecen, podemos considerar las ranuras, por pares, como si formasen bobinas físicas, a condición de que la corriente sea igual y de sentidos opuestos en los dos lados de cada bobina imaginaria. La onda de f.m.m. se obtendrá por escalones de igual o de distinta altura, proporcional en cada caso a la magnitud de la corriente que circula por las ranuras respectivas en el instante considerado.

De esta forma, notaremos sobre dicha figura 1.07.11 a β) que la f.m.m. creada por dos ranuras de la fase I donde la intensidad es máxima, vale

$$\sqrt{2}\, I_c\, Z_n$$

y se extiende bajo el arco intermedio de ambas ranuras; a este escalón de f.m.m. se le superpone en su parte central otro, debido a la agrupación combinada de una ranura de la fase II y una ranura de la fase III recorridas ambas por corrientes momentáneas $\frac{\sqrt{2}}{2} Ic$ en sentidos opuestos.

La sucesión de escalones dibuja una onda quebrada de f.m.m. cuya ordenada máxima referida a un eje medio de abscisas representa la excitación por polo que engendra el arrollamiento combinado de las tres fases en el momento considerado.

Es fácil ver que esta ordenada máxima alcanza para el instante (1) el valor

$$\hat{\theta}_{(1)} = \frac{\sqrt{2}\, I_c\, Z_n}{2} + 0{,}5\, \sqrt{2}\, I_c\, Z_n = \sqrt{2}\, I_c\, Z_n = 1{,}41\, I_c\, Z_n \quad \text{(Av/polo)}$$

Siguiendo el mismo proceso se ha dibujado el diagrama de f.m.m. fig. γ) para el instante (2) en el cual la corriente en la fase II es nula, vale $\frac{\sqrt{3}}{2} \hat{I}_c = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{2}\, I_c)$ en la fase I y $-\frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{2}\, I_c)$ en la fase III (fig. α).

Un escalón representa ahora

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2}\ I_c\ Z_n = 1{,}225\ I_c\ Z_n \quad \text{(Av)}$$

y esta es la f.m.m. de reacción por polo. En consecuencia,

$$\hat{\theta}_{(2)} = 1{,}225\ I_c\ Z_n \quad \text{(Av/polo)}.$$

La excitación máxima producida por el inducido oscila, pues, desde $\sqrt{2}$ a $\frac{\sqrt{3}}{2}$ veces el producto $Z_n\, I_c$ de los amperios conductores eficaces por ranura. Entre las condiciones de la fig. β) y las de la figura γ) ha transcurrido para las corrientes 1/6 del semiperíodo y los máximos de la onda de f.m.m. han avanzado a su vez sobre el entrehierro 1/6 del paso polar, equivalente a la misma fracción del ángulo espacial eléctrico π.

La fig. δ) corresponde al instante (3) otro sexto de período más tarde, cuando la corriente en la fase II es máxima negativa, y de valor positivo $0{,}5\ \hat{I}_c$ en las fases I y III. Razonando de la misma manera que en los dos casos anteriores obtendríamos la onda de f.m.m. de inducido que aparece en la fig. δ) idéntica a la primera (fig. α) y avanzada, simplemente, de $\frac{2}{6}\pi$ respecto a la misma.

Las figs. ε) y ζ) vuelven a mostrar condiciones análogas a las de β) pero trasladados los máximos positivos de intensidad a las fases II y III respectivamente, o sea 1/3 y 2/3 de período más tarde. El resultado es idéntico al que se obtiene cuando la corriente es máxima en la fase I salvo el avance de la onda de f.m.m. sobre la periferia del inducido en sendos ángulos eléctricos $\frac{2}{3}\pi$ y $\frac{4}{3}\pi$ referidos al paso polar.

Vemos, pues, que el progreso espacial de la onda de reacción de inducido se realiza sincrónicamente con la evolución temporal de la corriente alterna inductora, a razón de un doble paso polar en el recorrido de la onda de f.m.m. por cada período de la corriente. La velocidad de giro del campo resulta ser, así, de una vuelta por cada p ciclos de la corriente alterna, y si ésta es de frecuencia f ciclos/segundos el campo girará a razón de $\frac{f}{p}$ vueltas/segundo o

$$\boxed{N = \frac{60\ f}{p}\ \text{r/m.}} \qquad [1.07.11\ a]$$

b) *Análisis armónico de las ondas de f.m.m.* La onda de f.m.m. resultante de las tres fases, al mismo tiempo que gira sincrónicamente con la velo-

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

cidad de rotación $N = \frac{60\ f}{p}$ r/m, cambia de forma, oscilando entre el escalonado de la fig. β) y la conformación rectangular de la fig. γ) reproducidas para mayor claridad en las figs. 1.07.11 b y c, pasando de una a otra durante el intervalo de $\frac{1}{6}$ de medio período que coincide con el avance de la onda en $\frac{1}{6}$ del paso polar sobre la periferia del inducido. No obstante el aspecto tan distinto de ambas ondas espaciales, la fundamental y los armónicos que integran una y otra son idénticos, diferenciándose tan solo la posición relativa de los mismos con respecto al origen de abscisas. Así, por ejemplo, las fundamentales quedan centradas simétricamente sobre las respectivas ondas primitivas progresando en consecuencia uniformemente con la velocidad sin-

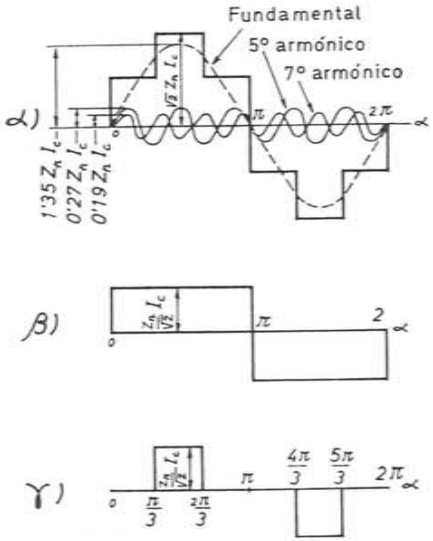


Fig. 1.07.11 b. Análisis armónico de la onda de f.m.m. producida por un devanado trifásico concentrado. Instante de corriente máxima en una fase.

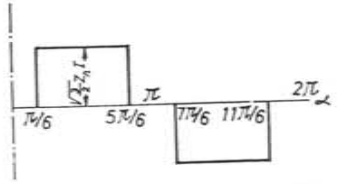


Fig. 1.07.11 c. Análisis armónico de la onda de f.m.m. producida por un devanado trifásico concentrado. Instante de corriente nula en una fase.

crónica antes deducida o sea de 1/6 del paso polar entre los dos instantes considerados. Los terceros armónicos son nulos para ambas configuraciones. Los armónicos de 5.° orden, iguales en amplitud, no se presentan ya con idéntica fase relativa en el caso de la fig. b y en el de la fig. c sino que el de esta última *retrasa* 1/30 del paso polar o 6° eléctricos respecto al primero. Ello equivale a girar *en sentido contrario* al de la fundamental y a una velocidad cinco veces menor. El 7.° armónico se presenta también con decalaje distinto

ante las dos ondas primitivas dando por resultado un giro aparente en el mismo sentido que éstas pero a velocidad 1/7 de la de la onda fundamental, y así correlativamente: el 9.º armónico, como todos los múltiplos de 3 vuelve a ser nulo, el 11.º retrocede con 1/11 de la velocidad sincrónica; el 13.º avanza a 1/13 de dicha velocidad, etc., etc.

Estas propiedades se demuestran a continuación, matemáticamente, basándose siempre en el desarrollo de FOURIER.

La onda escalonada de la fig. 1.07.11 b α) puede considerarse formada por la superposición de otras dos ondas parciales rectangulares, centradas entre sí, de altura común $\frac{\sqrt{2}\, I_e Z_n}{2} = \frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}$ y bases respectivas π y $\frac{\pi}{3}$ por cada semionda, fig. 1.07.11 b β) y γ)

La amplitud de cualquier armónico de orden ν según la fig. β) ya vimos que era para la primera de estas dos, [1.07.09 c],

$$\hat{\theta}_\nu' = \frac{0{,}9}{\nu}\,(I_e Z_n)$$

arrancando todos desde el origen:

$$\beta'_\nu = 0$$

Cuanto a la onda parcial de la fig. γ) tendremos, (sabiendo ya que las componentes cosenoidales a_1, a_3..., han de resultar nulas por tratarse de funciones pares, para la fundamental,

$$b_1'' = \frac{1}{\pi/2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\Big[-\cos\alpha\Big]_{\pi/3}^{2\pi/3} = \frac{2}{\pi}\frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}$$

$$= 0{,}45\,(I_e Z_n)$$

$$\text{tg}\,\beta_1'' = \frac{a_1''}{b_1''} = 0 \;\; ; \;\; a''_1 = 0, \;\; b_1'' > 0 \;\; \beta_1'' = 0°$$

$$\hat{\theta}_1'' = \sqrt{a_1''^2 + b_1''^2} = 0{,}45\,(I_e Z_n);$$

para el 3.er armónico,

$$b_3'' = \frac{1}{\pi/2}\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\,\text{sen}\,3\alpha d\alpha = \frac{2}{\pi}\frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\Big[-\frac{\cos 3\alpha}{3}\Big]_{\pi/3}^{2\pi/3} = -\frac{2}{\pi}\frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\frac{2}{3} = -0{,}3\,(I_e Z_n)$$

$$\text{tg}\,\beta_3'' = \frac{a_3''}{b_3''} = 0 \;; \;\; ; \;\; a_3'' = 0 \;\; b_3'' < 0 \;\; \beta_3'' = 180°$$

$$\hat{\theta}_3'' = \sqrt{a_3''^2 + b_3''^2} = 0{,}3\,(I_e Z_n)$$

Análogamente hallaríamos para el 5.º armónico

$$\hat{\theta}_5'' = \frac{2}{\pi}\frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\frac{1}{5} = 0{,}09\,(I_e Z_n); \;\; \beta_5'' = 0;$$

para el 7.º,

$$\hat{\theta}_7'' = \frac{2}{\pi}\frac{I_e Z_n}{\sqrt{2}}\frac{1}{7} = 0{,}0643\,(I_e Z_n); \;\; \beta_7'' = 0°;$$

etc.

La adición de las ondas fig. 1.07.11 b, β y γ, nos da, pues, como ecuación de la onda escalonada de partida α,

$$\theta = \hat{\theta}_1' \,\text{sen}\,\alpha + \hat{\theta}_3' \,\text{sen}\,3\,\alpha + \hat{\theta}'_5 \,\text{sen}\,5\,\alpha + \hat{\theta}'_7 \,\text{sen}\,7\,\alpha + \ldots$$

$$+ \hat{\theta}_1'' \,\text{sen}\,\alpha + \hat{\theta}_3'' \,\text{sen}\,(3\alpha + 180°) + \hat{\theta}_5'' \,\text{sen}\,5\,\alpha + \hat{\theta}_7'' \,\text{sen}\,7\,\alpha + \ldots$$

y como sen $(3\alpha + 180°) = -$ sen 3α los terceros armónicos se anulan mutuamente, y lo mismo hallaríamos para todos los restantes de orden múltiplo de 3. Así, la onda de la fig. α se descompone en la serie armónica

$$\begin{aligned}\theta = {} & I_e Z_n\,(0{,}9 + 0{,}45)\,\text{sen}\,\alpha + \\ & + I_e Z_n\,(0{,}18 + 0{,}09)\,\text{sen}\,5\alpha + \\ & + I_e Z_n\,(0{,}13 + 0{,}065)\,\text{sen}\,7\alpha + \\ & + I_e Z_n\,(0{,}082 + 0{,}04)\,\text{sen}\,11\alpha + \\ & + I_e Z_n\,(0{,}069 + 0{,}0346)\,\text{sen}\,13\alpha + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad [1.07.11\text{ b}]$$

con sucesivas amplitudes para los armónicos que se reducen a la expresión

$$\boxed{\hat{\theta}_\nu = 1{,}5\,\frac{0{,}9}{\nu}\,(I_e Z_n)\ \text{Av/polo}} \qquad \nu = 1,\ 5,\ 7,\ 11\ldots \text{ (excepto 3 y sus múltiplos) impar.}$$

[1.07.11 c]

Por otra parte, la ecuación que representa a la onda sencillamente rectangular de la fig. 1.07.11 c, alternativa de la anterior b, se deduce como sigue.

Para la fundamental, $(a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0)$.

$$b_1 = \frac{1}{\pi/2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{\frac{3}{2}}\, I_e Z_n\,\text{sen}\,\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\, I_e Z_n\Big[-\cos\alpha\Big]_{\pi/6}^{5\pi/6} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}}\, I_e Z_n\, 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1{,}35\,(I_e Z_n)$$

$$\hat{\theta}_1 = 1{,}35\,(I_e Z_n)$$

la misma amplitud que en el caso anterior, [b],

$$\text{tg}\,\beta_1 = \frac{a_1}{b_1} = 0 \;\; ; \;\; a_1 = 0 \;\; b_1 > 0, \;\; \beta_1 = 0$$

coincidente también en fase con la fundamental de la onda escalonada.

Para el 3.er armónico,

$$b_5 = \frac{1}{\pi/2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{\frac{3}{2}} I_c Z_n \operatorname{sen} 3\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}} I_c Z_n \left[-\frac{\cos 3\alpha}{3} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} = 0$$

$$\theta_3 = 0$$

de valor nulo, lo mismo que se halló con la onda escalonada anterior.

Para el 5.º armónico,

$$b_3 = \frac{1}{\pi/2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \sqrt{\frac{3}{2}} I_c Z_n \operatorname{sen} 5\alpha\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}} I_c Z_n \left[-\frac{\cos 5\alpha}{5} \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{2}} I_c Z_n \frac{2}{5}\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}27\ (I_c Z_n)$$

$$\hat{\theta}_3 = 0{,}27\ (I_c Z_n)$$

el mismo valor que se deduce para θ_5 de la fórmula [b].

En cambio, el ángulo de la fase inicial que para la onda en escalones era de 0º aquí pasa a ser

$$\operatorname{tg} \beta_5 = \frac{a_5}{b_5} = 0 \ ; \quad a_5 = 0 \quad b_5 < 0, \quad \beta_5 = 180°$$

Las ecuaciones de este armónico resultan, pues, con la onda escalonada,

$$\theta_5 = 0{,}27\ (I_c Z_n) \operatorname{sen} 5\alpha$$

y con la onda rectangular que estamos considerando

$$\theta_5 = 0{,}27\ (I_c Z_n) \operatorname{sen} (5\alpha + 180°)$$

El origen de abscisas de esta última se halla como para la primitiva de donde procede, 1/6 del paso polar, o sea 30º magnéticos, más avanzado. Ambos armónicos ocupan pues las posiciones respectivas mostradas en la fig. 1.07.11 d, donde se observa que en tanto la fundamental ha avanzado con velocidad sincrónica 30º hacia la derecha, el 5.º armónico ha progresado en sentido contrario a 1/5 de la misma velocidad.

Repitiendo este estudio para el 7.º armónico confirmaríamos la permanencia de su amplitud y la velocidad de rotación del mismo en sentido directo pero a 1/7 de la velocidad de sincronismo.

La presencia y características de ambos armónicos 5.º y 7.º tiene singular importancia para el funcionamiento de los motores de inducción. Cuando la combinación de ranuras del estator y del rotor es propicia a disminuir la reluctancia correspondiente al circuito magnético de uno u otro de estos armónicos (el paso espacial de sus ondas respectivas es siempre $\frac{1}{\nu}$ del doble paso polar de la máquina), el motor tiende a quedar bloqueado por el armónico en cuestión haciéndose más difícil el arranque si predomina el 5.º armónico cuyo par motor es contrario al de la fundamental, o impidiendo que el

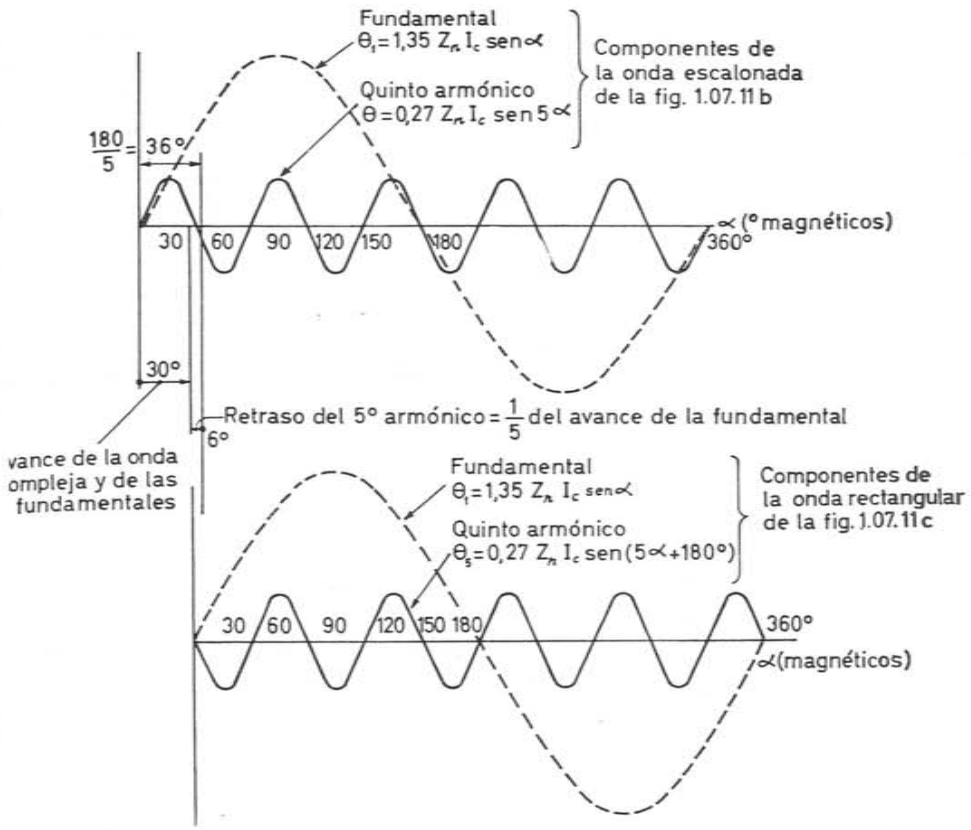


Fig. 1.07.11 d. Progresión regresiva del 5.º armónico sobre la periferia del inducido.

motor rebase durante el período de arranque una velocidad igual a 1/7 de la de sincronismo, si es el 7.º armónico el que domina por efecto de la disposición de las ranuras. Cuando se alcanza la velocidad de régimen, la influencia de estos mismos armónicos sobre el par queda muy atenuada porque la reactancia que presenta ante ellos el devanado rotórico es relativamente elevada, dada las frecuencias de aquellos armónicos con respecto al rotor mismo (σf para la fundamental; $(1-5\sigma)f$ para el 5.º armónico y $(1+7\sigma)f$ para el 7.º) lo cual disminuye comparativamente los efectos de estos últimos; σ indica el deslizamiento del rotor y f la frecuencia de la red.

De todos modos, convendrá, siempre que sea posible, aminorar la importancia de los armónicos 5.º y 7.º, y sobre todo la de este último, mediante el factor de arrollamiento, eligiendo convenientemente el número de ranuras por polo y fase o el paso de bobinas.

Los armónicos de orden 11 y superiores, debido a su escasa amplitud, carecen de influencia sobre el par. Cualquier armónico, sin embargo, puede ser altamente perturbador atendiendo a las vibraciones y al ruido que es capaz de engendrar con la máquina en servicio, por lo cual será siempre recomendable el tratar de eliminarlos de las ondas de excitación o a través de la reluctancia propia de su circuito magnético que abarca la fracción $1/\nu$ del doble paso polar y depende de la combinación de ranuras entre el estator y el rotor.

La variación *temporal* de todos estos armónicos con respecto al devanado inductor sigue el ritmo de la onda primitiva y por tanto el de la fundamental, es decir, se producen a la frecuencia f de la red. No obstante, su contribución al par medio de la máquina es nula en las de polos físicamente determinados (1) (máquinas síncronas así como las asíncronas de rotor bobinado) y prácticamente despreciable en las de polos adaptables al campo inductor (motores de jaula de ardilla). Dado este carácter sincrónico de oscilación temporal dichos flujos armónicos inducen en los devanados respectivos f.e.m. de la misma frecuencia que la principal del bobinado correspondiente y retrasadas temporalmente de $\frac{\pi}{2}$ con respecto a los armónicos de flujo en cuestión, lo cual los equipara a los flujos de dispersión, efectivos también para uno sólo de los dos arrollamientos, primario o secundario, de la máquina que se considere. Así, ya vimos al estudiar la reactancia de los motores asíncronos, siempre de entrehierro reducido, cómo estos armónicos podían incluirse entre los sumandos más importantes del flujo autoinductivo propio de uno y otro arrollamiento, constituyendo la forma de dispersión «doblemente concatenada». Para las restantes máquinas, la magnitud superior del entrehierro restringe su influencia o la reduce a la del flujo real de dispersión en las cabezas de dientes. Los polos macizos acaban por extinguirlos prácticamente en la fracción común a los dos elementos, rotor y estator, pero a costa de unas pérdidas apreciables por corrientes parásitas. Con ranuras abiertas es inadmisible de todo punto el empleo de expansiones polares macizas.

Volviendo a la fórmula [c] de la reacción de inducido resultante en las máquinas trifásicas de arrollamiento concentrado, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}_\nu &= 1{,}5\,\frac{0{,}9}{\nu}\,(I_c\ Z_n) = \frac{1{,}35}{\nu}\,(I_c\ Z_n) \quad \text{(Av/polo)} \\ \text{o bien, como } \tau_p\, q &= 3\ I_c\ Z_n, \\ \hat{\theta}_\nu &= \frac{0{,}45}{\nu}\,(\tau_p\, q) \quad \text{(Av/polo)} \end{aligned}\right\} \text{[1.07.11 d]}$$

El factor 1,5 que la distingue de la ecuación similar para la f.m.m. de un devanado monofásico también concentrado, [1.07.09 c],

(1) Número de polos en el rotor y en el estator distintos para los armónicos.

$$\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9}{\nu}\,(I_c\ Z_n) \quad \text{(Av/polo)}$$

es precisamente igual a $\frac{m}{2}$ siendo m el número de fases, 3, de la máquina trifásica.

Si repitiéramos el desarrollo para una máquina bifásica de una sola ranura por polo y fase llegaríamos por el mismo camino a la expresión resultante.

$$\left.\begin{aligned} \hat{\theta}_\nu &= 2\,\frac{0{,}9}{\nu}\,(I_c\ Z_n) \quad \text{(Av/polo)} \\ \text{pero } 2\ I_c\ Z_n &= \tau_p\, q; \text{ luego,} \\ \hat{\theta}_\nu &= \frac{0{,}9}{\nu}\,(\tau_p\ q) \quad \text{(Av/polo)} \end{aligned}\right\} \text{[1.07.11 e]}$$

Considerando siempre el bobinado polifásico como simétrico, lo cual requiere suponer $m = 2$ para un inducido monofásico y $m = 4$ para uno bifásico, podemos adoptar la siguiente fórmula general que abarca todas las máquinas de cualquier número m de fases, con arrollamiento concentrado:

$$\hat{\theta}_\nu = \frac{m}{2}\,\frac{0{,}9}{\nu}\,(I_c\ Z_n) \quad \text{(Av/polo)} \qquad \text{[1.07.11 f]}$$

1.07.12. Devanados polifásicos distribuidos

Si se trata de un arrollamiento distribuido con n_{pf} ranuras por polo y fase (referido al número de fases efectivas 1, 2 ó 3 —monofásico, bifásico, trifásico) cada armónico de f.m.m. resultará de la suma de n_{pf} senoides decaladas entre sí de un ángulo eléctrico $\gamma_\nu = \nu\,\frac{\pi}{m n_{pf}}$ lo que dará una suma geométrica, a base de la ecuación [1.07.11 f] y con el significado en ella atribuído a m

$$\boxed{\hat{\theta}_\nu = \frac{m}{2}\,\frac{0{,}9}{\nu}\,(I_c\ Z_n\ \xi_\nu)\ n_{pf}} \quad \text{(Av/polo)} \qquad \text{[1.07.12 a]}$$

válida además tanto si el devanado es de paso diametral (entero) como de cuerda (acortado o alargado) si ξ_ν incluye también junto con el factor de distribución, el de acortamiento

ξ_ν = factor de bobinado para el armónico en cuestión de orden ν (tablas 1.04.13 a, b, c, d y 1.04.15 a).

Z_n = conductores por ranura

I_c = corriente eficaz por conductor

m = número de fases ($m = 2$ para los monofásicos, $m = 3$ para los trifásicos, $m = 4$ para los bifásicos).

Para ν sólo deben tomarse órdenes impares excepto el 3.º, 9.º, 15.º..., si se trata de máquinas trifásicas.

Si designamos nuevamente por q la carga específica de la máquina, en Ac/cm y por τ_p el paso polar en cm, tendremos también estas expresiones

Devan. monof.	$\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9\ \xi_\nu}{\nu}(\tau_p\ q).$	Av/polo	
» bifásicos	$\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}9\ \xi_\nu}{*\nu}(\tau_p\ q).$	»	[1.07.12 b]
» trifásicos	$\hat{\theta}_\nu = \frac{0{,}45\xi_\nu}{\nu}(\tau_p\ q).$	»	

1.07.13 Ejemplo

El cálculo de la excitación de un motor trifásico asincrónico a 50 Hz, de 4 CV 220/380 V, 1500 r/m sincrónicas indica que para mantener el flujo en vacío se precisan 353 Av/polo, valor máximo.

El diámetro del entrehierro es de 96 mm y el estator, de 24 ranuras, está bobinado con 45 conductores por ranura.

Calcular la corriente magnetizante I_μ en % de la nominal.

De la ecuación [1.07.12 a] se desprende, para la fundamental, ($\nu = 1$),

$$I_\mu = \frac{2\ \hat{\theta}_1\ \boldsymbol{\nu}}{0{,}9\ m\ n_{pf}\ Z_n\ \xi_1} \quad \text{(A/conductor)}$$

Aquí, $m = 3$ fases, y con 4 polos (1500 r/m sincrónicas a 50 Hz).

$$n_{pf} = \frac{24}{3 \cdot 4} = \text{2 ranuras por polo y fase}$$

Con 2 ranuras por polo y fase y paso entero, el factor de bobinado para la fundamental es, (tabla 1.04.13 a], $\xi_1 = 0{,}966$.

$Z_n = 45$ cond/ranura.

Luego, la corriente magnetizante,

$$I_\mu = \frac{2 \cdot 1 \cdot 353}{0{,}9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 45 \cdot 0{,}966} = 3{,}01 \text{ A/conduct} = 3{,}01 \text{ A/fase}$$

Un motor de 4 CV y 4 polos viene a tener un rendimiento $\eta \approx 0{,}82$ y un factor de potencia cos $\varphi \approx 0{,}84$ a P.C. Su corriente por fase es aproximadamente

$$I = \frac{4 \cdot 736}{3 \cdot 220 \cdot 0{,}82 \cdot 0{,}84} = 6{,}48 \text{ A/fase}$$

En %,

$$*I_\mu = \frac{I_\mu}{I_f}\ 100 : \frac{3{,}01}{6{,}48}\ 100 = 46{,}5\ \%.$$

Al mismo resultado llegaríamos utilizando la ecuación [1.07.12 b].

$$q_\mu = \frac{\hat{\theta}_1}{0{,}45\xi_1\tau_p}$$

como $\hat{\theta}_1 = 353$ Av máximo, $\xi_1 = 0{,}966$ y

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p} = \frac{\pi \cdot 9{,}6}{4} = 7{,}54 \text{ cm}$$

se tendrá para la carga lineal magnetizante

$$q_\mu = \frac{353}{0{,}45 \cdot 0{,}966 \cdot 7{,}54} = 107{,}5 \quad \text{Ac/cm.}$$

De

$$q_\mu = \frac{Z_n\ I_\mu}{\pi\ D}$$

se deduce

$$I_\mu = \frac{\pi\ D\ q_\mu}{n\ Z_n} = \frac{\pi \cdot 9{,}6 \cdot 107{,}5}{24 \cdot 45} = 3{,}01 \text{ A/cond.} = 3{,}01 \text{ A/fase}$$

lo mismo que acabamos de hallar.

1.07.14. Subdivisión de la reacción de inducido para el estudio de las máquinas sincrónicas de polos salientes

En el caso de los alternadores trifásicos de polos salientes el efecto magnético de la reacción de inducido se puede estudiar con más precisión subdividiéndola en dos componentes: una longitudinal y otra transversal, cuyas f.m.m. actúan sobre regiones de este circuito de muy distintas características cuanto a la reluctancia.

La fig. 1.07.14 a muestra un sector de la máquina, que abarca, desarrollado, dos pasos polares, y el arrollamiento consiguiente simplificado con los puntos y cruces de f.e.m. inducida. El instante elegido corresponde al momento en que la f.e.m. es máxima en la fase I (sus lados de bobina coinciden con la parte central de los polos inductores).

Si la corriente de carga fuese puramente *activa*, es decir, si estuviera en fase con la f.e.m. la distribución de estas f.e.m. sobre la periferia de la máquina vendría a corresponder, en líneas generales, a la de corrientes en las tres fases, prescindiendo de las discontinuidades de una y otra distribución.

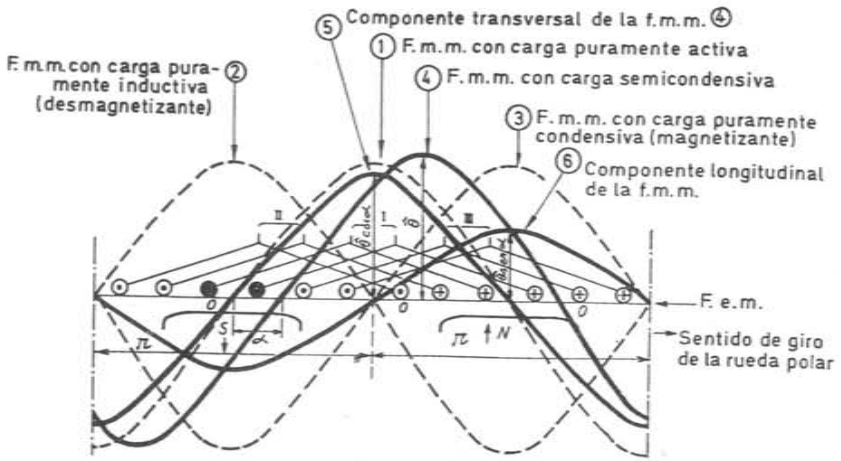


Fig. 1.07.14 a. Componentes transversal y longitudinal de la reacción de inducido en un alternador trifásico.

La curva (1) de puntos nos muestra en este caso el curso de la reacción de inducido, limitada la representación a la componente fundamental de la onda de f.m.m. ya que el 3.er armónico y sus múltiplos desaparecen y los restantes pueden incluirse como hemos visto en la dispersión. Los máximos de la onda coinciden entonces permanentemente con los ejes de las bobinas en las cuales la f.e.m. es máxima; y éstos, a su vez, con los ejes interpolares giratorios. El carácter de la reacción, estacionaria respecto a los polos, es constantemente *transversal* relativamente a los mismos.

Si la carga fuese puramente *inductiva*, las corrientes retrasarían, en el tiempo, de 1/4 de período respecto a las f.e.m. y la onda de f.m.m. provocada por el sistema trifásico de dichas corrientes se presentaría también espacialmente desfasada de 1/4 del doble paso polar con respecto a la onda anterior (1), es decir, adoptaría la posición de la onda (2) centrada longitudinalmente con los polos inductores e *íntegramente desmagnetizante*.

Si, por el contrario, la carga fuese puramente condensiva, las corrientes adelantarían de 1/4 de período, en el tiempo, sobre las f.e.m., la reacción de inducido presentaría su onda resultante (3) desfasada también de medio paso polar con respecto a la que correspondería a una carga resistiva pero el carácter de la reacción, centrada de nuevo longitudinalmente sobre los ejes polares pasaría a ser íntegramente *magnetizante*.

Como siempre sucede, las cargas reactivas tienden a desexcitar los generadores y las cargas condensivas a sobrexcitarlos.

Cuando la carga es mixta, seminductiva o semicondensiva la onda resultante (4) de valor máximo $\hat{\theta}$ puede descomponerse en dos: una transversal (5) de amplitud

$$\hat{\theta}_t = \hat{\theta} \cos \alpha \qquad [1.07.14\ a]$$

y otra longitudinal (6) de valor máximo

$$\hat{\theta}_l = \hat{\theta} \operatorname{sen} \alpha \qquad [1.07.14\ b]$$

como se indica en la figura 1.07.14 a. El ángulo espacial α medido en grados eléctricos es el mismo que marca el desfase temporal entre las f.e.m. y las corrientes de cada fase.

Esta subdivisión no presenta ventaja alguna en las máquinas de inductor cilíndrico (turboalternadores), pero en cambio es muy oportuna para los alternadores de polos salientes por cuanto las reacciones transversal y longitudinal actúan sobre circuitos magnéticos de características muy distintas.

La fig. 1.07.14 b muestra ambas ondas, de f.m.m., junto con las de inducción, llenas, a que dan origen, supuestas, una y otra, proporcionales en el entrehierro uniforme, y con una reluctancia interpolar que redujera las inducciones en dicho espacio, para el caso β) de la reacción transversal, a 1/6 de las que corresponderían al entrehierro. Las inducciones y el flujo interpolares de la reacción antagónica, d), pueden despreciarse. Tales hipótesis satisfacen con precisión suficiente los cálculos prácticos.

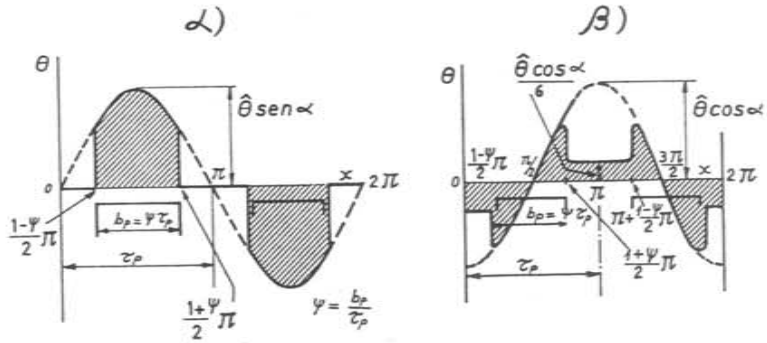


Fig. 1.07.14 b. Componentes longitudinal y transversal de la onda fundamental de f.m.m. de armadura. Determinación de las fundamentales del campo de dichas componentes.

Supongamos ahora, inversamente, que el entrehierro fuese uniforme en toda la periferia de la armadura (reluctancia, pues, uniforme) y que la f.m.m. siguiera el curso de la onda efectiva de inducción. El resultado sería equivalente y podríamos calcular como si se tratase de un alternador de rotor liso con la doble reacción de inducido, transversal y antagónica, determinada por otras tantas f.m.m. según las curvas de inducción dibujadas de línea llena. Nos limitaremos a tomar en cuenta las fundamentales prescindiendo de los armónicos que afectan en otro orden a la f.e.m. generada por la máquina.

Para un alternador trifásico, la expresión de *la componente del campo inductor* necesaria para contrarrestar la reacción longitudinal debida a la f.m.m. de inducido, reducida a la fundamental considerada, pasa a ser la siguiente

$$\boxed{\theta_{lb} = \hat{\theta} c_l \operatorname{sen} \alpha = 0{,}45\ c_l\ \xi_1\ (q\ \tau_p) \operatorname{sen} \alpha} \quad \text{(Av/polo)} \quad [1.07.14\ c]$$

Esta expresión, repetimos, está ya referida a la excitación principal de la máquina, o sea, que constituye la amplitud constante de la f.m.m. suplementaria en los polos, extendida sobre el arco b_p, cuya fundamental equivale a la de reacción que estamos analizando.

Con entrehierro constante, y $\psi = \dfrac{b_p}{\tau_p}$

$$c_l = \frac{\psi\pi + \operatorname{sen} \psi\pi}{4 \operatorname{sen} \dfrac{\psi\pi}{2}}$$

Análogamente el suplemento de f.m.m. que, con el entrehierro dado, hay que disponer en los polos de extensión b_p para compensar la onda fundamental de la reacción transversal equivalente, viene dado por

$$\boxed{\theta_{tb} = \hat{\theta}\, c_t \cos \alpha = 0{,}45\ c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p) \cos \alpha} \quad \text{(Av/polo)} \quad [1.07.14\ d]$$

siendo, con entrehierro constante,

$$c_t = \frac{\psi\pi - \operatorname{sen} \psi\pi + \dfrac{2}{3} \cos \dfrac{\psi\pi}{2}}{4 \operatorname{sen} \dfrac{\psi\pi}{2}}$$

ψ representa, como hemos dicho, el recubrimiento polar.

c_l y c_t son dos parámetros dependientes de $\psi = \dfrac{b_p}{\tau_p}$ que se pueden tomar, ya calculados, de la fig. 1.07.14 c.

Si el entrehierro de los polos es senoidal de longitud variable según la ley

$$\boxed{\delta_x = \frac{\delta}{\cos\left(\dfrac{x}{\tau_p}\,\pi\right)}} \quad [1.07.14\ e]$$

donde δ es el entrehierro mínimo y x la abscisa del entrehierro δ_x contada a partir del punto de mínimo entrehierro, las expresiones que resultan para c_l y c_t son:

$$c_l = \frac{4}{3} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\psi\pi}{2} \left(\cos^2 \dfrac{\psi\pi}{2} + 2 \right)}{\psi\pi + \operatorname{sen} \psi\pi}$$

$$c_t = \frac{4}{3} \frac{\operatorname{sen}^3 \dfrac{\psi\pi}{2} + \dfrac{1}{4} \cos^2 \dfrac{\psi\pi}{2}}{\psi\pi + \operatorname{sen} \psi\pi}$$

y sus valores, en función de ψ se encuentran, ya calculados, en la fig. 1.07.14 d.

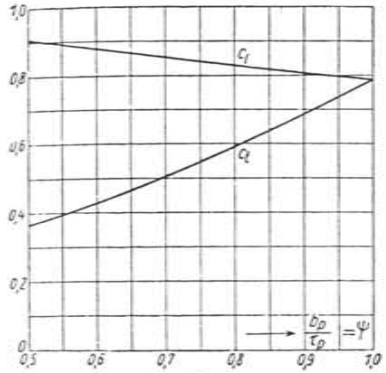


Fig. 1.07.14 c. Coeficientes c_l y c_t para polos salientes de entrehierro uniforme.

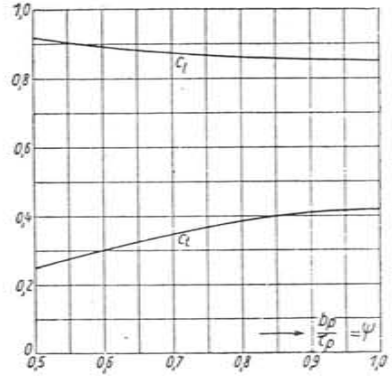


Fig. 1.07.14 d. Coeficientes c_l y c_t para polos salientes de entrehierro senoidal.

Nos limitaremos a demostrar las fórmulas dadas para θ_l y θ_t, c_l y c_t en el caso de un entrehierro polar uniforme.

Refiriéndonos a la fig. 1.07.14 b, α), se trata de hallar la fundamental de la onda periódica representada ésta en línea gruesa (senoide cortada) cuya amplitud viene dada por ($\hat{\theta}$ sen α).

La simetría respecto al eje polar nos dispensa ya de calcular el valor de a_1 que resultaría cero; cuanto a b_1, representando por x los ángulos en abscisa,

$$b_1 = \frac{1}{\pi/2} \int_{\frac{1-\psi}{2}\pi}^{\frac{1+\psi}{2}\pi} [(\hat{\theta} \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} x] \operatorname{sen} x\, dx = \frac{2\,\hat{\theta} \operatorname{sen} \alpha}{\pi} \int_{\frac{1-\psi}{2}\pi}^{\frac{1+\psi}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx.$$

$$= \frac{2\,\hat{\theta} \operatorname{sen} \alpha}{\pi} \left[-\frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{x}{2} \right]_{\frac{1-\psi}{2}\pi}^{\frac{1+\psi}{2}\pi} =$$

$$= \frac{\hat{\theta} \operatorname{sen} \alpha}{2\pi} (2 \operatorname{sen} \psi\pi + 2\psi\pi) = \boxed{\hat{\theta} \operatorname{sen} \alpha \frac{\psi\pi + \operatorname{sen} \psi\pi}{\pi}}\ ; \quad [1.07.14\ f]$$

$$\text{tg } \beta_1 = \frac{a_1}{b_1} = 0\,; \quad \cos a_1 = 0 \text{ y } b_1 > 0, \quad \beta_1 = 0$$

La ecuación [f] determina, a su vez, la amplitud de la componente fundamental que se deduce para la onda cortada tal y como aparece en la fig. 1.07.14 b, α).

De la misma manera, hallaremos el 1.er armónico de la componente transversal de la figura 1.07.14 b, β), constituida en este caso por tres zonas distintas comprendidas entre los ángulos marcados $\frac{\pi}{2}$, $\frac{1+\psi}{2}\pi$, $\pi + \frac{1-\psi}{2}\pi$ y $\frac{3\pi}{2}$. Tomando el primero por origen de abscisas, los límites de las tres zonas serán 0, $\frac{\psi\pi}{2}$, $\pi - \frac{\psi\pi}{2} = \pi\,\frac{2-\psi}{2}$ y π.

Dada la simetría polar, $a_1 = 0$, y

$$b_1 = \frac{1}{\pi/2}\hat{\theta}\cos\alpha\left\{\int_0^{\frac{\psi\pi}{2}} (\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x\,dx + \int_{\frac{\psi\pi}{2}}^{\frac{2-\psi}{2}\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{6}\,dx + \int_{\frac{2-\psi}{2}\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x\,dx\right\} =$$

$$= \frac{2\hat{\theta}\cos\alpha}{\pi}\left\{\left[-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\psi\pi}{2}} + \left[-\frac{\cos x}{6}\right]_{\frac{\psi\pi}{2}}^{\frac{1-\psi}{1}\pi} + \left[-\frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + \frac{x}{2}\right]_{\frac{2-\psi}{2}\pi}^{\pi}\right\} =$$

$$= \frac{2\hat{\theta}\cos\alpha}{\pi}\left[\frac{1}{4}(-2\operatorname{sen}\psi\pi + 2\psi\pi) + \frac{1}{6}2\cos\frac{\psi\pi}{2}\right] =$$

$$\boxed{b_1 = \hat{\theta}\cos\alpha\,\frac{-\operatorname{sen}\psi\pi + \psi\pi + \frac{2}{3}\cos\frac{\psi\pi}{2}}{\pi}} \qquad [1.07.14\text{ g}]$$

Como $a_1 = 0$ y $b_1 > 0$ $\quad \text{tg } \beta_1 = \frac{a_1}{b_1} = 0$ y $\beta_1 = 0$

La expresión de b_1 determina simplemente la amplitud de la componente fundamental que corresponde a la onda compleja de f.m.m. transversal ficticia representada por la línea continua de la fig. 1.07.14 b, β).

De estos valores de las amplitudes b_1 para una y otra onda de f.m.m. supuestas, se deducen las excitaciones uniformes de las ondas rectangulares alternas θ_l y θ_t que extendidas sobre un arco igual al de cada polo, b_p, tendrían como componentes fundamentales las mismas senoides que acabamos de hallar, lo cual equivale a referir estas últimas a la excitación de los polos principales.

Ahora bien, para una onda polar rectangular como la indicada, de base angular $\psi\pi$, fig. 1.07.14 e, se tiene de un modo general

$$\hat{A}_1 = \frac{1}{\pi/2}\int_{\frac{1-\psi}{2}\pi}^{\frac{1+\psi}{2}\pi} A\operatorname{sen} x\,dx = \frac{2A}{\pi}\left[-\cos x\right]_{\frac{1-\psi}{2}\pi}^{\frac{1+\psi}{2}\pi} = A\,\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\psi\pi}{2}$$

de donde,

$$A = \frac{\hat{A}_1}{\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\psi\pi}{2}}$$

o sea, que basta dividir por $\left(\frac{4}{\pi}\operatorname{sen}\frac{\psi\pi}{2}\right)$ las expresiones [f] y [g] para tener los valores propuestos de la excitación constante equivalente, por polo.

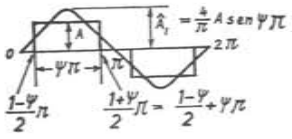


Fig. 1.07.14 e. Fundamental de una onda rectangular cortada.

Efectuando estas operaciones, resulta

$$\theta_{lb} = \hat{\theta}\operatorname{sen}\alpha\,\frac{\psi\pi + \operatorname{sen}\psi\pi}{\pi}\,\frac{\pi}{4\operatorname{sen}\frac{\psi\pi}{2}} = \hat{\theta}\operatorname{sen}\alpha\,\frac{\psi\pi + \operatorname{sen}\psi\pi}{4\operatorname{sen}\frac{\psi\pi}{2}}$$

$$\theta_{tb} = \hat{\theta}\cos\alpha\,\frac{\psi\pi - \operatorname{sen}\psi\pi + \frac{2}{3}\cos\frac{\psi\pi}{2}}{\pi}\,\frac{\pi}{4\operatorname{sen}\frac{\pi\psi}{2}} =$$

$$= \hat{\theta}\cos\alpha\,\frac{\psi\pi - \operatorname{sen}\psi\pi + \frac{2}{3}\cos\frac{\psi\pi}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{\psi\pi}{2}}$$

Identificando estas ecuaciones con las [c] y [d] antes ofrecidas, resultan inmediatamente para c_l y c_t las expresiones analíticas que se enunciaron en el caso de ser los polos inductores de entrehierro uniforme.

El mismo proceso, aunque algo más complicado seguiríamos para calcular c_l y c_t en el caso de una máquina sincrónica de polos salientes y entrehierro senoidal.

Observando que $\frac{m\,n_{pf}\,Z_n}{2}\,I_c$ son los amperios vueltas por polo del inducido, la ecuación [1.07.12 a] puede escribirse también, por lo que respecta a la fundamental

$$\hat{\theta}_1 = 0{,}9\,\xi_1 \times (\text{Av del inducido por polo})$$

siguiendo

$$\theta_{lb} = (\hat{\theta}_1 \operatorname{sen}\alpha)\,c_l \quad (\text{Av/polo})$$

$$\theta_{tb} = (\hat{\theta}_1 \cos\alpha)\,c_t \quad (\text{Av/polo})$$

Es decir: para reducir al inductor los amperios vueltas de reacción de inducido, basta *multiplicarlos por* $(0{,}9\,\xi_1)$ descomponiéndolos después en lineales o transversales mediante la introducción, además, de los factores c_l o c_t respectivos sobre sus componentes de uno u otro carácter.

1.08 EL CIRCUITO DE CONMUTACIÓN

1.08.01. Teoría general

Para una máquina de continua, la corriente en cada sección individual del arrollamiento comprendida entre dos delgas se invierte al pasar dicha sección de una a otra vía. La inversión se efectúa durante el intervalo en que ambas delgas conectadas a los extremos de la bobina en cuestión permanecen en corto circuito por las escobillas.

La fig. 1.08.01 a muestra una de estas bobinas B en un instante determinado t del período de conmutación, medido el tiempo t a partir de la iniciación

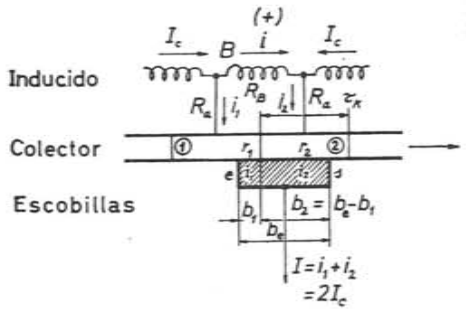


Fig. 1.08.01 a. Características de la conmutación en el instante t (tiempo total de corto circuito $= T_c$).

$$t = T_c \frac{b_1}{b_e}$$

$$i = I_c - i$$
$$i_2 = I_c + i$$
$$I = i_1 + i_2$$

$$r_1 = R_e \frac{b_e}{b_1} = R_e \frac{T_c}{t}$$

$$r_2 = R_e \frac{b_e}{b_2} = R_e \frac{T_c}{T_c - t}$$

del corto circuito para la bobina B, o sea, a partir del momento en que la delga 1 entra en contacto con el borde de la escobilla. Supondremos por ahora que el ancho b_e de la escobilla sea igual al de una delga τ_K de modo que durante el período de conmutación T_c se halle en corto circuito solamente una bobina.

Interesa sobre todo seguir la evolución de las corrientes i_1 e i_2 en las superficies parciales de contacto cuyas resistencias, variables al girar el colector, representamos por r_1, r_2, siendo R_e la resistencia de contacto correspondiente a la superficie total de asiento de la escobilla.

El conocimiento del curso temporal de dichas intensidades i_1, i_2, nos permitirá analizar las condiciones del circuito local formado por la bobina B las aletas de conexión, y la escobilla, en el instante más peligroso de la con-

mutación, al final de la misma, cuando el borde posterior s de la escobilla deja de hacer contacto con la delga 2 interrumpiendo el corto circuito de la bobina. Si la corriente que ha de ser seccionada por el contacto superficial entre escobilla y delga fuese excesivamente grande se produciría una chispa de ruptura capaz de dañar el colector provocando un rápido deterioro del mismo.

Durante el período de conmutación la bobina en corto circuito queda sometida a la acción de las siguientes f.e.m.

- f.e.m. estática de autoinducción debida a la variación de la propia intensidad en la bobina, al pasar desde $+I_c$ antes de iniciarse el corto circuito hasta $-I_c$ una vez terminado éste.
- f.e.m. dinámica al cortar los conductores en corto circuito el flujo estacionario de reacción transversal.
- f.e.m. dinámica debida al flujo principal en el caso de que la conmutación no se verifique íntegramente en la zona neutra del mismo (escobillas decaladas, por ejemplo).
- f.e.m. dinámica inducida en la bobina por el flujo de los polos auxiliares si la máquina va equipada con ellos.

La aplicación de las leyes de KIRCHHOFF nos proporcionará en cualquier caso las ecuaciones de las corrientes en las diversas partes del circuito, y del análisis de dichas ecuaciones deduciremos las condiciones a satisfacer para lograr un proceso de conmutación favorable.

1.08.02. 1.er Caso. Conmutación por resistencia

Para comenzar el estudio, admitiremos unas condiciones ideales: que la reactancia de la bobina sea despreciable, que el campo transversal dé origen a un flujo insignificante en los espacios interpolares, y que el proceso de corto circuito se desarrolle todo él prácticamente en la zona neutra no estando dotada tampoco la máquina de polos auxiliares. Ello equivale a suponer que todas las f.e.m. citadas sean nulas produciéndose una simple «conmutación por resistencia».

La ecuación del circuito mostrado en la fig. 1 puede escribirse entonces (la resistencia eléctrica de la masa de la escobilla es despreciable)

$$iR_B + i_2(R_a + r_2) - i_1(R_a + r_1) = 0 \qquad [1.08.02\ a]$$

Como, a velocidad uniforme de la máquina y suponiendo que las resistencias de contacto varíen, como las de los conductores sólidos, en razón inversa de las secciones de paso, es

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= R_e \frac{b_e}{b_1} = R_e \frac{T_c}{t} \\ r_2 &= R_e \frac{b_e}{b_2} = R_e \frac{T_c}{T_c - t} \end{aligned}\right\} \qquad [1.08.02\ b]$$

y representado por la k_R la relación de las resistencias de los conductores ($R_B + 2\,R_a$) a la de contacto R_e o sea

$$\boxed{k_R = \frac{R_B + 2\,R_a}{R_e}} \qquad [1.08.02\ c]$$

siendo además

$$i_1 = I_c - i \quad \text{e} \quad i_2 = I_c + i\,, \qquad [1.08.02\ d]$$

la ecuación [a] conduce a la siguiente solución para i (1)

$$\boxed{i} = \boxed{I_c \frac{\left(1 - \frac{2t}{T_c}\right)}{1 + k_R \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)}} \qquad [1.08.02\ e]$$

(1) He aquí el desarrollo:

De [a] y [d]

$$iR_B + (I_e + i)(R_a + r_2) - (I_e - i)(R_a + r_1) = o$$

Agrupando términos,

$$i(R_B + R_a + r_2 + R_a + r_1) + I_e(R_a + r_2 - R_a - r_1) = o\ ;$$

o

$$i(R_B + 2\,R_a + r_1 + r_2) + I_e(r_2 - r_1) = o$$

Pero de [b],

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_2 &= R_e T_e\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{T_e - t}\right) = \frac{R_e T_e^2}{t(T_e - t)} \\ r_2 - r_1 &= R_e T_e\left(\frac{1}{T_e - t} - \frac{1}{t}\right) = \frac{R_e T_e (2t - T_e)}{t(T_e - t)} \end{aligned}\right\} \qquad [1.08.02\ f]$$

Sustituyendo, teniendo además presente [c],

$$i\left(k_R R_e + \frac{R_e T_e^2}{t(T_e - t)}\right) = I_e \frac{R_e T_e (T_e - 2t)}{t(T_e - t)}$$

$$i\,[k_R t(T_e - t) + T_e^2] = I_e T_e (T_e - 2t)$$

de donde

$$i = I_e \frac{T_e (T_e - 2t)}{T_e^2 + k_R t (T_e - t)} =$$

$$= I_e \frac{\left(1 - \frac{2t}{T_e}\right)}{1 + k_R \frac{t}{T_e}\left(1 - \frac{t}{T_e}\right)}$$

tal como vemos en [e].

Si la resistencia de la bobina R_B y de las aletas R_a fueran despreciables respecto a la de contacto R_e de la escobilla, lo cual se aproxima bastante a la realidad, pondríamos $k_R = 0$ y la ecuación [e] se simplificaría convirtiéndose en

$$\boxed{i} = \boxed{I_c\left(1 - \frac{2t}{T_c}\right)} \qquad [1.08.02\ g]$$

Esta es la ecuación de una recta, fig. 1.08.02 a, que para $t = 0$ da $i = I_c$; para $t = \frac{T_c}{2}$, $i = 0$ y para $t = T_c$, $i = -I_c$.

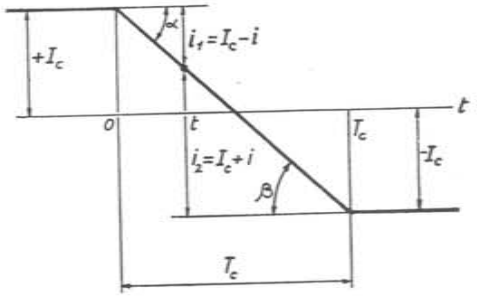


Fig. 1.08.02 a. Conmutación lineal.

La corriente de conmutación en la bobina sigue entonces una ley extrictamente lineal.

Puesto que

$$i_1 = I_c - i$$

e

$$i_2 = I_c + i$$

los segmentos comprendidos entre cada punto de la recta y las prolongaciones de las ordenadas extremas nos dan los valores de las intensidades respectivas en las superficies de contacto 1 y 2, tal como muestra la figura 1.08.02 a.

Cualquiera que sea el curso temporal de la intensidad i en la bobina, las densidades de corriente Δ_1 y Δ_2 en una y otra superficie parcial S_1 y S_2 vienen dadas por

$$\Delta_1 = \frac{i_1}{S_1}$$

$$\Delta_2 = \frac{i_2}{S_2}$$

Con movimiento de rotación uniforme, y designado por S_e la superficie total de contacto de la escobilla

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= S_e \frac{t}{T_c} \\ S_2 &= S_e \frac{T_c - t}{T_c} \end{aligned}\right\} \qquad \text{[1.08.02 h]}$$

y

$$\Delta_1 = \frac{i_1}{S_1} = \frac{i_1}{S_e}\frac{T_c}{t}$$

$$\Delta_2 = \frac{i_2}{S_2} = \frac{i_2}{S_e}\frac{T_c}{T_c - t}$$

pero, a escala conveniente,

$$\frac{i_1}{t} = \text{tg } \alpha$$

$$\frac{i_2}{T_c - t} = \text{tg } \beta$$

luego

$$\Delta_1 = \frac{T_c}{S_e}\text{tg } \alpha$$

$$\Delta_2 = \frac{T_c}{S_e}\text{tg } \beta$$

Con una conmutación lineal, $\alpha = \beta$; las densidades de corriente en los contactos permanecen en este caso invariables durante toda la conmutación. En valor absoluto,

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_0 = \frac{i_1}{S_e}\frac{T_c}{t}$$

Haciendo, por ejemplo $i_1 = I_c$ o sea $t = \frac{T_c}{2}$

$$\boxed{\Delta_0 = \frac{2\ I_c}{S_e} = \text{Cte}} \qquad \text{[1.08.02 i]}$$

Si tenemos en cuenta la resistencia de la bobina R_B y de las aletas R_a de acuerdo con la ecuación más completa [e], la característica de i en función

de t deja de ser lineal pero no se aparta mucho de esta ley manteniéndose además simétrica con respecto al instante central $t = \frac{T_c}{2}$ del período de conmutación (fig. 1.08.02 b).

En efecto; para $t = \frac{T_c}{2}$,

$$i = \frac{I_c\left(1 - \frac{2t}{T_c}\right)}{1 + k_R \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)} = 0$$

y a su vez para los instantes $t = t_1$ y $t = T_c - t_1$ es fácil comprobar que los valores de i son iguales, de signo contrario e inferiores, constantemente

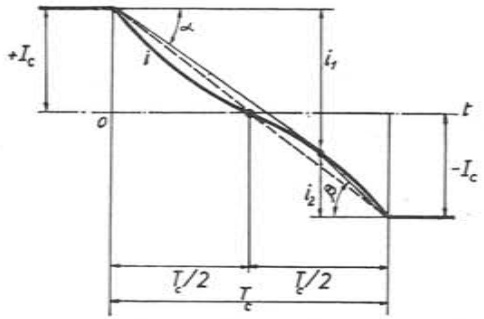


Fig. 1.08.02 b. Conmutación no lineal, por resistencia.

en valor absoluto a los que se desprenden, para los mismos instantes, de la ecuación [g] que conduce a una conmutación lineal.

Sin embargo, los valores de las intensidades i_1 e i_2 en ambas superficies de contacto, siempre de acuerdo con la ley de KIRCHHOFF, dados por

$$i_1 = I_c - i \quad \text{e} \quad i_2 = I_c + i\,,$$

vienen alterados con ello en sentido desfavorable para la conmutación ya que la magnitud de β para la delga de salida aumenta al aproximarse el momento de la interrupción del circuito y, como consecuencia, la densidad de corriente en la misma superficie de contacto, proporcional en cualquier caso, como hemos visto, a tg β resulta más elevada. No obstante, el efecto es prácticamente poco apreciable dadas las magnitudes relativas de las resistencias ($R_B + 2\ R_a$) y R_e.

1.08.03. 2.º Caso. Conmutación retardada

Admitamos ahora que la reactancia de la bobina es apreciable no pudiendo prescindirse por tanto de la f.e.m. de a.i. e_x. Entonces, el 2.º término de la ecuación [a] no es nulo debiendo escribirse

$$i\ R_B + i_2\ (R_a + r_2) - i_1\ (R_a + r_1) = e_x = -\ L_x \frac{di}{dt}$$

siendo L_x el c.d.a.i. de la bobina que conmuta. Admitamos en un análisis aproximado que e_x permaneciera constante e igual a su valor medio.

La solución (1) que nos da esta ecuación, para i, puede simplificarse si se admite, sin grave error, como hemos dicho, que tanto R_a como R_B sean despreciables y escribir así

$$i_2\ r_2 - i_1\ r_1 = e_x$$

Sustituyendo i_2 por $(I_c + i)$ e i_1 por $(I_c - i)$ y designando por k_e la relación de la f.e.m. de a.i. e_x a la caída de tensión en el contacto ($2\ I_c\ R_e = u_e$ por carbón), o sea poniendo

$$\boxed{k_e = \frac{e_x}{2\ I_c\ R_e}} = \frac{-\ L_x \dfrac{di}{dt}}{2\ I_c\ R_e} \qquad [1.08.03\ a]$$

---

(1) Damos nuevamente el desarrollo de la ecuación:

$$i_2 r_2 - i_1 r_1 = e_x$$

$$(I_c + i) r_2 - (I_c - i) r_1 = e_x$$

$$i(r_1 + r_2) + I_c\ (r_2 - r_1) = e_x.$$

De acuerdo con [1.08.02 f]

$$i\ \frac{R_e\ T_c^2}{t\ (T_c - t)} + I_c\ \frac{R_e\ T_c\ (2\ t - T_c)}{t\ (T_c - t)} = e_x$$

$$i T_c^2 + I_c\ T_c\ (2t - T_c) = \frac{e_x\ t\ (T_c - t)}{R_e}$$

$$i = \frac{1}{T_c^2}\left[I_c T_c\ (T_c - 2t) + \frac{e_x\ t\ (T_c - t)}{R_e}\right]$$

pero, de [a],

$$\frac{e_x}{R_e} = 2\ I_c\ k_e$$

e

$$i = I_c\left[\left(1 - \frac{2t}{T_c}\right) + 2\ k_e \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\right]$$

concordante con [b]

se deduce

$$\boxed{i = I_c\left[\left(1 - \frac{2t}{T_c}\right) + 2\ k_e \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\right]} \qquad [1.08.03\ b]$$

Interesa particularmente el valor de i_2 la corriente en la sección de contacto sobre la delga 2, donde se produce la ruptura del corto circuito. Una vez más,

$$i_2 = I_c + i = I_c\left[1 + \left(1 - \frac{2t}{T_c}\right) + 2\ k_e \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\right]$$

$$= 2\ I_c\left[\left(1 - \frac{t}{T_c}\right) + k_e \frac{t}{T_c}\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\right]$$

$$= 2\ I_c\left(1 - \frac{t}{T_c}\right)\left[1 + k_e \frac{t}{T_c}\right] \qquad [1.08.03\ c]$$

de donde se deduce la densidad de corriente Δ_2 en dicha sección S_2 [1.08.02 h],

$$\Delta_2 = \frac{i_2}{S_2} = \frac{i_2}{S_e}\ \frac{T_c}{T_c - t} = \frac{i_2}{S_e}\ \frac{1}{1 - \dfrac{t}{T_c}}$$

y de [c],

$$\boxed{\Delta_2} = \frac{2\ I_c}{S_e}\left[1 + k_e \frac{t}{T_c}\right] = \boxed{\Delta_0\left(1 + k_e \frac{t}{T_c}\right)}\ (A/\text{mm}^2) \qquad [1.08.03\ d]$$

siendo $\Delta_0 = \dfrac{2\ I_c}{S_e}$ la densidad uniforme que correspondería a un proceso de conmutación lineal, [1.08.02 i]. Luego, como $k_e = \dfrac{e_x}{2\ I_c\ R_e} = \dfrac{-\ L_x \dfrac{di}{dt}}{2\ I_c\ R_e}$ es cons-

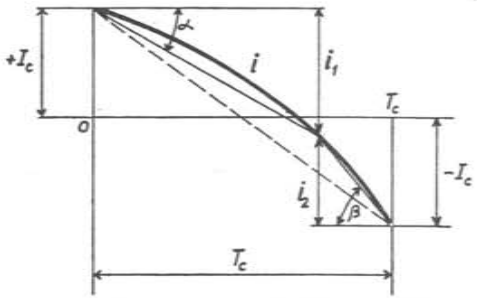


Fig. 1.08.03 a. Conmutación retardada.

tantemente positiva (di_1 negativa) Δ_2 es a su vez en todo momento superior a Δ_0; Δ_2 es también proporcional a tg β. Los puntos de la característica se hallarán en este caso todos por encima de la recta de conmutación lineal (fig. 1.08.03 a). El resultado es lógico si se tiene en cuenta que la f.e.m. de a.i. tiende a oponerse a la variación de corriente en la bobina cortocircuitada manteniendo la intensidad de aquélla continuamente por encima del valor que adoptaría en ausencia de dicha f.e.m.

La autoinducción «retarda», pues, el proceso de conmutación aunque no pueda alterar el momento en que finaliza la misma determinado por las condiciones mecánicas del colector y escobillas.

1.08.04. 3.er Caso. Efecto del campo transversal

Este campo de reacción determina un flujo en la zona de conmutación cuyo sentido *para un generador*, es el mismo del polo *precedente* según la rotación de la armadura. En la fig. 1.08.04 a, por ejemplo, puede verse que las líneas de flujo transversal salen del inducido, como las líneas que corresponden

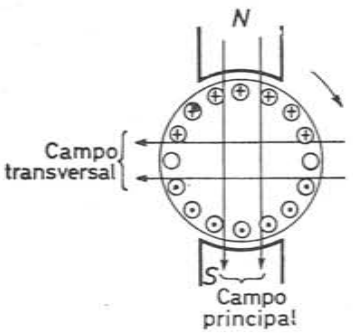


Fig. 1.08.04 a. Sentido del campo de reacción transversal con respecto al campo principal.

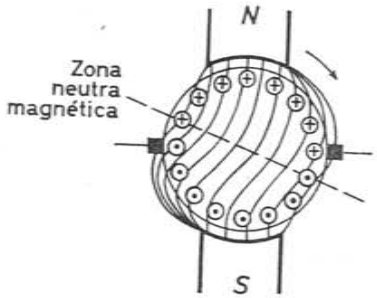


Fig. 1.08.04 b. Campo resultante de un generador teniendo en cuenta la reacción transversal. Las cruces y puntos indican f.e.m.

al polo sur anterior. En un motor los sentidos del campo transversal coinciden con los de los polos siguientes.

La tendencia del campo de reacción es, por tanto, la de mantener el estado previo de la f.e.m. inducida en la bobina oponiéndose a la inversión de la corriente, con lo cual actúa en el mismo sentido que la autoinducción.

A los efectos del análisis matemático todo se desarrolla, en consecuencia, según el caso anterior viniendo aumentada la f.e.m. estática de autoinducción e_x en la magnitud de la f.e.m. dinámica e_t debida al flujo transversal. Las conclusiones serán, por tanto, las mismas con una simple agravación del fenómeno en el momento de producirse la chispa de ruptura.

En su aspecto físico, el hecho se presenta como efecto de la desviación de la línea neutra por causa de la reacción transversal, desviación que se inclina en el sentido de giro de la armadura, si se trata de un generador y a la inversa para un motor prolongando así la acción del polo precedente con respecto a la intensidad (fig. 1.08.04 b).

1.08.05. 4.° Caso. Conmutación forzada

Si se decalan las escobillas en un ángulo mayor que el de la desviación experimentada por la línea neutra debida a la reacción transversal, las bobinas que conmutan lo harán en una zona de campo susceptible de inducir en ellas una f.e.m. dinámica de sentido opuesto a la que procede del campo transversal y a la de autoinducción propia de la bobina, forzando así la inversión de corriente. La ecuación del circuito, pasa a ser

$$iR_B + i_2\,(R_a + r_2) - i_1\,(R_a + r_1) = e_x + e_t + e_c$$

e_c designa la f.e.m. dinámica debida al campo de conmutación alcanzado gracias al decalaje apropiado de las escobillas; es de sentido contrario a e_x y a e_t y la suma algebraica $e_c + e_x + e_t = e_r$ puede llegar a ser de signo opuesto al de e_x y de magnitud apreciable. Simplificando la ecuación anterior al considerar despreciables, como antes lo hicimos, las resistencias metálicas R_B y R_a, plantearemos esta nueva ecuación idéntica a la que últimamente utilizamos sin más que sustituir $e_r = e_x + e_t + e_c$ en lugar de e_x, es decir,

$$i_2\,r_2 - i_1\,r_1 = e_r$$

y si hacemos ahora, similarmente,

$$\boxed{k_c = \frac{e_r}{2\,I_c\,R_e}} \qquad [1.08.05\text{ a}]$$

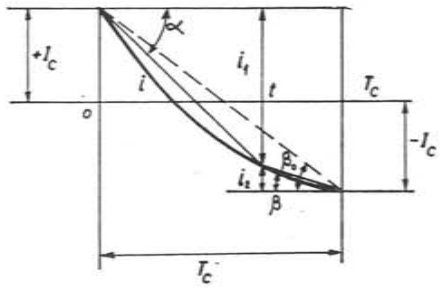


Fig. 1.08.05 a. Conmutación forzada.

hallaremos nuevamente para la densidad en la superficie de contacto posterior

$$\boxed{\Delta_2 = \Delta_0\left(1 + k_c \frac{t}{T_c}\right)} \quad (\text{A/mm}^2) \qquad [1.08.05\ b]$$

Esta ecuación, si e_r llega a hacerse permanentemente de signo opuesto al de $e_x + e_t$ y por tanto k_c negativa, nos muestra que la densidad Δ_2 en el contacto de salida será en todo momento inferior a la densidad lineal $\Delta_0 = \frac{2 I_c}{S_e}$.

La curva de conmutación efectiva queda entonces por bajo de la recta de conmutación rectilínea (tg $\beta <$ tg β_0) según muestra la fig. 1.08.05 a.

También esta consecuencia es lógica si se tiene en cuenta que al introducir la f.e.m. de conmutación e_c contraria a $(e_x + e_t)$ y superior a ésta suma, se acelera el proceso de inversión de la corriente en la bobina cortocircuitada.

1.08.06 **Condiciones óptimas de conmutación**

La conmutación puede considerarse perfecta sin posibilidad de que aparezca chispa alguna de ruptura al final de la misma, si la densidad de corriente en el contacto de salida 2 es nula en el momento de producirse la interrupción del circuito, es decir, al final del período T_c.

Para $t = T_c$ la expresión [1.08.05 b] nos da

$$\Delta_2 = \Delta_0(1 + k_c)$$

e igualando a cero,

$$k_c = -1 \ ; \ \frac{e_r}{2 I_c R_e} = -1$$

o en definitiva, la conmutación óptima se obtiene con una f.e.m. resultante, de sentido opuesto a la autoinductiva y de valor

$$\boxed{e_r = (2 I_c) R_e = u_e \text{ (por carbón)}} \qquad [1.08.06\ a]$$

La f.e.m. resultante, negativa, (es decir, opuesta a la de a.i.) *ha de ser igual a la caída media por resistencia en la superficie de contacto.*

Se comprende que esta condición sea difícil de conseguir en todo momento con cualquier carga si e_c procede del campo resultante ya que al aumentar la corriente del inducido la f.e.m. de autoinducción e_x aumenta y la debida al campo principal en la zona de conmutación e_c disminuye, debilitada por los efectos de la reacción transversal. Todo lo más a que puede aspirarse es a conseguir el buen resultado en el instante final con una carga determinada,

quedando sobreconmutada la máquina para cargas inferiores (con posibilidad de recalentamiento en el borde de la delga de entrada), y subconmutada a cargas más elevadas (chispas en el borde de salida).

El uso de los polos auxiliares, recorridos por la corriente de carga en serie con el inducido tiende a paliar estas dificultades. El campo de conmutación creado por los mismos es constante para una carga determinada, y aumenta con la carga contrarrestando automáticamente el aumento similar de la f.e.m. de autoinducción a la vez que hace innecesario el decalaje de las escobillas, anulándose de paso la reacción antagónica a la vez que se compensa el campo transversal en la zona de conmutación.

Si además el circuito magnético de los polos auxiliares no está saturado (necesidad de fuertes entrehierros y bajas inducciones en dichos polos), la f.e.m. dinámica de conmutación inducida por ellos crecerá proporcionalmente con la corriente de carga, como crece también la f.e.m. de *a.i.* media e_x

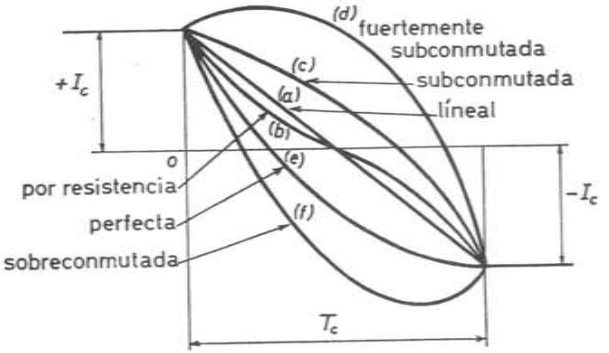


Fig. 1.08.06 a. Diversos tipos de conmutación.

La fig. 1.08.06 a resume gráficamente los diversos procesos de conmutación más característicos:

a) corresponde al caso de una conmutación lineal
b) corresponde al caso de una conmutación simétrica, sin f.e.m. alguna en la bobina que conmuta (conmutación por resistencia)
c) corresponde al caso de una conmutación, presentes la f.e.m. de a.i. y la componente debida al flujo transversal.
d) equivale al caso anterior pero con dichas f.e.m. excesivamente altas.
e) representa el proceso de conmutación ideal con densidad de corriente nula al final del período de corto circuito (tangente horizontal para $t = T_c$)
f) muestra la característica de inversión de la corriente en el caso de una máquina sobreconmutada.

1.08.07. Cálculo de la f.e.m. media de autoinducción

Consideremos por ahora la máquina con una sola bobina por ranura, paso diametral y grueso de escobillas, referido al diámetro del entrehierro, igual al paso de ranuras de tal modo que se halle en conmutación sucesivamente una sola bobina por escobilla. La f.e.m. instantánea de a.i. e en V con L_x en H, i en A y t en segundos, viene dada numéricamente por

$$e = L_x \frac{di}{dt} \text{ (V)}$$

La ecuación exacta de i y por tanto de e es difícil de hallar e insegura porque su planteamiento matemático exige la aceptación de varias hipótesis no siempre confirmadas por la experiencia. En cambio, la f.e.m. media de a.i. e_x es fácil de calcular puesto que, cualquiera que sea el curso temporal de la corriente en la bobina que conmuta los valores inicial y final han de dar necesariamente $+I_c$ y $-I_c$.

Así, con L_x en H; I_c en A y una duración T_c (s) del corto circuito

$$e_x = L_x \frac{2 I_c}{T_c} \qquad [1.08.07 \text{ a}]$$

En el supuesto de un arco de escobilla b_e (cm) igual al paso de delgas τ_K, si referimos ambos al diámetro del entrehierro se tiene, evidentemente, designado por b'_e el valor referido y por v la velocidad tangencial del inducido en cm/s

$$b'_e = v\ T_c \text{ (cm)} \qquad [1.08.07 \text{ b}]$$

Por otra parte, el c.d.a.i. L_x viene dado, siendo N_B el número de espiras por bobina, y $\Lambda_x \left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right)$ la permeancia del circuito magnético de dispersión de la misma, por, [1.05.04 c],

$$L_x = 4\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_B^2\ \Lambda_x \quad \text{(H)}$$

$$= 4\pi \cdot 10^{-9}\ N_B^2\ (L\ \lambda_x) \quad \text{(H)} \qquad [1.08.07 \text{ c}]$$

$\lambda_x \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$ es la permeancia específica de la bobina referida a la unidad de longitud total L (cm) del inducido, contando con que dicha bobina sólo tiene un lado en cada capa de modo que, en conjunto, equivale a los dos que entran por ranura.

Sustituyamos en (a) las expresiones (b) y (c) y observemos a la vez que

con una sola sección por ranura, $2\ N_B$ es el número de conductores de la máquina por ranura; $2\ N_B\ I_c$ el de amperios conductores también por ranura, y b'_e (arco de escobillas igual al paso de delgas referido al entrehierro), igual al paso de ranuras τ_δ, de tal modo que

$$\frac{2\ N_B\ I_c}{b'_e} = q \quad \text{(Ac/cm)}$$

nos da precisamente la carga lineal de la máquina. Se llega entonces previo cambio de ciertas unidades a la siguiente expresión para el valor medio de la f.e.m. de a.i. (1)

$$\boxed{e_x = N_B\ L \left(\frac{q}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right)\zeta} \text{ (V)} \qquad [1.08.07 \text{ e}]$$

L en metros
q en amperios conductores por cm
v en m/s
ζ es el llamado «coeficiente de PICHELMACHER» que engloba el efecto de la reactancia de dispersión

$$\boxed{\zeta = \frac{8\pi}{10}\lambda_x} \qquad [1.08.07 \text{ f}]$$

$\left(\lambda_x \text{ en } \frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$

calculable fácilmente, en función de λ_x en el caso supuesto de contar con una sola bobina por ranura, de paso diametral en dos capas.

Como expresión práctica de ζ puede tomarse, para ranuras abiertas, cosa general en las máquinas de corriente continua,

---

(1) Con L_x en H, I_c en A y T en s

$$e_x = L_x \frac{2 I_c}{T} \text{ (V)}$$

Poniendo las permeancias Λ_x y λ_x en unidades CGS $\left(\frac{\text{M}}{\text{Gb}}\right.$ y $\left.\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right.$ respectivamente$\Big)$ v en cm/s con L en cm

$$e_x = (4\pi \cdot 10^{-9}\ N_B^2\ \Lambda_x)\ \frac{2 I_c}{\left(\frac{b'_e}{v}\right)} = 4\ \pi \cdot 10^{-9} \cdot N_B\ (L\ \lambda_x)\ \frac{2\ N_B\ I_c}{b'_e}\ v$$

$$= 8\ \pi \cdot 10^{-9}\ N_B\ L\ \lambda_x\ q\ v = 10^{-8}\ \xi\ N_B\ L\ q\ v \quad \text{(V)} \qquad [1.08.07 \text{ d}]$$

donde $\zeta = \frac{8\pi}{10}\lambda_x$; expresando ahora L en m y v en m/s

$$e_x\ N_B\ L \left(\frac{q}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right)\xi \quad \text{(V)}$$

$$\zeta = 1{,}2\,\frac{h_t}{a} + 2\left(\frac{l_m}{L} - 1\right) + \frac{50}{\left(\frac{q}{100}\right) L\, N_B\, v} \qquad [1.08.07\ g]$$

h_t = profundidad de la ranura en cm
a = anchura de la misma en cm
l_m = longitud media por conductor en m
L = longitud del inducido en m
q = carga lineal en Ac/cm
N_B = número de espiras por bobina (por sección del devanado)
v = velocidad periférica del inducido en m/s

ζ suele oscilar entre 6 y 12; aumenta con la profundidad de las ranuras y el desarrollo de las cabezas de bobina y es menor para las máquinas más rápidas. El valor intermedio $\zeta = 10$ suele proporcionar resultados bastante aproximados en máquinas normales. Para no elevar el valor de ζ, las ranuras de estas máquinas se hacen siempre abiertas.

1.08.08. Caso de varias bobinas por ranura

Si en lugar de una sola bobina en dos capas por ranura hubiera varias, u, dentro de la misma ranura como es lo corriente, la f.m.m. y el flujo de auto inducción se multiplicarían por u pero al mismo tiempo el período de conmutación T_c del grupo u de bobinas aumentaría en la misma relación u de modo que la f.e.m. de reactancia e_x apenas si sufre variación.

El acortamiento del paso y, sobre todo, el escalonamiento del mismo, ejercen, en cambio, un efecto sensible sobre la f.e.m. e_x al disminuir la f.m.m. autoinductiva por ranura evitando la conmutación simultánea de todas las bobinas alojadas en cada una de ellas. De aquí la ventaja de los arrollamientos escalonados o simplemente acortados en un paso de ranura, tan frecuentes, por ello, en las máquinas de corriente continua.

El cómputo exacto de la f.e.m. e_x es, sin embargo, bastante complicado en estos casos y la manera práctica de tener en cuenta el efecto del acortamiento o del escalonado consiste en tomar los valores más reducidos, 6 a 8 para el coeficiente de PICHELMACHER.

Nótese que el cálculo de $\zeta = \frac{8\pi}{10}\lambda_x$ se reduce al de la permeancia específica $\lambda_x \left(\frac{\text{M/Gb}}{\text{cm}}\right)$ referida a la longitud L del inducido y no se diferencia prácticamente del cálculo similar para las máquinas de corriente alterna expuesto en el capítulo VI.

Sin embargo, no se acostumbra efectuar tales cálculos, tomándose para ζ las cifras antes dadas, o bien se recurre a la fórmula semiempírica [1.08.07 g].

1.08.09. Cálculo de la f.e.m. de conmutación. Máquinas sin polos auxiliares

Hemos visto que las condiciones óptimas (densidad de corriente nula en el contacto de ruptura) se obtienen cuando, [1.08.06 a],

$$e_r = u_e \text{ (por carbón)}.$$

siendo u_e la caída de tensión por escobilla con la corriente $2I_c$. A su vez, expresando la f.e.m. de a.i. e_x, la debida al flujo transversal e_t y la adicional de conmutación e_c en valores medios, la condición se transforma en

$$e_r = e_c - (e_x + e_t) = u_e$$

o sea, que en condiciones óptimas

$$e_c = (e_x + e_t) + u_e$$

la f.e.m. de conmutación debe igualar a la suma de la de reactancia y la del flujo transversal, más la c.d.t. por escobilla.

Acabamos de ver, [1.08.07 e], que

$$e_x = N_B\, L \left(\frac{q}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right)\zeta \qquad \text{(V)}$$

Cuanto a u_e, viene a ser constante a partir de un cierto valor de la densidad de corriente en la superficie de contacto, y su magnitud es del orden de 1 V/carbón (véase tabla 1.01.18 b). Por lo que se refiere a e_c, no resulta fácil de calcular. Si la máquina no lleva polos auxiliares y se genera e_c acudiendo a desviar las escobillas, es necesario que el campo en la zona de conmutación se mantenga, pese a la distorsión (causa de e_t) por encima de un valor $B_{\delta a}$ suficiente para engendrar en la bobina la f.e.m.

$$e_c = e_x + u_e$$

El efecto de e_t ya se tiene así en cuenta al referirnos a esta distorsión que actúa disminuyendo el valor de B y con ella el de e_c en la zona útil para conmutar. A fin de que la inducción no se anule o resulte demasiado baja, se impone el que los amperios vueltas de excitación principal por polo superen ampliamente a los de reacción transversal en los picos polares; como mínimo conviene, en máquinas sin polos auxiliares, que, (fig. 1.08.09 a),

$$\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d \geqslant 1{,}7\left(\frac{q\, b_p}{2}\right)$$

y si admitimos $b_p \approx 0{,}7\ \tau_p$, se tendrá,

$$\boxed{\hat{\theta}_s + \hat{\theta}_d = 0{,}6\ (q\ \tau_p)} \qquad \text{(Av/polo)} \qquad [1.08.09\ a]$$

fórmula que sirve de base, como veremos, para determinar la magnitud del entrehierro en las máquinas sin polos auxiliares.

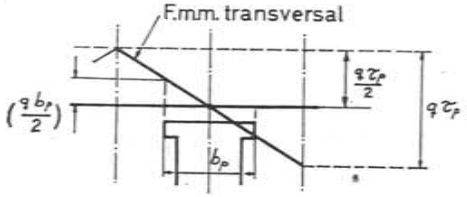


Fig. 1.08.09 a. Valor conveniente de la excitación para el entrehierro y dientes en máquinas sin p.d.c.

Asegurado así el campo de conmutación, veamos qué valor cabe admitir para la f.e.m. de *a.i.* en la bobina.

Según la teoría expuesta, la conmutación óptima puede lograrse cualquiera que sea el valor de e_x con tal de que, *a pesar de la distorsión*, se disponga de una f.e.m. de conmutación igual a

$$\boxed{e_c = e_x + u_e} \qquad [1.08.09\ b]$$

Pero si esta condición se obtiene a P.C., durante la marcha en vacío, con e_x y u_e nulas, la f.e.m. e_c será excesiva y la máquina se encontraría sobreconmutada apareciendo quizás chispas en el borde de entrada de las escobillas.

La práctica aconseja adoptar un valor de e_x *a* P.C., *no superior al doble de la caída de tensión por escobilla* u_e, es decir, igual a la caída por par de carbones (del orden de 2V) y ajustar el decalaje para que la sobreconmutación en vacío llegue, justamente, a iniciar la formación de chipas. Admitiendo que la corriente circulatoria en tales condiciones mantenga la caída normal u_e en el contacto de las escobillas de tal modo que incluso con la corriente de

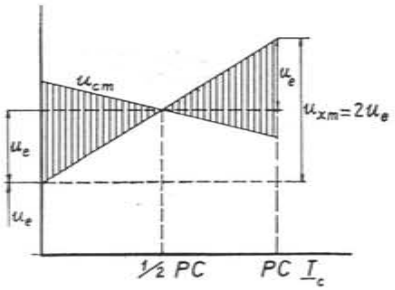


Fig. 1.08.09 b. Variación de las tensiones en el circuito de conmutación de una máquina shunt sin polos auxiliares.

carga cero se disponga de la caída en cuestión (fig. 1.08.09 b) tendremos como línea de $(e_x + u_e)$ la recta ascendente que marca dicha figura.

En una máquina shunt la distorsión se acusa mucho con la carga y la inducción B disponible para la f.e.m. de conmutación e_c así como esta fuerza electromotriz, descienden apreciablemente al aumentar I. Si suponemos que la conmutación resulte perfecta a 1/2 de P.C. el área rayada, simétrica, muestra la zona de f.e.m. no compensada. A P.C. se tendrían unas condiciones de conmutación semejantes a las de vacío aunque éstas por exceso y aquéllas por defecto de la f.e.m. e_c.

El comportamiento es más favorable en las máquinas compound y aún lo es más en las de característica hipercompound para las cuales la recta e_c tiende a hacerse horizontal o incluso a cambiar el sentido de su inclinación reduciéndose las amplitudes de la superficie rayada. En principio, pues, y para máquinas sin polos auxiliares, se admite como satisfactoria la condición, [1.08.07 e],

$$\boxed{e_x = N_B\ L \left(\frac{q}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right)\zeta \leq 2\ \text{V}} \qquad [1.08.09\ c]$$

junto con la [*a*] ya expuesta que garantiza la posibilidad de crear por decalaje de las escobillas una f.e.m. e_c suficiente.

1.08.10. **Máquinas con polos auxiliares**

Si la máquina va provista de polos auxiliares cabe llegar con e_x hasta unos 6 V a P.C. La conmutación puede ser perfecta a cualquier carga inferior o incluso con sobrecarga especialmente si el circuito magnético de dichos polos se conserva alejado de toda saturación para mantener la proporcionalidad entre e_c y la corriente de carga. Como f.e.m. e_c a inducir en la bobina por dichos polos auxiliares, seguirá valiendo la expresión [1.08.09 b].

$$e_c = e_x + u_e$$

ahora porque la distorsión y con ella e_t resultan despreciables en la zona interpolar.

El cálculo suele efectuarse prescindiendo de u_e, esto es, anulando por completo la f.e.m. de reactancia mediante el flujo de los polos auxiliares.

$$\boxed{e_c = e_x} \qquad [1.08.10\ a]$$

lo cual no empeora practicamente las condiciones de funcionamiento. De

aquí se deduce la inducción media $B_{\delta a}$ que dichos polos han de crear en el entrehierro, como sigue:

El valor de la f.e.m. media dinámica e_c inducida por $B_{\delta a}$ en la bobina que conmuta viene dado ahora, con $B_{\delta a}$ inducción teórica en G; L_{pa} longitud del polo auxiliar en el entrehierro en cm y v en cm/s, por

$$e_c = N_B \; B_{\delta a} \; 2 \, L_{pa} \, v \; 10^{-8} \qquad \text{(V/bobina)}$$

igualando esta expresión con la de $e_x = N_B \, q \, L \, v \, \zeta \cdot 10^{-8}$ (V/bobina) en las mismas unidades, [1.08.07 d], resulta

$$\boxed{B_{\delta a} = \frac{L}{L_{pa}} \frac{\zeta}{2} \, q} \quad \text{(G)} \qquad [1.08.10 \text{ b}]$$

Como L y L_{pa} son aproximadamente iguales y ζ vale alrededor de 10, la inducción en el entrehierro de los polos auxiliares ha de ser aproximadamente

$$B_{\delta a} \approx 5 \; q \qquad \text{(G)} \qquad [1.08.10 \text{ c}]$$

(q, en Ac/cm)

1.08.11. Excitación de los polos auxiliares

A base de $B_{\delta a}$ se calculan los amperios vueltas necesarios para mantener el flujo propuesto siguiendo, como base, el mismo método que para los polos principales pero teniendo en cuenta que el coeficiente de dispersión polar es aquí mucho más elevado (flujo en los polos y en el yugo = 2 a 4 veces el flujo en el entrehierro); las secciones de hierro se harán bastante amplias para evitar toda saturación y sobre los Av resultantes se aplicará un coeficiente de aumento del 15 al 20 % a fin de permitir el ajuste ulterior del entrehierro o de los shunts inductivos (rara vez) al probar la máquina en la plataforma de ensayos.

Se opera con suficiente aproximación introduciendo en el cálculo de la f.m.m. para el circuito magnético de los polos auxiliares la fracción del mismo constituida únicamente por el entrehierro δ_a aumentada en un 25 % y tomando para este entrehierro un valor de 20 a 100 % superior al de los polos principales, siempre con vistas a evitar la inflexión de la curva de f.e.m. e_c y disminuir al mismo tiempo la oscilación de flujo por el paso alternativo de ranuras y dientes ante la superficie de los polos de conmutación.

No basta, sin embargo, disponer en cada polo auxiliar la excitación necesaria para vencer la reluctancia del circuito magnético ya que antes de crear el flujo de conmutación ha de compensarse la f.m.m. transversal opuesta en cuyo eje se hallan situados dichos polos.

En vista de todas estas consideraciones, el proceso a seguir para calcular los amperios vueltas de excitación por polo auxiliar será el siguiente:

La excitación necesaria para vencer la f.m.m. opuesta transversal asciende a, [1.07.04 a],

$$\hat{\mathcal{E}}_t = \frac{q \, \tau_p}{2} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.08.11 \text{ a}]$$

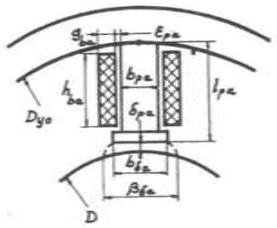


Fig. 1.08.11 a. Polo auxiliar o de conmutación.

q, Ac/cm a P.C.

τ_p, paso polar en cm

La inducción que hay que crear en el entrehierro para inducir la f.e.m. e_c vale, [1.08.10 b]

$$B_{\delta a} = \frac{L}{L_{pa}} \frac{\zeta}{2} \, q. \quad \text{(G)}$$

ζ coeficiente de PICHELMACHER (6 a 12); las cifras más bajas para los arrollamientos de paso acortado, inducidos cortos, cabezas de bobinas reducidas y ranuras poco profundas.

Fijado el entrehierro δ_a, (1,2 a 2 δ) cm, la excitación para el mismo habrá de ser

$$\theta_{\delta a} = 0{,}8 \; (K_{La} \, K_{Ca} \; B_{\delta a}) \delta_a \qquad \text{(Av/polo)}.$$

K_{Ca} coeficiente de CARTER para dicho entrehierro, [1.04.10 a o b]

K_{La} coeficiente de corrección axial, [1.04.09 c y a]

$$K_{La} = \frac{L_{pa}}{L_{\delta a}}; \quad L_{\delta a} = L_{pa} - n_c \; \varepsilon_{\delta a}; \quad \varepsilon_{\delta a} \text{ según fig. 1.04.09 b y c} \qquad [1.08.11 \text{ b}]$$

$$K_{Ca} = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta - \dfrac{\left(\dfrac{a_\delta}{\delta_a}\right)^2}{5 + \dfrac{a_\delta}{\delta_a}} \delta_a} \quad \text{o} \quad K_{Ca} = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta + \delta_a - \dfrac{3}{4} a_\delta} \qquad [1.08.11 \text{ c}]$$

o bien por la fig. 1.04.10 b en función de $\dfrac{a_\delta}{\tau_\delta}$ y $\dfrac{\delta_a}{a_\delta}$.

Si añadimos a estos amperios vueltas un 25 % destinado a vencer la reluctancia del hierro, deberemos tomar para el circuito magnético

$$\boxed{\theta_{pa} = K_{La} \, K_{Ca} \, B_{\delta a} \, \delta_a \quad \text{Av/polo}} \qquad [1.08.11 \text{ d}]$$

y en total, pues, reacción transversal y reluctancia del circuito magnético incluidas,

$$\theta_{ba} = \hat{\mathcal{E}}_t + \theta_{\delta a} = \frac{q\tau_p}{2} + K_{La}\, K_{Ca}\, B_{\delta a}\, \delta_a \quad \text{(Av/polo auxiliar)} \qquad [1.08.11\ e]$$

($B_{\delta a}$ en G, δ_a en cm, τ_p en cm, q en Ac/cm)

Para máquinas con arrollamiento compensador, ver [1.08.15 c]

Disponiendo una o más vías en paralelo, la corriente de carga pasará íntegra o se dividirá entre las varias vías resultando una intensidad por polo auxiliar I_{ba}

El número de espiras a prever será, pues,

$$N_{ba} = \frac{\theta_{ba}}{I_{ba}} \text{ (espiras/polo auxiliar)} \qquad [1.08.11\ f]$$

La sección del conductor vendrá fijada por la densidad de corriente admisible Δ_a (A/mm²) y ésta a su vez depende de las condiciones de ventilación según estudiaremos oportunamente

$$s_a = \frac{I_{ba}}{\Delta_a} \text{ (mm}^2\text{)} \qquad [1.08.11\ g]$$

Anticipemos que Δ_a suele oscilar entre 1,5 y 3,5 A/mm².

1.08.12. Desarrollo de la zona de conmutación

La dimensión más característica del polo auxiliar es la longitud del arco b_{pa} cubierto por la superficie polar en la medida justa para que la inducción $B_{\delta a}$ del entrehierro alcance a toda la zona de conmutación.

Debe empezarse, pues, por conocer la extensión de esta zona, cuya magnitud depende del tipo de arrollamiento inducido y, si ha lugar, del acortamiento del paso de bobinas. Puede definirse como el arco recorrido por cualquier punto de la periferia del inducido desde el instante en que se inicie el corto circuito en la primera de las varias bobinas alojadas en una ranura hasta que la última de dichas bobinas termine su período de corto circuito o de conmutación.

En los devanados imbricados de paso diametral la longitud de dicha zona viene dada por

$$z_a = [b_e + (u - 1)\ \tau_K] \frac{D}{D_K} \text{ (cm)} \qquad [1.08.12\ a]$$

b_e = anchura tangencial de una escobilla en cm. Esta anchura es también el recorrido de la periferia del colector mientras la primera bobina de la ranura que entra en conmutación permanece en corto circuito.

u = número de lados de bobina de una capa o secciones, por ranura. Así $(u - 1)$ es el número de bobinas de la misma ranura que siguen a la primera en el proceso de conmutación.

τ_K = paso de delgas en cm; $(u - 1)\tau_K$ es el recorrido periférico del colector desde que la primera bobina citada sale de debajo de la escobilla hasta que lo efectúa la última.

Por tanto, $b_e + (u - 1)\tau_K$ representa el arco recorrido sobre la circunferencia del colector mientras dura la conmutación de las u bobinas de una ranura. Al multiplicar este arco por la relación $\frac{D}{D_K}$ siendo

D = diámetro del inducido en cm y

D_K = diámetro del colector en cm

no se hace más que referir a la circunferencia del inducido el arco mencionado, es decir, calcular la extensión que alcanza en el entrehierro la zona de conmutación.

Si el devanado es serie, o en general de cualquier tipo, con p pares de polos y a pares de vías, acortado o no, la fórmula [a] se transforma en esta otra, válida para todos los casos

$$z_a = \left[b_e + \left(u - \frac{a}{p}\right)\tau_K\right]\frac{D_K}{D} + (n_p - y_n)\,\tau_\delta \text{ (cm)} \qquad [1.08.12\ b]$$

n_p = número de ranuras por polo $= \frac{n}{2p}$; n = número total de ranuras

y_n = paso de bobinas medido en ranuras; $(n_p - y_n)$ es, pues, el acortamiento de paso (entero o fraccionario) medido también en ranuras.

τ_δ = paso de ranuras en el entrehierro en cm $= \frac{\pi D}{n}$. El término $(n_p - y_n)\ \tau_\delta$ representa el mismo acortamiento, pero medido en cm sobre la periferia del inducido.

Teniendo en cuenta el ensanchamiento del campo al salir de las expansiones polares, el arco de la pieza polar b_{pa} deberá ser menor que z_a pudiendo adoptarse

$$b_{pa} \approx z_a - 2\ \delta_a \qquad [1.08.12\ c]$$

Conviene retocar b_{pa} y δ_a de modo que el arco efectivo

$$\beta_{pa} = b_{pa} + 2\delta_a \qquad [1.08.12\ d]$$

sea igual a un número entero de pasos de ranura, a fin de evitar fuertes pulsaciones de flujo.

Como expresión general de u se tiene designando por K el número de delgas,

$$u = \frac{K}{n} \qquad [1.08.12\ e]$$

1.08.13. Dimensiones del núcleo de los polos auxiliares

Con frecuencia se elige la longitud L_{pa} de los polos auxiliares igual a la de los polos principales L_p aunque ello no sea indispensable. A veces se reduce el número de aquéllos a la mitad debiendo tomarse entonces un valor doble para la inducción $B_{\delta a}$ en el entrehierro de los que restan.

En general, pues,

$$L_{pa} \leqslant L_p$$

Además

$$L_{na} \leqslant L_{pa} \qquad [1.08.13\ a]$$

(La longitud del núcleo polar auxiliar L_{na} suele ser también distinta a la de la expansión L_{pa} a menos que, cosa por otra parte muy frecuente, el polo de conmutación se haga de plancha).

La anchura del polo auxiliar se deduce de la inducción B_{na} admitida en el núcleo y del flujo Φ_{na} en dicho polo, previo hallar su sección S_{pa}

$$S_{na} = \frac{\Phi_{na}}{B_{na}} \quad (\text{cm}^2) \qquad [1.08.13\ b]$$

$$b_{na} = \frac{S_{na}}{k_{Fe}\ L_{na}} \quad (\text{cm}^2) \qquad [1.08.13\ c]$$

S_{na} es la sección de un polo ($S_{na} = k_{Fe}\ L_{na}\ b_{na}$) con un coeficiente de aislamiento de la plancha $k_{Fe} \approx 0{,}95$ ya que no conviene hacerlos macizos a fin de evitar que las corrientes de FOUCAULT retarden la acomodación del flujo auxiliar a las variaciones rápidas de carga. Cuanto al flujo por polo Φ_{na}, se obtiene multiplicando el flujo del entrehierro

$$\Phi_{\delta a} = B_{\delta a}\ b_{pa}\ L_{pa}\ (\text{M}) \qquad [1.08.13\ d]$$

($B_{\delta a}$ en G, b_{pa} en cm, L_{pa} en cm)

por el coeficiente de dispersión para dichos polos σ_{pa}; L_{pa} es la longitud correspondiente de la expansión polar de conmutación y b_{pa} el arco polar respectivo

$$\Phi_{pa} = \sigma_{pa}\ \Phi_{\delta a} \quad (\text{M}) \qquad [1.08.13\ e]$$

Aunque σ_{pa} puede ser calculado siguiendo un proceso análogo al aplicado para los polos principales (párr. 1.04.24), no es preciso alargar más los cálculos dado el margen de seguridad que hay que tomar después. Basta adoptar $\sigma_p \approx 2 \ldots 5$ y fijar por último una inducción B_{na} muy alejada de la saturación, entre 5 y 10 kG.

1.08.14. Ejemplo

Calcular los polos auxiliares para la dinamo de $P = 345$ kW, $U = 500$ V, $I = 690$ A, $N = 985$ r/m, $2p = 6$ polos del ejemplo 1.04.29 cuyos datos son los siguientes:

Diámetro del inducido $D = 60$ cm. Longitud $L = 36$ cm. Canales de ventilación radial $n_c = 4$ de $\varepsilon_c = 1$ cm. Entrehierro principal $\delta = 0{,}55$ cm. Arrollamiento imbricado simple de $2a = 2p = 6$ vías con $n = 75$ ranuras, $Z_n = 8$ conductores por ranuras, $K = 300$ delgas; paso de bobinas 12 ranuras ($1 - 13$). Diámetro del colector $D_K = 45$ cm. Grueso tangencial de escobillas $b_e = 1{,}6$ cm. Ranuras abiertas de ancho $a = 12$ mm y profundidad $h_t = 35$ mm. Longitud media de un conductor $l = 0{,}80$ m.

La f.e.m. de autoinducción está dada por [1.08.07 e],

$$e_z = N_B\ L \left(\frac{q}{100}\right)\left(\frac{v}{100}\right) \xi \ (\text{V})$$

El número de secciones del bobinado es igual al de delgas $K = 300$; el de conductores por sección

$$\frac{n\,Z_n}{K} = \frac{75 \cdot 8}{300} = 2$$

y el de espiras por sección o bobina, la mitad;

$$N_B = \frac{1}{2}\,2 = 1 \text{ espira/sección}$$

La carga lineal especifica

$$q = \frac{n\,Z_n}{\pi\,D} \cdot \frac{I}{2a} = \frac{75 \cdot 8}{\pi \cdot 60} \cdot \frac{690}{6} = 366 \text{ Ac/cm}$$

La velocidad periférica de inducido

$$v = \frac{\pi\,D\,N}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}60 \cdot 985}{60} = 31 \text{ m/s.}$$

El coeficiente de PICHELMACHER, [1.08.07 g],

$$\xi = 1{,}2\,\frac{h_t}{a} + 2\left(\frac{l_m}{L} - 1\right) + \frac{50}{\left(\frac{q}{100}\right) L N_B\, v} =$$

$$= 1{,}2\,\frac{35}{12} + 2\left(\frac{0{,}8}{0{,}36} - 1\right) + \frac{50}{3{,}66 \cdot 0{,}36 \cdot 1 \cdot 31} = 7{,}165 \approx 7{,}2,$$

de donde

$$e_z = 1 \cdot 0{,}36 \cdot 3{,}66 \cdot 0{,}31 \cdot 7{,}2 = 2{,}94 \text{ V.}$$

inferior a los 6 V que, en general, pueden tomarse como máximo admisible para máquinas con polos auxiliares.

La f.m.m. de reacción transversal a compensar por la excitación de los polos auxiliares es, [1.08.11 a].

$$\hat{\mathcal{E}}_i = \frac{q\,\tau_p}{2};$$

con

$$\tau_p = \frac{\pi D}{2p} = \frac{\pi \cdot 60}{6} = 31{,}4 \text{ cm},$$

$$\hat{\mathcal{E}}_i = \frac{366 \cdot 31{,}4}{2} = 5750 \text{ Av}$$

Se adopta una longitud de polo auxiliar en el entrehierro L_{pa} dos cm más corta que la del inducido L. Así, $L_{pa} = 34$ cm.

La inducción necesaria para la conmutación asciende a, [1.08.10 b],

$$B_{\delta a} = \frac{L}{L_{pa}} \frac{\xi}{2} q = \frac{36}{34} \frac{7{,}2}{2} 366 = 1\,400 \text{ G}$$

El entrehierro de los polos de conmutación lo haremos bastante fuerte para evitar a toda costa la saturación de su circuito magnético dado que se trata de una máquina sometida a bruscas sobrecargas. Tomamos en total 12 mm, algo más del doble del entrehierro principal (5,5 mm) colocando, sin embargo, parte de él, 4 mm, en la raíz del polo junto al yugo para lo cual intercalaremos entre ambos una chapa de latón de dicho grueso, que nos servirá a la vez como pieza de ajuste intercambiable por chapas de hierro en el caso de que las pruebas aconsejen variar el flujo de conmutación previsto.

Así, a los efectos del coeficiente de CARTER, $\delta_a = 0{,}8$ cm y, cuanto a la excitación necesaria para vencer la reluctancia del circuito magnético, habrá que contar con el suplemento de 0,4 cm en la base del polo.

Coeficiente de CARTER. Adoptando la fórmula [1.08.11 c],

$$K_{Ca} = \frac{\tau_\delta}{\tau_\delta - \dfrac{\left(\dfrac{a_\delta}{\delta_a}\right)^2}{5 + \left(\dfrac{a_\delta}{\delta_a}\right)} \delta_a};$$

$$\tau_\delta = \frac{\pi D}{n} = \frac{\pi \cdot 60}{75} = 2{,}51 \text{ cm}, \qquad a_\delta = 1{,}2 \text{ cm}, \quad \delta_a = 0{,}8 \text{ cm},$$

$$K_{Ca} = \frac{2{,}51}{2{,}51 - \dfrac{\left(\dfrac{1{,}2}{0{,}8}\right)^2}{5 + \left(\dfrac{0{,}8}{1{,}2}\right)} 0{,}8} = 1{,}125$$

Cuanto a K_{La}, para $\delta_a = 8$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm, $\varepsilon_{\delta a} = 2$ mm, [1.08.11 b] y (figura 1.04.09 b),

$$K_{La} = \frac{L_{pa}}{L_{\delta a}} = \frac{L_{pa}}{L_{pa} - n_c\,\varepsilon_{\delta a}} = \frac{34}{34 - 4 \cdot 0{,}2} = 1{,}025$$

Aplicando de momento la ecuación [1.08.11 d], deberíamos tener una excitación por polo auxiliar para vencer la reluctancia del circuito magnético completo,

$$\theta_{pa} = K_{La}\,K_{Ca}\,B_{\delta a}\,\delta_a = 1{,}025 \cdot 1{,}125 \cdot 1{,}400 \cdot 0{,}8 = 1290 \text{ Av/polo.}$$

y un total [1.08.11 e],

$$\theta_{ba} = \hat{\mathcal{E}}_i + \theta_{pa} = 5750 + 1290 = 7040 \qquad \text{Av/polo.}$$

A esta f.m.m. le sumaremos después la necesaria para vencer la del entrehierro suplementario en la raíz del polo.

Zona de conmutación:

según [1.08.12 b],

$$z_a = \left[b_e + \left(u - \frac{a}{p} \right) \tau_K \right] \frac{D}{D_K} + (n_p - y_n)\tau_\delta \text{ (cm)}$$

Siendo $K = 300$ delgas y $n = 75$ ranuras, el número de secciones por ranura igual al de lados de bobina de una capa vale

$$u = \frac{K}{n} = \frac{300}{75} = 4$$

el de ranuras por polo

$$n_p = \frac{n}{2p} = \frac{75}{6} = 12{,}5$$

y el paso de delgas

$$\tau_K = \frac{\pi D_K}{K} = \frac{\pi \cdot 45}{300} = 0{,}471 \text{ cm}$$

Con $b_e = 1{,}6$ cm, $a = 3$ pares de vías, $p = 3$ pares de polos, $y_n = 12$ ranuras de paso de bobina y $\tau_\delta = 2{,}51$ cm,

$$z_a = \left[1{,}6 + \left(4 - \frac{3}{3} \right) 0{,}471 \right] \frac{60}{45} + (12{,}5 - 12)\ 2{,}51 = 5{,}26 \text{ cm}$$

El arco de un polo auxiliar, [1.08.12 c],

$$b_{pa} \approx z_a - 2\,\delta_a = 5{,}26 - 2 \cdot 0{,}8 = 3{,}66 \text{ cm}$$

La dinamo en cuestión presentaba un arco polar auxiliar de 15 mm y se experimentaron, en efecto, dificultades de conmutación con las variaciones bruscas de carga, traducidas frecuentemente en arcos de fuego, que obligaron a una modificación ulterior de la máquina.

Dado el paso de ranura $\tau_\delta = 2{,}51$ cm, convendría haber dispuesto un arco polar $b_{pa} = 3{,}4$ cm que daría una zona del flujo de conmutación igual poco más o menos a $\beta_{pa} = 3{,}4 + 2 \cdot 0{,}8 = 5$ cm valor muy próximo al de la zona de conmutación (5,26 cm) y al del doble paso exacto de ranura ($2 \cdot 2{,}51 = 5{,}02$ cm), evitándose la fluctuación del flujo.

El flujo $\Phi_{\delta a}$, con el arco debido $b_{pa} = 3{,}4$ cm, resulta, [1.08.13 d],

$$\Phi_{\delta a} = b_{pa}\,L_{pa}\,B_{\delta a} = 3{,}4 \cdot 34 \cdot 1400 = 162000 \text{ M.}$$

Admitiendo un coeficiente de dispersión $\sigma_{pa} = 3$, el flujo por polo, [1.08.13 e],

$$\Phi_{pa} = \sigma_{pa}\,\Phi_{\delta a} = 3 \cdot 162 \cdot 000 = 486000 \text{ M}$$

y si fijamos una inducción de 5 kG, [1.08.13 b],

$$S_{na} = \frac{\Phi_{pa}}{B_{na}} = \frac{714}{5} = 97 \text{ cm}^2$$

de donde, la anchura del núcleo polar construido con plancha de 1 mm ($k_{Fe} = 0{,}95$), [1.08.13 c], adoptando una longitud del núcleo $L_{na} = L_{pa} = 34$ cm.

$$b_{na} = \frac{S_{na}}{k_{Fe} L_{na}} = \frac{97}{0{,}95 \cdot 34} = 3 \text{ cm}.$$

Para calcular la excitación por polo hemos de añadir aún la f.m.m. consumida en el entrehierro de 0,4 cm asignado a la junta con el yugo. La inducción aquí debe tomarse igual a la del núcleo $B_{na} = 5$ kG y los amperios vueltas suplementarios resultan ser

$$0{,}8 \cdot 5000 \cdot 0{,}4 = 1600 \qquad \text{Av/polo}$$

a sumar a los 7040 Av/polo antes hallados. En total,

$$\theta_{ba} = 7040 + 1600 = 8640 \text{ Av/polo} \qquad [1.08.14 \text{ a}]$$

Con todas las bobinas auxiliares en serie, o sea con una sola vía, $I_{ba} = I = 690$ A y el número de espiras por polo, [1.08.11 f],

$$N_{ba} = \frac{\theta_{ba}}{I_{ba}} = \frac{8640}{690} = 12{,}5 \approx 13 \text{ espiras/polo}.$$

La máquina iba dispuesta con 11 espiras/polo lo que explica una vez más la deficiente conmutación aludida.

La f.m.m. sólo alcanza entonces a $690 \times 11 = 7\,600$ Av/polo.

Si tomamos una densidad de corriente $\Delta_a = 3{,}6$ A/mm² satisfactoria para estos polos, muy bien ventilados, necesitaremos una sección, [1.08.11 g],

$$s_a = \frac{I_{ba}}{\Delta_a} = \frac{690}{3{,}6} = 192 \text{ mm}^2.$$

Se puso barra de 32 × 6 mm.

1.08.15. Devanado de compensación

Tiende a evitar la distorsión del flujo en los polos principales provocada por la reacción transversal, y la variación estática de este flujo de reacción en caso de oscilaciones bruscas de la carga alejando con ello el peligro de los aros de fuego. Alojado en ranuras semicerradas, dentro de las expansiones polares, se dispone el devanado de compensación recorrido en serie por la corriente de carga, y constituido generalmente por barras de cobre a razón de una por ranura.

La condición a satisfacer es que la carga lineal específica de este devanado iguale a la del inducido en toda la zona de las piezas polares al objeto de que

la compensación sea exacta y lo más uniforme posible. Designando, pues, por z_{dc} el número de barras compensadoras por polo, igual al de ranuras del mismo género, y por I_{dc} la corriente por barra, que depende del número de vías, una o varias, en que se divide la corriente de carga en dicho arrollamiento; por q Ac/cm la carga lineal del inducido y por $b_p = \psi\tau_p$ cm el arco de un polo, deberá cumplirse

$$z_{dc} I_{dc} = b_p q = \psi \tau_p q \quad \text{(Ac/polo)}$$

de donde

$$\boxed{z_{dc} = \frac{b_p q}{I_{dc}} = \frac{\psi \tau_p q}{I_{dc}}} \quad \text{(cond/polo)} \qquad [1.08.15 \text{ a}]$$

La sección de las barras se deduce de la densidad de corriente admisible Δ_{dc} (A/mm²)

$$s_{dc} = \frac{I_{dc}}{\Delta_{dc}} \text{ (mm}^2\text{)} \qquad [1.08.15 \text{ b}]$$

Δ_{dc} viene a ser del mismo orden que Δ_a la densidad de corriente en los polos auxiliares.

Cuando la máquina lleva devanado de compensación, como éste ya contrarresta en la magnitud ($\psi \tau_p q$) los amperios vueltas de reacción transversal por par de polos, la excitación a proveer en los polos auxiliares debe disminuirse en la misma magnitud. La ecuación [1.08.11 e] se transforma así en

$$\boxed{\theta_{ba} = (1 - \psi) \frac{q \tau_p}{2} + K_{La} K_{Ca} B_{\delta a} \delta_a} \quad \text{(Av/polo aux.)} \qquad [1.08.15 \text{ c}]$$

1.08.16. Ejemplo

Calcular el devanado de compensación y el de los polos auxiliares para la máquina del ejemplo anterior 1.08.14 en el caso de que se decidiera proveerla de dicho arrollamiento suplementario. Hemos visto que $q = 366$ Ac/cm y $\tau_p = 31{,}4$ cm; además, $\psi = \frac{b_p}{\tau_p} = 0{,}62$.

Dispondremos una sola vía de modo que $I_{dc} = I = 690$ A

Según [1.08.15 a],

$$z_{dc} = \frac{\psi \tau_p q}{I_{dc}} = \frac{0{,}62 \cdot 31{,}4 \cdot 366}{690} = 10{,}3 \approx 11 \text{ barras/polo}$$

Tomando $\Delta_{dc} = 3{,}83$ A/mm², [1.08.15 b],

$$s_{dc} = \frac{I_{dc}}{\Delta_{dc}} = \frac{690}{3{,}83} = 180 \text{ mm}^2$$

Se eligió barra de 20 × 9 mm. La f.m.m. por polo auxiliar sin el devanado de compensación ascendía a 8640 Av/polo, [1.08.14 a]. De aquí deberemos restar

$$\frac{\psi \tau_p q}{2} = \frac{0{,}62 \cdot 31{,}4 \cdot 366}{2} = 3570 \quad \text{Av/polo}$$

suministrados ahora por el arrollamiento compensador.

Quedan, pues, para el polo de conmutación

$$\theta_{ba} = 8640 - 3570 = 5070 \quad \text{Av/polo}$$

y

$$N_{ba} = \frac{\theta_{ba}}{I_{ba}} = \frac{5070}{690} = 7{,}4 \approx 8 \text{ espiras por polo}$$

de la misma sección que se previó anteriormente, es decir, 32 × 6 mm, o sea a razón de 3,6 A/mm².

1.09 EL CIRCUITO DE EXCITACIÓN EN CARGA

1.09.01. Máquinas de corriente continua.

La excitación necesaria en carga depende de dos factores: por un lado, de la *f.e.m. interna* ligada a las caídas de tensión de la máquina, en las condiciones previstas lo cual determina el flujo requerido en el circuito magnético principal y por tanto, el número de amperios vueltas de excitación que hay que prever para vencer la reluctancia de este circuito; y, por otro lado, de la *reacción magnética del inducido* cuyo efecto será preciso compensar también mediante la excitación principal a fin de que no quede mermada la f.m.m. necesaria para el circuito magnético.

1.09.02. F.e.m. en carga.

El valor de la f.e.m. interna E que debe generar una dinamo en carga viene dado, en el caso más general por

$$E = U + 2u_e + (u_R + u_s + u_{pa} + u_{dc}) = U + \Sigma RI \quad \text{(V)} \qquad [1.09.02\ a]$$

U = tensión en los bornes, en V
I = corriente de carga, en A
$2u_e$ = caída de tensión por par de escobillas, en V
u_R = caída de tensión en la resistencia R del inducido, en V
u_s = caída de tensión en la resistencia del devanado inductor serie o «compound», en V
u_{pa} = caída de tensión en la resistencia de los polos auxiliares, en V
u_{dc} = caída de tensión en la resistencia del devanado de compensación, en V
ΣRI = suma de las caídas óhmicas internas englobando en ella la de contacto en las escobillas, en V
E = f.e.m. en carga, en V

No todas las máquinas llevan las diversas clases de arrollamientos en serie enumerados anteriormente. Si falta el devanado de compensación, los

polos auxiliares o el devanado compound, bastará igualar a cero su caída en la ecuación [a].

Si el arrollamiento shunt se conecta a los bornes exteriores de la dinamo, en lugar de I deberá ponerse la corriente total del inducido $I + I_{sh}$, siendo I_{sh} la corriente de excitación shunt en carga, siempre que I_{sh} circule también por todos los devanados en serie; en caso contrario, se afectará a cada uno de estos bobinados de la corriente I o $(I + I_{sh})$ que pase por el mismo.

Si se trata de un motor,

$$E = U - 2\,u_e - (u_R + u_s + u_{pa} + u_{dc}) = U - \Sigma RI \quad \text{(V)} \qquad [1.09.02\ \text{b}]$$

El arrollamiento shunt suele conectarse directamente a la línea de modo que la intensidad que circula por él no acostumbra pasar por los devanados serie. El motor shunt es a estos efectos una máquina de excitación independiente. En otro caso, se afectará, a cada bobinado, de la corriente I o $(I - I_{sh})$ que realmente le corresponda.

De todos modos, nótese que, si la máquina lleva algún devanado de excitación principal en serie, la f.e.m. no puede conocerse exactamente hasta calculada la resistencia R_s, de este arrollamiento el cual, a su vez, puede venir condicionado por la misma f.e.m. determinante del flujo inductor. Será necesario entonces admitir provisionalmente una caída óhmica total ΣRI y comprobarla a posteriori.

Sin embargo, como las demás resistencias R, R_{pa}, R_{dc} del inducido, de los polos auxiliares y del bobinado de compensación respectivamente, y desde

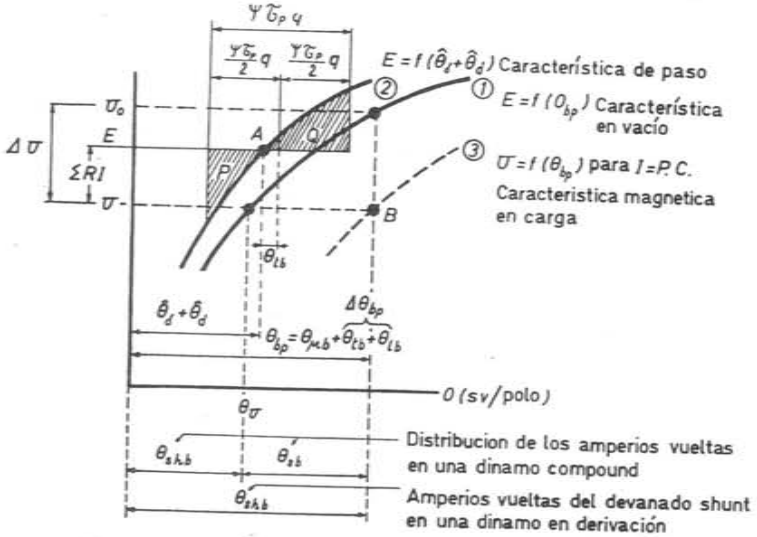


Fig. 1.09.02 a. Determinación de la excitación en carga. (Area P = Area Q).

luego, $2u_e$ pueden hallarse antes de proceder al cálculo de la excitación en carga, la discrepancia no suele ser muy notable.

El proceso a seguir normalmente consiste en calcular varios puntos de la característica de paso $E = f(\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d)$, fig. 1.09.02 a curva (2), con valores arbitrarios de E superiores e inferiores a U. Sobre esta característica se marca el punto A correspondiente a la f.e.m. prevista (exacta o aproximada, según lo que acabamos de decir). Partiendo de este punto se determinan los amperios vueltas por polo θ_{tb} para compensar la reacción transversal siguiendo el método expuesto en el párrafo 1.07.05, o sea emplazando el segmento $(\psi\tau_p q)$ de tal modo que delimite junto con la característica de paso las dos superficies iguales P y Q. La desviación central de este segmento nos da el valor de θ_{tb} como muestra la figura. θ_{tb} es nulo en las máquinas que llevan devanado compensador.

Si hay que contar con el decalaje de las escobillas (máquinas sin polos de conmutación), a la excitación θ_{tb} habrá que agregar los amperios vueltas θ_{lb} para contrarrestar la reacción antagónica, [1.07.07 b].

$$\theta_{lb} \sim 0{,}1\ \tau_p\ q. \qquad \text{(Av/polo)}$$

La suma

$$\theta_{tb} + \theta_{lb} = \Delta\theta_{bp} = \Delta\theta_l \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.09.02\ \text{c}]$$

complementa la f.m.m. de dispersión polar en carga (ecuación [1.04.24 b]) a partir de la cual puede ya calcularse el flujo de dispersión, el flujo por núcleo polar y en el yugo y terminar el cálculo de la excitación necesaria para el circuito magnético con el flujo resultante correspondiente a la f.e.m. E de plena carga, excitación que designaremos por $\theta_{\mu b}$ (Av/polo).

La excitación total θ_{bp} resulta de la adición de $\theta_{\mu b}$ y $\Delta\theta_{bp}$

$$\theta_{bp} = \theta_{\mu b} + \Delta\theta_{bp} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.09.02\ \text{d}]$$

En una *dinamo compound* el devanado shunt debe preveer la excitación $\theta_{b\,sh}$ correspondiente a la tensión nominal en vacío, θ_{bo}; $\theta_{b\,sh} = \theta_{bo}$ y el devanado serie, la diferencia $\theta_{bs} = (\theta_{bp} - \theta_{bo})$ para compensar las caídas y la reacción, hasta el número total de amperios vueltas de excitación en carga θ_{bp}. Si la dinamo es shunt o de excitación independiente, todos los amperios vueltas finales θ_{bp} provienen de este arrollamiento inductor.

Cuando la máquina ha de ser hipercompound, el valor de $\theta_{b\,sh} = \theta_{bo}$ se determinará partiendo también de la tensión nominal en vacío. Para deducir la excitación a P.C., se partirá, en cambio, de la tensión más elevada que hay que obtener en dichas condiciones y a ésta se le sumarán como antes las caídas internas para fijar el valor superior de E de donde se desprende nuevamente $\theta_{\mu b}$. A esta excitación se le añaden θ_{tb} y θ_{lb}, lo cual nos dará $\Delta\theta_{bp}$ y el total $\theta_{bp} = \theta_{\mu b} + \Delta\theta_{bp}$. Los valores de las excita-

ciones shunt y serie se deducen como anteriormente hemos dicho: $\theta_{b\,sh} = \theta_{bo}$ $\theta_{bs} = \theta_{bp} - \theta_{bo}$, siendo θ_{bo} los Av por polo para la tensión nominal en vacío.

Aparte el cálculo de la excitación en condiciones normales de plena carga, hay que tener en cuenta que los generadores, según normas VDE, han de poder dar, en caliente, la tensión nominal con un 25 % de sobrecarga debiendo comprobarse si la reserva prevista de excitación permite este incremento de carga; o bien, calcular la corriente inductora directamente para dichas condiciones de sobrecarga en las posibilidades extremas (reostato de campo en corto circuito) aunque a los efectos del calentamiento, bastará considerar la corriente de excitación normal.

Todas las resistencias han de evaluarse para estos cálculos a la temperatura de funcionamiento.

Cuando se trata de un motor compound se deduce la excitación a P.C. teniendo en cuenta la f.e.m. que resulta de restar de la tensión U las caídas óhmicas $\Sigma(RI)$, [b], y a la f.m.m. para vencer la reluctancia magnética se le añade la reacción de inducido, es decir, se determinan también θ_{tb} y θ_{lb} por los métodos descritos. La excitación total θ_{bp} se reparte luego a conveniencia entre los arrollamientos shunt y serie según el mayor o menor grado de compoundaje (caída de velocidad o aumento de par de arranque) que se estime necesario. Si no se indica especialmente otra cosa, los amperios vueltas del devanado compound se toman del mismo orden que los que se necesitarían para compensar las caídas óhmicas y la reacción de inducido.

1.09.03. Coeficiente de regulación

Refiriéndonos otra vez a la fig. 1.09.02 a observamos que a la excitación total de la dinamo en carga $\theta_{bp} = \theta_{\mu b} + \theta_{tb} + \theta_{lb}$ le corresponde, por definición, una tensión en bornes igual a la nominal U. El punto B intersección de ambas magnitudes constituye, pues, un punto de la denominada «característica magnética a P.C.», la cual expresa de un modo general la dependencia entre la tensión en bornes U y la excitación total de la máquina, θ_{bp} manteniendo constante la velocidad y la corriente de carga dada.

$$U = f(\theta_{bp}) \text{ para } I = \text{cte y } N = \text{cte.} \qquad [1.09.03\ a]$$

Si trazamos además la característica magnética normal, $E = f(\theta_{bp})$ a velocidad N constante, que representa también la tensión en bornes de la máquina en vacío en función de la excitación, deducimos que al valor de θ_{bp} para el cual se obtiene a P.C. la tensión nominal U, le correspondería en vacío una tensión U_0. Suprimiendo, pues, la carga sin variar la excitación total (lo cual solo puede presentarse en máquinas con excitación independiente) ni la velocidad de giro, la tensión en bornes, experimenta un incremento $\Delta U = U_0 - U$. La relación

$$\overset{*}{u} = \frac{\Delta U}{U}\ 100 \qquad [1.09.03\ b]$$

es lo que se denomina «coeficiente interno de regulación» del generador en cuestión. Si la máquina es de excitación shunt o compound, el «coeficiente efectivo de regulación» sigue definiéndose como la variación relativa del voltaje entre vacío y plena carga (a velocidad de giro constante) pero al no conservarse entonces invariable la excitación, su magnitud será distinta, superior o inferior respectivamente, al coeficiente interno.

1.09.04. Cálculo de las bobinas inductoras

El estudio del circuito magnético y de la reacción de inducido nos llevará a prever una excitación a P.C. [1.09.02 d].

$$\theta_{bp} = \theta_{\mu b} + \Delta\theta_{bp} \qquad \text{Av/polo.}$$

Añadiremos un cierto margen de 5 a 10 % para tener en cuenta posibles imprecisiones del cálculo y adoptaremos finalmente una excitación por polo

$$\theta_{bp} = (1{,}05 \ldots 1{,}1)\ (\theta_{\mu b} + \Delta\theta_{bp}) \quad \text{Av/polo} \qquad [1.09.04\ a]$$

Esta excitación se distribuirá entre la bobina inductora serie y la bobina shunt de acuerdo con las consideraciones expuestas en el párrafo 1.09.02, llegándose finalmente a los valores de θ_{bs} y $\theta_{b\,sh}$ (Av/polo) que hay que producir en una y otra bobina.

1.09.05. Cálculo de las bobinas serie

Se fijará por razones constructivas el número de vías en paralelo α_{bs} del circuito según las dimensiones que resulten para el conductor. La corriente por vía, siendo I la total de la máquina, valdrá

$$I_{bs} = \frac{I}{\alpha_{bs}} \text{ A/bobina serie} \qquad [1.09.05\ a]$$

y el número de espiras necesario

$$N_{bs} = \frac{\theta_{bs}}{I_{bs}} \text{ espiras/bobina} \qquad [1.09.05\ b]$$

La previsión del calentamiento que veremos con más detalle al tratar de cada tipo de máquina es lo que determina la densidad de corriente admisible

Δ_{bs}. Anticipemos que este valor suele oscilar entre 1,5 y 3 A/mm² para inductores fijos.

La sección del conductor

$$s_{bs} = \frac{I_{bs}}{\Delta_{bs}} \quad \text{mm}^2 \qquad [1.09.05\ c]$$

Con ello queda resuelta la excitación serie.

1.09.06. Cálculo de las bobinas inductoras alimentadas a tensión constante

Es el caso de las bobinas de excitación shunt y el de las de excitación independiente. Sea $\theta_{b\,sh}$ el número de Av a crear por bobina, $N_{b\,sh}$ el número de espiras de la misma e $I_{b\,sh}$ la corriente en A que circula por ellas bajo la tensión de alimentación $U_{b\,sh}$ (V).

Se ha de cumplir, en primer lugar que

$$N_{b\,sh}\ I_{b\,sh} = \theta_{b\,sh} \qquad \text{Av/bobina} \qquad [1.09.06\ a]$$

Si se fija la tensión por bobina $U_{b\,sh}$, la condición [a] puede satisfacerse de infinitas maneras quedando en cambio perfectamente determinada la sección $s_{b\,sh}$ (mm²) del conductor a emplear, una vez conocida la longitud $l_{m\,sh}$ de la espira media (m) que se deriva de las dimensiones del núcleo polar. La fórmula resultante que nos da el valor obligado a asignar a $s_{b\,sh}$ es

$$\boxed{s_{b\,sh} = \varrho\ l_{m\,sh}\ \frac{\theta_{b\,sh}}{U_{b\,sh}}} \quad (\text{mm}^2) \qquad [1.09.06\ b]$$

con ϱ = resistividad del conductor, a la temperatura de trabjo, en $\dfrac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}$

En efecto: a la condición inicial [a]

$$N_b \quad I_{b\,sh} = \theta_{b\,sh} \quad \text{(Av/polo)}$$

le acompaña automáticamente esta otra

$$I_{b\,sh} = \frac{U_{b\,sh}}{R_{b\,sh}} \quad (\Omega)$$

siendo R la resistencia de una bobina en Ω. Pero

$$R_{b\,sh} = \frac{\varrho\ l_{m\,sh}\ N_{b\,sh}}{s_{b\,sh}} \quad (\Omega)$$

($l_{m\,sh}$ en m, $s_{b\,sh}$ en mm², ϱ en $\dfrac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}$)

Sustituyendo en [a]

$$N_{b\,sh}\ \frac{U_{b\,sh}}{R_{b\,sh}} = N_{b\,sh}\ \frac{U_{b\,sh}\ s_{b\,sh}}{\varrho\ l_{m\,sh}\ N_{b\,sh}} = \frac{U_{b\,sh}\ s_{b\,sh}}{\varrho\ l_{m\,sh}} = \theta_{b\,sh}$$

de donde

$$s_{b\,sh} = \varrho\ l_{m\,sh}\ \frac{\theta_{b\,sh}}{U_{b\,sh}} \quad (\text{mm}^2)$$

Aunque la sección del conductor se halla perfectamente determinada, queda libre la densidad de corriente $\Delta_{b\,sh}\left(\dfrac{\text{A}}{\text{mm}^2}\right)$ que podamos admitir y con ella la corriente $I_{b\,sh} = \Delta_{b\,sh}\ s_{b\,sh}$ (A), y, en consecuencia, el número de espiras,

$$\boxed{N_{b\,sh} = \frac{\theta_{b\,sh}}{I_{b\,sh}}} \qquad [1.09.06\ c]$$

El valor de la densidad $\Delta_{b\,sh}$ o de $I_{b\,sh}$ influirá en las pérdidas $p_{b\,sh} = U_{b\,sh}\ I_{b\,sh}$ (W) y en el calentamiento de la bobina. Son, pues, razones económicas de rendimiento y de seguridad con respecto a la temperatura de servicio las que decidirán el valor de la densidad de corriente $\Delta_{b\,sh}$ y, por tanto, de la corriente $I_{b\,sh}$ o del número de espiras $N_{b\,sh}$ aceptables.

Anticipemos que los valores admisibles de $\Delta_{b\,sh}$ cuyo estudio se efectuará en el lugar oportuno para cada tipo de máquina, suelen variar entre 1.5 y 2 A/mm² para inductores fijos y de 2,5 a 3,5 A/mm² para bobinas móviles.

Aparte el margen de 5 a 10 % que hay que añadir sobre la excitación calculada como seguridad contra la imprecisión de los métodos, hay que prever la reserva circunstancial citada en el párrafo 1.09.02 de acuerdo con las Normas.

Basta para ello tomar como voltaje disponible $U_{b\,sh}$ un valor del 10 al 25 % inferior al de la tensión por bobina que puede suministrar el circuito de alimentación. El resto queda absorbido en servicio normal por el reostato de excitación.

Conviene observar que sería un error el imaginar que elevando el número de espiras se pueden aumentar los amperios-vueltas de una bobina que trabaja a tensión constante. En realidad, con ello, la excitación más bien disminuye porque las espiras superpuestas a la capa exterior de la bobina tienden a hacer subir la longitud de la espira media.

Solamente cuando se trata de una bobina serie cuya resistencia no influye apenas sobre la resistencia total del circuito es posible aumentar los amperios-vueltas agregando más espiras a la bobina.

1.09.07. Ejemplo

La dinamo para un grupo de laminación estudiada en el ejemplo 1.04.29 es de las siguientes características nominales.

Potencia $P = 345$ kW. Tensión nominal $U = 500$ V. Corriente nominal $I = 690$ A. Velocidad $N = 985$ r/m. Número de polos $2p = 6$. Número de vías $2a = 6$ (Arrollamiento imbricado). Polos de conmutación.

Los cálculos de excitación seguidos en dicho ejemplo se referían a la característica magnética o en vacío.

Se trata ahora de calcular la excitación de esta máquina como dinamo compound para la alimentación de una red local de las mismas características nominales: 500 V, 690 A, construyendo la máquina sin devanado de compensación. Las dimensiones del circuito magnético pueden verse en la fig. 1.04.25 a, completadas por la tabla 1.04.29 a.

a) *Característica de paso*

Hay que proceder primeramente al cálculo de la característica magnética de paso, es decir, reducida al entrehierro y dientes. El inducido puede ser calculado con anterioridad, pero la presencia del bobinado inductor serie nos obliga a estimar provisionalmente el valor de la f.e.m. a P.C.

Admitiremos que las caídas de tensión óhmicas (inducido, devanado serie, polos de conmutación) y en las escobillas ascienden a un 3,0 % de la tensión en bornes o sea

$$\Sigma RI = 3{,}0\frac{U}{100} = 3{,}0\ \frac{500}{100} = 15\ \text{V}.$$

con lo cual, a P.C.

$$E = U + \Sigma RI = 500 + 15 = 515\ \text{V}$$

Hemos de volver a la tabla 1.04.29 b donde se resume el cálculo de la característica magnética en vacío. En ella previsoramente conviene siempre dejar, como se ha hecho, una partida (20) que recoja la suma parcial $(\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d)$ de los amperios vueltas para el entrehierro y dientes con objeto de poder trazar sin ulterior desarrollo la característica de paso $E = f(\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d)$ necesaria para evaluar el efecto de la reacción transversal. La fig. 1.09.07 a muestra la curva correspondiente tomada de los datos contenidos en las partidas 1 y 20 de la tabla últimamente mencionada.

b) *Excitación θ_{tb} para compensar la reacción transversal.* La f.m.m. E_t viene dada por, [1.07.04 b],

$$E_t = \frac{\psi\ \tau_p}{2}\ q \qquad \text{Av/polo}$$

Ya vimos (tabla 1.04.29 a) que $\psi = 0{,}62$ y $\tau_p = 31{,}4$ cm.

La corriente por conductor vale

$$I_c = \frac{I}{2a} = \frac{690}{6} = 115 \qquad \text{A/conductor.}$$

La carga lineal

$$q = \frac{Z\ I_c}{\pi\ D} = \frac{600 \cdot 115}{\pi \cdot 60} = 366 \qquad \text{Ac/cm;}$$

de donde,

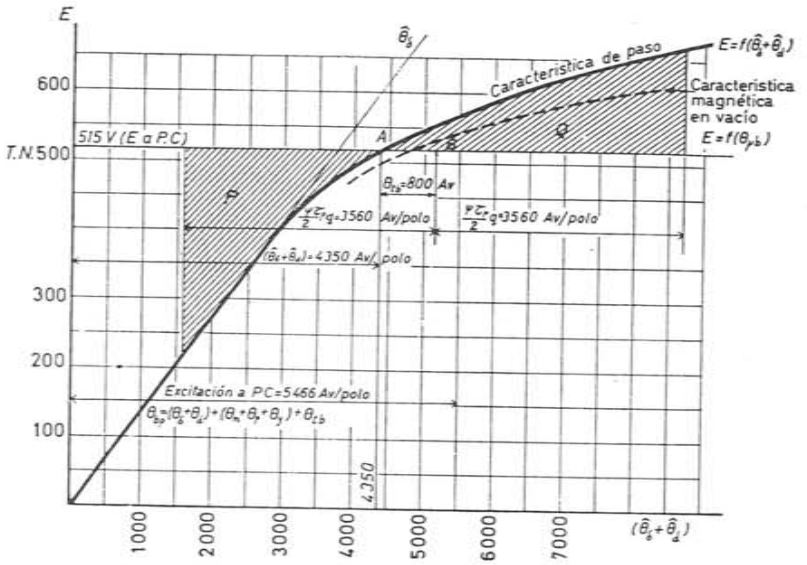


Fig. 1.09.07 a. Excitación por polo θ_{tb} para contrarrestar la reacción transversal.

$$\varepsilon_t = \frac{0{,}62 \cdot 31{,}4}{2}\ 366 = 3\ 560 \qquad \text{Av/polo}$$

Situando sobre la horizontal de $E = 515$ V el segmento $2\ \varepsilon_t = 2 \times 3560$ Av de modo que resulten iguales las superficies rayadas P y Q, fig. 1.09.07 a, el centro de dicho segmento viene a quedar desviado con respecto al punto A de una magnitud $AB = 800$ Av. Tendremos, pues

$$\theta_{tb} = 800 \qquad \text{Av/polo}$$

Como la máquina lleva polos de conmutación, las escobillas permanecerán en la línea neutra y la reacción longitudinal E_l y con ella θ_{lb} son nulos

$$\theta_{lb} = 0.$$

En suma, [1.09.02 c],

$$\Delta\theta_{bp} = \theta_{tb} + \theta_{lb} = 800 \qquad \text{Av/polo.}$$

c) *Excitación total en carga.*

El proceso restante de cálculo es como sigue:

Excitación para el entrehierro y diente a 515 V, leída sobre la característica de paso = 4 350 Av/polo = $\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d$.

Inducción en el núcleo. Proporcional a la f.e.m. Tomando como referencia el valor de la inducción a 500 V, 0,680 T (tabla 1.04.29 b partida 11),

$$\hat{B}_n = 0{,}680\ \frac{515}{500} = 0{,}700 \qquad \text{T}$$

Intensidad de campo en el núcleo (fig. 1.04.18 d) $\hat{H}_n = 3$ Av/cm.

Excitación para el núcleo [1.04.21 c] $\hat{\theta}_n = H_n\, l_n = 3 \cdot 13{,}9 = 42$ Av. F.m.m. de dispersión polar en carga, [1.04.24 b],

$$\theta_{\sigma p} = (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d) + \hat{\theta}_n + \Delta\theta_{bp} = 4350 + 42 + 800 = 5192 \quad \text{Av/polo}$$

Flujo de dispersión polar en carga, [1.04.24 g], y tabla 1.04.29 a part. 50

$$\Phi_{\sigma p} = \theta_{\sigma p}\, \Lambda_{\sigma p} \cdot 10^{-8} = 5199 \cdot 131{,}8 \cdot 10^{-8} = 0{,}00685 \quad \text{Wb/polo}$$

Flujo por polo en carga, [1.04.23 a], y partida 2 de la tabla 1.04.29 b

$$\Phi_p = \hat{\Phi}_\delta + \Phi_{\sigma p} = 0{,}0508 + 0{,}00685 = 0{,}05765 \quad \text{Wb/polo}$$

Coeficiente de dispersión polar en carga, [1.04.23 d],

$$\sigma_p = \frac{\Phi_p}{\hat{\Phi}_\delta} = \frac{0{,}05765}{0{,}0508} = 1{,}135$$

Inducción polar en carga, [1.04.23 b] y part. 52 de la tabla 1.04.29 a

$$B_p = \frac{\Phi_p}{S_p} = \frac{0{,}05765}{0{,}0393} = 1{,}47 \quad \text{T}$$

Inducción en el yugo en carga, [1.04.26 b] y tabla 1.04.29 a part. 58

$$B_y = \frac{\Phi_y}{2\,S_y} = \frac{\Phi_p}{2\,S_y} = \frac{0{,}05765}{2 \cdot 0{,}028} = 1{,}03 \quad \text{T}$$

Intensidad de campo magnético en el polo, fig. 1.03.02 b (2),

$$H_p = 8 \quad \text{Av/cm.}$$

Intensidad de campo magnético en el yugo, fig. 1.03.02 a (acero dinamo).

$$H_y = 5 \quad \text{Av/cm.}$$

Excitación para el polo en carga, [1.04.23 c], $\theta_p = H_p\, l_p = 8 \cdot 17{,}95 = 144$ Av/polo.
Excitación para el yugo en carga, [1.04.26 d], $\theta_y = H_y\, l_y = 5 \cdot 28{,}8 = 144$ Av/polo.
Excitación total en carga

$$\theta_{bp} = (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_n) + \theta_p + \theta_y + \Delta\theta_b = \theta_{\mu b} + \Delta\theta_{bp} =$$

$$= 5192 + 144 + 144 = 5480 \quad \text{Av/polo}$$

d) *Cálculo de las bobinas inductoras shunt.* Asignaremos al devanado shunt la excitación θ_{bo} necesaria para dar la tensión normal de 500 V en vacío. Según la tabla 1.04.29 b y fig. 1.04.29 a,

$$\theta_{b\,sh} = \theta_{bo} = 4\,380 \quad \text{Av/polo}$$

La diferencia de amperios vueltas entre las excitaciones requeridas en carga y en vacío o sea $5\,480 - 4\,380 = 1\,080 = \theta_{bs}$ Av/polo irá a cargo del arrollamiento serie.

Aumentando ambas cifras en un 5 %,

$$\theta_{b\,sh} = 1.05 \cdot 4380 = \underline{4600} \quad \text{Av/polo}$$
$$\theta_{bs} = 1.05 \cdot 1080 = \underline{1134} \quad »$$

Para el devanado shunt autoexcitado a 500 V dispondremos todas las bobinas en serie. Reservamos un 20 % de este voltaje como previsión para posibles necesidades circunstanciales de regulación contando, pues, normalmente, con 400 V sobre las bobinas polares; los 100 V restantes se absorberán en el reostato de campo. La tensión por bobina resulta así de

$$U_{b\,sh} = \frac{400}{6} = 66{,}7 \quad \text{V/bobina}$$

El aislamiento será de clase térmica *B* con un incremento medio de temperatura admisible $\Delta\theta = 80$ °C que a 40 °C de ambiente comporta una temperatura de funcionamiento igual a 40 + 80 °C. = 120 °C. El cobre normal, a 75 °C, tiene una conductividad de 46 $\frac{S \cdot m}{mm^2}$ y la resistividad a 120 °C asciende, (tabla 1.01.16 b o ecuación [1.01.10 f]) a,

$$\varrho = \frac{1}{64}\,\frac{235 + 120}{235 + 75} = 0{,}0217 \cdot 1{,}14 = 0{,}0248\ \frac{\Omega\ mm^2}{m}$$

Grueso de la bobina: 4 cm (supuesto).
Espira media (fig. 1.09.07 b)

$$l_{m\,sh} = 2(36 + 11{,}5 + 3) + \pi \cdot 4 = 1136 \text{ cm} = 1{,}136 \text{ m}$$

Sección del conductor, [1.09.06 b],

$$s_{sh} = \varrho\ l_{m\,sh}\ \frac{\theta_{b\,sh}}{U_{b\,sh}} = 0{,}0248 \cdot 1{,}136\ \frac{4600}{66{,}7} = 1{,}94 \text{ mm}^2$$

Tomaremos hilo de 1,6/1,9 Φ aislado con dos capas de vidrio impregnado. Sección neta, 2 mm²

Densidad de corriente admisible. Como la bobina es más bien gruesa, y por tanto mal ventilada interiormente limitaremos el valor de $\Delta_{b\,sh}$ a 1,5 A/mm²

Corriente de excitación,

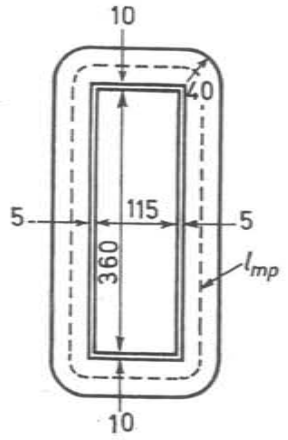


Fig. 1.09.07 b. Espira media de una bobina polar.

$$I_{b\,sh} = \Delta_{b\,sh}\ s_{b\,sh} = 1{,}5 \cdot 2 = 3 \text{ A}$$

Espiras por bobina $N_{b\,sh} = \frac{\theta_{b\,sh}}{I_{b\,sh}} = \frac{4600}{3} = 1\,533$ espiras/bob.

e) *Cálculo de las bobinas serie.* Para llegar a una sección cómoda de conductores, pondremos tres vías en paralelo.

La corriente por vía, [1.09.05 a],

$$I_{bs} = \frac{690}{3} = 230 \quad \text{A/conductor}$$

y el número de espiras por polo, [1.09.05 b],

$$N_{bs} = \frac{\theta_{bs}}{I_{bs}} = \frac{1134}{230} = 4{,}93 \sim 5 \quad \text{espiras/polo}$$

Utilizaremos barra de canto desnuda con separadores en U de 0,5 mm micanita. Podemos llegar así a una densidad de 3,06 A/mm²

$$s_{bs} = \frac{I_{bs}}{\Delta_{bs}} = \frac{230}{3{,}06} = 75 \text{ mm}^2$$

barra de 30 × 2,5 mm.

f) Comprobemos el espacio ocupado por las bobinas.

Las espiras serie requieren seis alturas de conductor y 7 espacios aislantes ocupando, pues

$$6 \times 2{,}5 + 7 \times 0{,}5 = 18{,}5 \text{ mm}$$

de longitud del polo. Contando con otros 6,5 mm para las armazones de bobinas shunt y juegos, son 25 mm. Restan de altura para esta última bobina (fig. 1.04.25 a), 156,5 − 25 = 131,5 mm. Sus 1533 espiras de 1,9 mm de diámetro exterior ocupan una sección rectangular de

$$1533 \cdot 1{,}9^2 = 5\,550 \text{ mm}^2$$

Sin contar el aislamiento entre capas, ello nos daría un espesor de

$$\frac{5550}{131{,}5} = 41{,}8 \text{ mm}$$

y contando con estos separadores se acercará mucho a los 4,5 cm supuestos en vez de los 4.

g) Como complemento, calculemos las pérdidas en la excitación y la caída óhmica en el arrollamiento serie.

Para el circuito shunt en conjunto, con 500 V de tensión y 3 A de corriente

$$p_{sh} = 500 \cdot 3 = 1500 \quad \text{W.}$$

o

$$\frac{1{,}5}{345} 100 = 0{,}435\ \% \text{ de la potencia en bornes.}$$

De estos 1500 W corresponden a las bobinas el 80 % en la relación de $\frac{400 \text{ V}}{500 \text{ V}}$ o sean 1 200 W y el resto 300 W al reostato de campo.

La resistencia de una bobina serie en caliente valdrá

$$R_{bs} = \varrho \frac{N_{bs}\, l_{ms}}{s_{bs}}\ \Omega.$$

$$l_{ms} = 2\ (36 + 11{,}5 + 3) + \pi 3 = 110{,}4 \text{ cm} = 1{,}104 \text{ m.}$$

$$R_{bs} = \frac{0{,}0248 \cdot 5 \cdot 1{,}104}{75} = 1{,}83 \cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

Las conexiones entre cada dos bobinas en serie vienen a suponer $\frac{1}{6}$ de la circunferencia de la máquina a la altura media de los polos, o en total. Contando con otro tanto para los puentes de conexión en paralelo podemos asignar a cada bobina una longitud suplementaria de

$$\frac{1}{3}\pi\ (D + l_p) = \frac{1}{3}\pi\ (60 + 17{,}95) = 74{,}5 \text{ cm} = 0{,}745 \text{ m}$$

lo que aumenta su resistencia en la relación de

$$\frac{(5 \cdot 1{,}104 + 0{,}745) \text{ m}}{(5 \cdot 1{,}104 \text{ m})} = 1{,}14$$

elevándola hasta

$$R_{bs} = 1{,}14 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{-3} = 2{,}08 \cdot 10^{-3}\ \Omega.$$

Dos de estas en serie, dan, pues, $2 \times 2{,}3 \cdot 10^{-3} = 4{,}16 \cdot 10^{-3}\ \Omega$ y las tres vías van en paralelo,

$$R_s = \frac{4{,}16 \cdot 10^{-3}}{3} = 1{,}39 \cdot 10^{-3} \quad \Omega$$

La caída óhmica representa así

$$u_s = R_s\ I = 1{,}39 \cdot 10^{-3} \cdot 690 = 0{,}96 \quad \text{V}$$

y las pérdidas

$$p_s = u_s\ I = 0{,}96 \cdot 690 = 660 \quad \text{W.}$$

1.09.08 **Característica magnética en carga**

Ya hemos aludido a ella en el párrafo 1.09.03 definiéndola como la curva que expresa la relación entre la tensión en bornes U y la excitación total por polo θ_{bp} a velocidad normal N manteniendo constante la intensidad de plena carga I, [1.09.03. a].

$$U = \text{f}\ (\theta_{bp}) \quad \text{para} \quad I = \text{cte} \quad (N = \text{cte}).$$

El punto B, fig. 1.09.02 a que marca la excitación a tensión normal y *P.C.*, tal y como acabamos de exponer en el parr. 1.09.02 y en el ejemplo 1.09.07, constituye un punto de dicha característica.

Para determinar los restantes puntos de la misma, podría repetirse el cálculo citado partiendo de distintas tensiones U como base dejando la carga invariable; pero una vez hallado el primero, B, los demás se deducen más fácilmente por el sencillo proceso que muestra la fig. 1.09.08 a, si se dispone de la característica magnética en vacío (1) y del punto B referido.

Dibujemos el triángulo rectángulo BCD con el cateto horizontal BC = $\theta_{ib} + \theta_{ib}$ que representa la f.m.m. por polo para contrarrestar la reacción de inducido. Evidentemente MC representa entonces la excitación que resta por bobina $\theta_{\mu b}$ para vencer la reluctancia del circuito magnético, y por tanto QD es la f.e.m. E inducida a P.C. y T.N. En consecuencia, DC equivale a la suma de las caídas óhmicas internas $\Sigma RI = E - U$.

Si la corriente de carga se mantiene, la magnitud del cateto ΣRI permanece constante cualquiera que sea la tensión en bornes U y lo mismo sucede con el sumando θ_{ib} debido a la reacción longitudinal en caso de que se halle presente (escobillas decaladas).

θ_{ib} vale aproximadamente $(0{,}1\ \tau_p\ q)$, [1.07.07 b]. Sólo θ_{ib} experimentará alguna variación al modificarse el grado de saturación de la máquina. Si prescindimos de esta influencia, el triángulo BCD señalado permanecerá invariable aunque se altere la excitación principal.

Para obtener la característica magnética a P.C. bastará, pues, trasladar paralela-

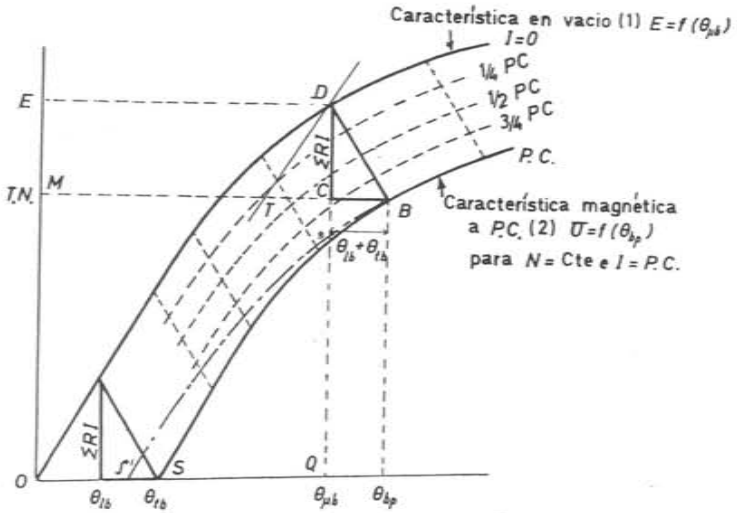


Fig. 1.09.08 a. Características magnéticas en carga.

mente a sí misma la hipotenusa DB apoyándola en la característica magnética de vacío (1). El extremo libre B nos describe la curva (2) que buscamos.

OS es la excitación de corto circuito (U = 0, I = P.C.). De esta característica a P.C. se deriva cualquiera otra para carga distinta (3/4 P.C., 1/2 P.C..., etc.), con sólo dividir el segmento móvil de la hipotenusa proporcionalmente a dicha intensidad (curvas de puntos).

Nótese que si trazamos por D una paralela al fragmento rectilíneo de la característica de vacío, se tiene también TB = OS. El trazado de dicha paralela nos porporciona directamente en TB la excitación de corto circuito, para la corriente de P.C.

Queriendo precisar algo mejor el curso de $U = f(\theta_{bp})$ se puede admitir que con la escasa inducción de tensión nula en bornes, θ_{ib} se hace cero por no haber saturación y esto supone trasladar el punto S a S' tomando entonces como característica magnética a P.C. la curva marcada de trazo y punto.

1.09.09 Característica externa

El interés principal de las características magnéticas en carga deducidas según acabamos de ver, reside en que nos proporcionan el medio de obtener la «característica externa» de una dinamo.

$$U = f(I) \text{ para } N \text{ constante,}$$

es decir, la tensión en bornes U en función de la corriente de carga I, a velocidad de giro N constante, lo que constituye el índice más expresivo de su comportamiento en servicio normal.

Si la máquina es de excitación separada (amperios vueltas inductores independientes de la tensión y de la carga), se puede recurrir a un procedimiento gráfico que permite el trazado inmediato de la curva $U = f(I)$ propuesta. Basta señalar una línea vertical, por el punto previsto de abscisa θ_{bp} y relacionar entre sí geométricamente los valores de U e I que intercepta dicha línea sobre las características magnéticas en cuestión.

La figura 1.09.09 a muestra de una manera clara el proceso. A la derecha aparecen las curvas $U = f(\theta_{bp})$ correspondientes a seis valores fijados de la corriente de carga: 0, 1/4, 1/2, 3/4, 4/4 y 5/4 de P.C. y a la izquierda las características externas $U = f(I)$ para dos excitaciones distintas θ_1 y θ_2. Una de estas excitaciones puede ser la de P.C. y T.N.

Cuando la dinamo es shunt, la eliminación gráfica de θ_{bp} ha de efectuarse a resistencia del circuito inductor R_{sh} constante (en esta resistencia irá incluida ahora la del

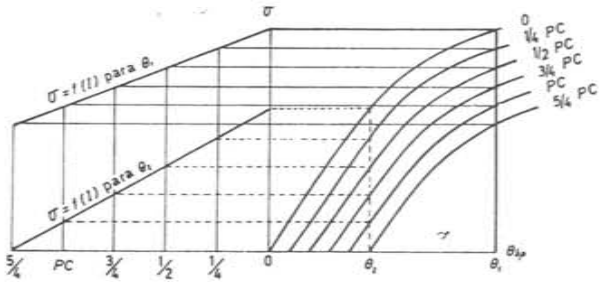


Fig. 1.09.09 a. Deducción de las características externas a excitación constante partiendo de las características magnéticas en carga. (Dinamo de excitación independiente).

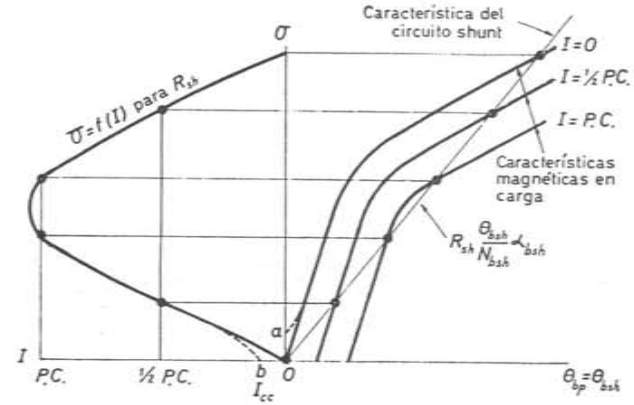


Fig. 1.09.09 b. Característica externa de una dinamo shunt.

reostato de campo intercalada), para lo cual se traza desde el origen de coordenadas una recta de caídas de tensión

$$R_{sh}\, I_{sh} = R_{sh}\, \alpha_{bsh}\, \frac{\theta_{bsh}}{N_{bsh}} \qquad \text{(V)}$$

en función de θ_{bsh}; N_{bsh} es el número de espiras inductoras por bobina polar, α_{bsh} el número de vías en paralelo del circuito. R_{sh} e I_{sh}, valores conjuntos.

Dado que los bornes del inductor y del inducido se hallan unidos, las intersecciones de esta recta con las distintas características magnéticas en carga (igualdad de voltaje en uno y otro circuito) nos determinan los puntos de funcionamiento posibles (fig. 1.09.09 b). Las desviaciones hacia a y b señalan el efecto del magnetismo remanente; I_{cc} es la corriente de corto circuito.

Si se trata de una dinamo compound, buscaremos la intersección de cada una de las características magnéticas con la misma recta del devanado shunt

$$R_{sh}\,\alpha_{bsh}\,\frac{\theta_{bsh}}{N_{bsh}} = f\,(\theta_{bsh})$$

trasladando ésta hacia la derecha en la magnitud correspondiente a la excitación serie $N_{bs}\,I_{bs}$ que proviene de la corriente de carga prevista. N_{bs} e I_{bs} son las espiras y la corriente por polo en las bobinas inductoras del devanado serie.

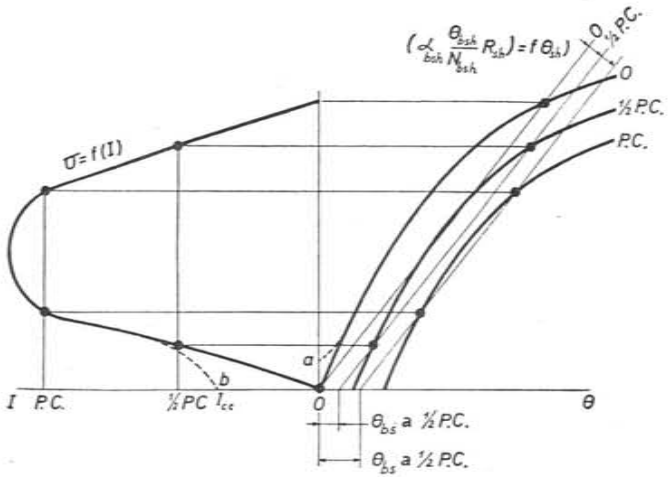


Fig. 1.09.09 c. Característica externa de una dinamo compound.

La figura 1.09.09 c pone de manifiesto el método descrito.

Los puntos a y b dan idea esquemáticamente del efecto de remanencia. La corriente de corto circuito I_{cc} es más importante que en el caso de una máquina shunt, por su propio efecto inductor.

La mejor precisión de estos métodos aconsejaría tomar como base de partida la característica magnética con los coeficientes de dispersión en carga (véase párr. 1.09.15 y siguientes), pero el error cometido al prescindir de esta corrección suele ser, como veremos, bastante reducido en las máquinas de continua donde las diferencias de excitación entre vacío y P.C. no alcanzan las magnitudes tan considerables a que se llega en los alternadores.

1.09.10. Ejemplo

Calcular la característica externa de la dinamo del ejemplo anterior 1.09.07: a) funcionando como máquina de excitación independiente. b) funcionando como máquina compound.

Los datos de esta dinamo eran: $P = 345$ kW, $U = 500$ V, $I = 690$ A, $N = 985$ r/m. La característica magnética en vacío, ya calculada en el párrafo 1.04.29, se muestra en la figura 1.04.29 a. Las caídas internas a P.C. trabajando como máquina compound ascendían a $\Sigma RI = 15$ V (párr. 1.09.07, a) de los cuales se consumían 0,96 V en las bobinas de excitación serie (párr. 1.09.07 g). Como máquina de excitación independiente podemos dejar, así, dichas caídas ΣRI en 14 V. La f.m.m. para neutralizar la reacción de inducido a P.C. y T.N. de 500 V en los bornes ascendía a $\Delta\theta_{bp} = 800$ Av/polo en dinamo compound con $E = 515$ V de f.e.m. interna (párr. 1.09.07 b). En dinamo de excitación separada, con $500 + 14 = 514$ V de f.e.m., admitamos que la reacción transversal es ligeramente menos efectiva e $\Delta\theta_{bp}$ se reduzca a 750 Av/polo.

Con estos datos, podemos resolver ya el problema en sus dos partes.

a) *Máquina de excitación independiente.* En la fig. 1.09.10 a la curva (1) reproduce a mayor escala la parte que más interesa de la característica en vacío, tomada de la fig. 1.04.29 a. Con los valores $\Sigma RI = 14$ V y $\Delta\theta_{bp} = 750$ Av/polo, se ha construido el triángulo básico para dibujar la característica magnética (2) de P.C. (690 A). Dividiendo la hipotenusa en cuatro partes iguales y trasladándola paralelamente a sí misma se obtienen las otras tres características magnéticas a 1/4, 1/2 y 3/4 de P.C. (para 172,5, 345 y 517,5 A respectivamente).

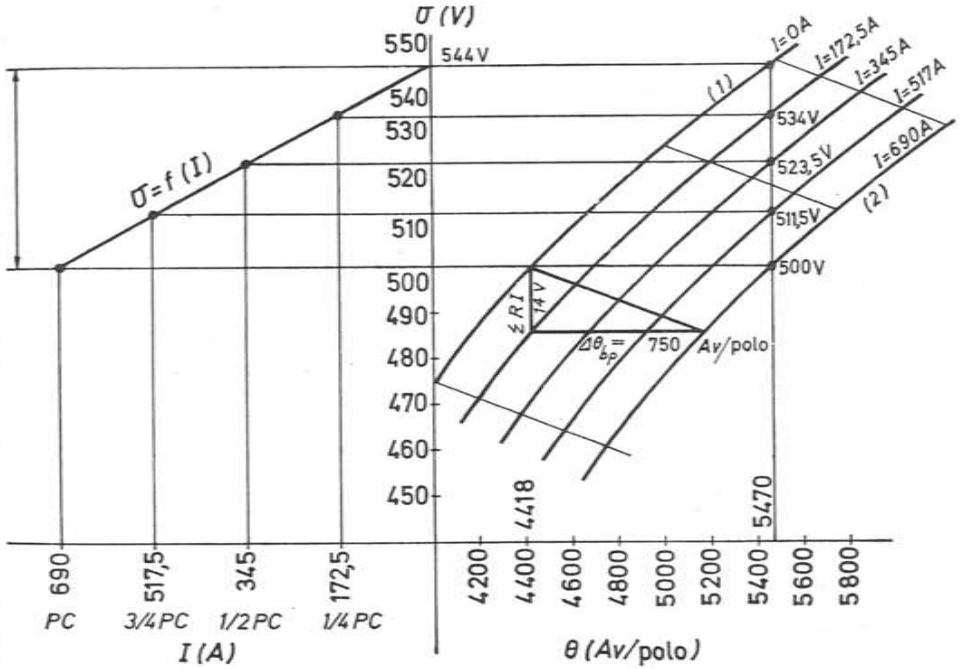


Fig. 1.09.10 a. Trazado de la característica externa de una dinamo de 345 kW, 500 V, 690 A, 985 r/m como máquina de excitación independiente.

Esta construcción nos da como excitación necesaria a P.C. y T.N. (690 A, 500 V), $\theta_{bp} = 5470$ Av/polo. En la dinamo compound, calculada exactamente, resultaba ser de 5480 Av/polo (párr. 1.09.07 c).

Levantando una perpendicular por el punto de abscisa 5470 (excitación constante), sus intersecciones con las características magnéticas antes referidas nos dan las tensiones correspondientes: 500 V a P.C., 511,5 V a 3/4 de P.C., 523,5 V a 1/2 de P.C., 534 V a 1/4 de P.C. y 544 V en vacío. La variación desde P.C. hasta cero amperios resulta ser $\Delta U = 44$ V y el coeficiente de regulación, por tanto

$$u^* = \frac{\Delta U}{U} \; 100 = \frac{44}{500} \; 100 = 22 \; \%.$$

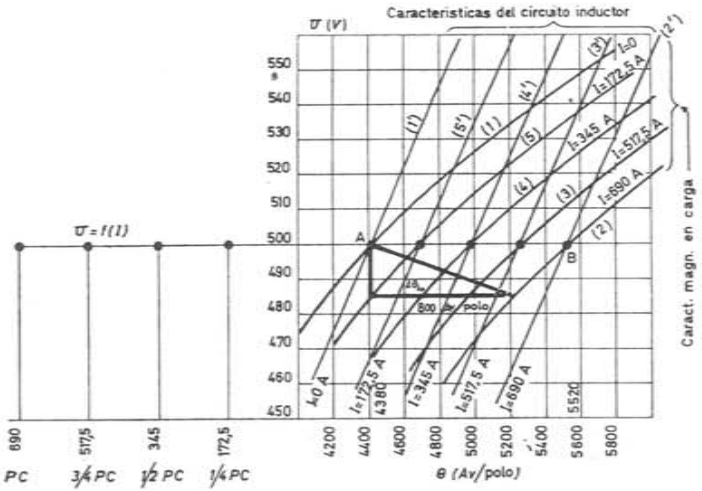


Fig. 1.09.10 b. Cálculo de la característica externa de una dínamo compound.

b) *Máquina compound.* La fig. 1.09.10 b reproduce de nuevo en (1), ampliada, la característica en vacío. El triángulo fundamental se ha construido ahora, según lo expuesto anteriormente, tomando $\Sigma RI = 15$ V e $\Delta\theta_{bp} = 800$ Av/polo y ello nos conduce a las características magnéticas en carga (2) a (5). Según el dibujo, la excitación a T.N. y P.C. debe ser 5520 Av/polo (calculada exactamente, ya hemos visto que era de 5480 Av/polo: la diferencia proviene del flujo de dispersión polar en carga deducido de un modo más riguroso en el ejemplo 1.09.07. c) mientras que al tomar ahora como referencia la curva de vacío, el coeficiente de dispersión σ_p que se utiliza, es implícitamente, el que corresponde a cada punto de la misma. Intervienen, además, los errores de dibujo pero de todos modos vemos que la diferencia no es muy considerable:

$\frac{5520 - 5480}{5470} \; 100 < 1 \; \%$).

La recta (1') es la característica del devanado shunt que proporciona la T.N. en vacío y pasa, pues, por el origen de coordenadas, no incluido en el dibujo, y por el punto A (500 V, 4380 Av/polo ya que este último valor es el de la excitación normal sin carga). El segmento AB se ha dividido en cuatro partes y por cada punto de división se traza la paralela a la recta del circuito shunt.

Las intersecciones correlativas de estas líneas con las características magnéticas en carga respectivas, esto es, los puntos de cruce de (1') con (1), (2') con (2)..., etc., determinan las tensiones en bornes para cada una de las cargas en cuestión. El trazado en este caso proporciona una característica externa absolutamente horizontal.

1.09.11. Máquinas sincrónicas. Turboalternadores

Por su mayor sencillez empezaremos por los

Alternadores de rotor cilíndrico (turboalternadores). El diagrama vectorial mostrado en la fig. 1.09.11 a nos servirá al objeto de establecer el método de cálculo para la excitación en carga la cual depende no solamente del valor de la intensidad sino que también del factor de potencia.

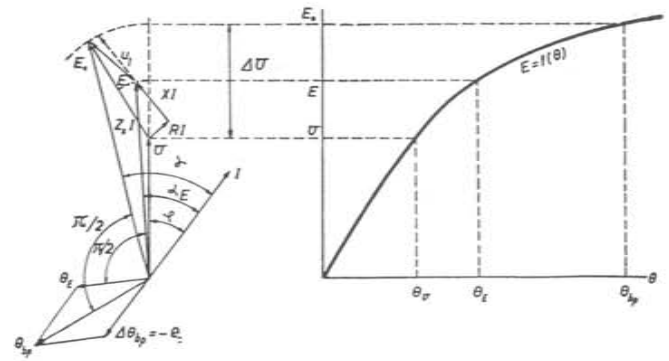


Fig. 1.09.11 a. Diagrama vectorial de un alternador de rotor cilíndrico.

En dicho diagrama, referido siempre a una fase, y a una bobina polar inductora,

U es la tensión nominal en bornes a plena carga y cos φ dado.

I es la corriente nominal de carga por fase. Según las normas VDE la máquina ha de disponer de excitación suficiente para mantener por corto tiempo la tensión nominal con un 25 % de sobrecarga. Estas condiciones hay que tenerlas en cuenta para comprobar si la reserva de excitación que se prevé basta a satisfacerlas.

φ es el ángulo de fase nominal de la carga. Acostumbra fijarse cos $\varphi = 0{,}8$, pero para máquinas medianas y pequeñas que alimentan motores individuales de baja potencia no debiera contarse con un cos φ mayor de 0,7.

RI es la tensión a inducir para vencer la caída óhmica en el estator; en fase con I

XI la tensión necesaria para compensar la f.e.m. estatórica de reactancia. Como esta f.e.m. retrasa de 90° respecto a la corriente de carga, la tensión a aplicar avanzará, por su parte, de 90° respecto a I.

$\vec{E} = \vec{U} + \overrightarrow{RI} + \overrightarrow{XI}$ es la f.e.m. a inducir por el flujo principal. En valor numérico.

$$E = U + RI\cos\varphi + XI\,\text{sen}\,\varphi + \frac{(XI\cos\varphi - RI\,\text{sen}\,\varphi)^2}{2\,U} \qquad \text{[1.09.11 a]}$$

el último sumando puede, a veces, despreciarse tomándose entonces

$$E = U + RI\,\cos\varphi + XI\,\text{sen}\,\varphi \qquad \text{[1.09.11 b]}$$

Estas dos ecuaciones se deducen como sigue, (fig. 1.09.11 b). Tracemos una circunferencia de radio igual a E y proyectemos el extremo F del vector E sobre el diámetro en la prolongación de U. Evidentemente

$$E = U + RI\,\cos\varphi + XI\,\text{sen}\,\varphi + \overline{AB}$$

pero

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{FA}^2 = (XI\,\cos\varphi - RI\,\text{sen}\,\varphi)^2$$

de donde

$$\overline{AB} = \frac{\overline{FA}^2}{\overline{AC}};$$

dado el orden de magnitud de $\overline{AB}$, ya muy pequeño respecto a $\overline{AD}$, puede escribirse sin grave error sobre el resultado,

$$\overline{AB} \approx \frac{\overline{FA}^2}{2\,U}$$

y

$$E = U \times RI\,\cos\varphi + XI\,\text{sen}\,\varphi + \frac{(XI\cos\varphi - RI\,\text{sen}\,\varphi)^2}{2\,U}$$

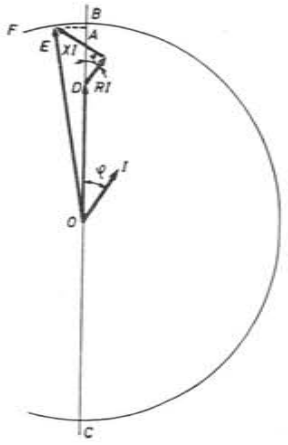


Fig. 1.09.11 b. Cálculo de la caída de tensión.

Esta es la f.e.m. que ha de inducirse en carga para lo cual se precisa una f.m.m. θ_E en el circuito magnético, que deberá tener en cuenta además, naturalmente la dispersión de los polos ranurados en las condiciones de carga previstas, esto es, con los amperios vueltas de excitación aumentados, en virtud de la reacción de inducido, según analizaremos inmediatamente. El cálculo de θ_E obligará, pues, en teoría, a la determinación preliminar de este suplemento de excitación que ha de traducirse en un incremento de la dispersión mencionada [1]. En el diagrama, θ_E representa la excitación aludida creada por la corriente inductora de la f.e.m. E y adelanta de $\frac{\pi}{2}$ respecto a esta última.

(1) Prácticamente puede prescindirse aquí de la dispersión polar.

A su vez la corriente del inducido produce una f.m.m. de reacción cuya fundamental tiene por amplitud, valorada en Av por polo [1.07.12 b],,

$$\theta_1 = 0{,}45\ \zeta_1\ (\tau_p\ q) \qquad \text{(Av/polo)}$$

Para contrarrestar este efecto y poder mantener el flujo inductor será necesario suplementar la excitación principal con una f.m.m. igual y opuesta.

En el diagrama 1.09.09 a,

$\Delta\theta_{bp}$ es la excitación necesaria por polo para neutralizar la reacción de inducido; $\Delta\theta_{bp} = -\theta_1$

θ_{bp} es la excitación total en carga, por bobina polar

$$\vec{\theta}_{bp} = \vec{\theta}_E + \Delta\vec{\theta}_{bp}$$

E_0 medida sobre la característica magnética para la abscisa ($\theta_{bp} = N_{bp}\ I_{bp}$), nos da la f.e.m. que la máquina produciría en vacío con la corriente inductora de P.C. I_{bp}.

u_I equivale a una cierta caída aparente de reactancia provocada por la reacción de inducido, así como

$Z_s I$ viene a ser como una caída aparente de impedancia por el efecto combinado de la resistencia, de la reactancia verdadera y de la reacción de inducido, y recibe el nombre de «impedancia sincrónica» de la máquina; es variable con el grado de saturación a que trabaja.

ΔU es el incremento de tensión entre plena carga y vacío a excitación constante de plena carga θ_{bp}. El coeficiente de regulación vale

$$\overset{*}{u} = \frac{\Delta U}{U}\ 100 \qquad \text{[1.09.11 d]}$$

Las normas VDE fijan para $\overset{*}{u}$ un valor máximo admisible del 50 % de U.

1.09.12. Alternadores de polos salientes

En estas máquinas la diferencia de reluctancia de los circuitos magnéticos longitudinal y transversal requiere un tratamiento distinto por lo que se refiere a los efectos de la reacción de inducido. La fig. 1.09.12 a muestra el diagrama a emplear para el cálculo de la excitación en carga, en el cual, nuevamente, por fase

U es la tensión nominal a plena carga,

I la corriente de P.C.,

φ el ángulo normal de desfase respecto a la tensión;

RI la tensión para vencer la caída óhmica, en fase con I,

XI la tensión para vencer la caída de reactancia, adelantada de $\frac{\pi}{2}$ respecto a I

E la f.e.m. a inducir en condiciones nominales. Según [1.09.09 a o b],

$$E = U + RI\cos\varphi + XI\,\text{sen}\,\varphi + \frac{(XI\cos\varphi - RI\,\text{sen}\,\varphi)^2}{2\,U}$$

o

$$E \approx U + RI\cos\varphi + XI\,\text{sen}\,\varphi$$

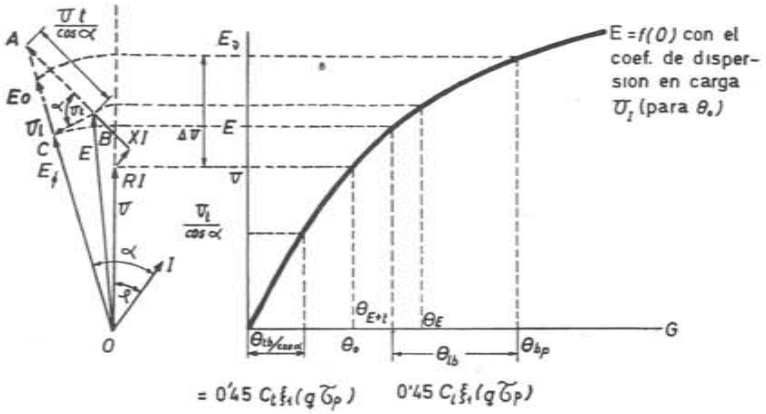


Fig. 1.09.12 a. Diagrama vectorial de un alternador de polos salientes.

θ_E la excitación necesaria para generar esta f.e.m. tomada de la característica magnética en vacío con coeficiente de dispersión polar σ_p en carga; para evitar tanteos es preferible calcular directamente θ_{E+t} que en seguida definiremos

U_t es la tensión necesaria para vencer la f.e.m. debida al flujo de reacción transversal. La f.m.m. generadora de esta tensión tiene por valor, referida a los polos inductores, [1.07.14 d],

$$\theta_{tb} = 0{,}45\cdot\, c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p)\ \cos\alpha \qquad \text{Av/polo}$$

siendo c_t el coeficiente función de $\psi = \frac{b_p}{\tau_p}$ dado por la figura 1.07.14 c para un entrehierro uniforme y por la figura 1.07.14 d para un entrehierro senoidal.

El desconocimiento previo del ángulo α nos impide aplicar directamente la fórmula anterior para el cálculo de θ_{tb} y por tanto de U_t tensión opuesta a la f.e.m. de reacción transversal. Sin embargo,

$$\boxed{\frac{\theta_{tb}}{\cos\alpha} = 0{,}45\ c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p)} \qquad \text{(Av/polo)} \qquad [1.09.12\ a]$$

puede hallarse inmediatamente. En efecto: si toda la reacción de inducido fuese transversal (corriente I en fase con E_o), esta última fórmula es la que expresaría el valor de dicha f.m.m. Ahora bien; notemos que la f.m.m. dada por la ecuación [1.07.14 d] o la [1.09.12 a] se refiere por c_t a la componente considerada de la onda de flujo inductor sobre el entrehierro propio de la máquina. El flujo transversal que se deriva de estas f.m.m. corresponde, pues, a la reluctancia de un circuito magnético idéntico al principal, donde el hierro, sin embargo, puede despreciarse, debido a la fuerte reluctancia del intervalo entre núcleos polares incorporada en el factor c_t. Esto nos da dos caminos posibles, uno analítico y otro gráfico, para calcular el valor de la f.e.m. debida a la reacción transversal.

El método analítico consiste en suponer aplicada dicha f.m.m. (provisionalmente la total: $\frac{\theta_{tb}}{\cos\alpha}$, ya que ignoramos aún el ángulo α), al entrehierro de la máquina, lo cual provocaría una inducción máxima en el centro del polo, prescindiendo de las ranuras y de los canales de ventilación,

$$\hat{B} = \frac{4}{10}\,\frac{\pi}{\delta}\,\frac{\theta_{tb}/\cos\alpha}{\delta} \qquad \text{(G)};$$

δ es el valor mínimo del entrehierro en cm. Teniendo en cuenta dichos canales y ranuras, la inducción media se reduce a [1.04.09 c] y [1.04.10 *a* o *b*],

$$\hat{B}_t = \frac{4}{10}\,\frac{\pi}{K_L\,K_C\,\delta}\,\frac{\theta_{tb}/\cos\alpha}{K_L\,K_C\,\delta} \qquad \text{(G)}$$

La amplitud de la senoide equivalente a la onda más o menos rectangular promovida por $\theta_{tb}/\cos\alpha$ sería, [1.04.08 f],

$$\boxed{\underset{\sim}{\hat{B}_t}} = \frac{\hat{B}_t}{K_M} = \frac{4}{10}\,\frac{\pi}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta}\,\frac{\theta_{tb}/\cos\alpha}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta} = \boxed{1{,}25\,\frac{\theta_{tb}/\cos\alpha}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta}} \qquad \text{(G)} \qquad [1.09.12\ b]$$

de donde el flujo consiguiente por polo, con L y τ_p en cm, [1.04.08 g],

$$\boxed{\underset{\sim}{\hat{\Phi}_t}} = \frac{\tau_p\,L}{1{,}57}\,\underset{\sim}{\hat{B}} = \frac{4}{10}\,\frac{\pi}{1{,}57}\,\frac{\tau_p\,L}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta}\,\frac{\theta_{tb}/\cos\alpha}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta} = \boxed{0{,}8\,\frac{\tau_p\,L}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta}\,\frac{\theta_{tb}/\cos\alpha}{K_M\,K_L\,K_C\,\delta}} \qquad \text{(M)} \qquad [1.09.12\ c]$$

y la f.e.m. en V eficaces, [1.04.06 b]

$$\left(\frac{E_t}{\cos\alpha}\right) = \frac{2{,}22\,f\,Z\,\xi_1}{m}\,\underset{\sim}{\hat{\Phi}_t}\cdot 10^{-8} \qquad \text{(V)} \qquad [1.09.12\ d]$$

Como el supuesto flujo $\underset{\sim}{\hat{\Phi}_t}$ se presentaría espacialmente en fase con la onda de co-

rriente, la f.e.m. $\left(\frac{E_t}{\cos\alpha}\right)$ creada por él retrasaría de $\frac{\pi}{2}$ respecto a I y la tensión a aplicar para vencer esta reacción $\left(\frac{U_t}{\cos\alpha}\right)$ debería adelantar 90° sobre la corriente de inducido, siguiendo la misma línea, pues, que la tensión de reactancia.

Prolongando, por tanto, $\overrightarrow{XI}$ en la magnitud

$$\boxed{\frac{U_t}{\cos\alpha} = 2{,}22\, f\, \frac{\xi_1 Z}{m}\, \underset{\sim}{\hat{\Phi}_t} \cdot 10^{-8} \quad \text{(V)}} \qquad [1.09.12\ e]$$

obtenemos el punto A y uniendo A con O, la perpendicular a OA trazada desde B nos da en magnitud y dirección el vector de U_t puesto que, evidentemente, $\overline{BC} = \overline{AC}\cos\alpha = \frac{U_t}{\cos\alpha}\cos\alpha = U_t$.

El método gráfico consiste en determinar $\frac{U_t}{\cos\alpha}$ como la ordenada de la característica magnética correspondiente a la abscisa $\theta_{tb}/\cos\alpha = 0{,}45\ c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p)$ Av/polo, ya que en la parte rectilínea inicial de dicha característica la única reluctancia que interviene prácticamente en las exigencias de la excitación es la del entrehierro o sea que se aviene por naturaleza con las ecuaciones [a] y [d] expuestas más arriba, fig. 1.09.12 a.

$\frac{U_t}{\cos\alpha}$ nos determina ya el ángulo α sobre el diagrama, y también analíticamente

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{U\ \operatorname{sen}\varphi + XI + \left(\frac{U_t}{\cos\alpha}\right)}{U\cos\varphi + RI}} \qquad [1.09.12\ f]$$

Notemos, de paso, que el método gráfico de hallar $\frac{U_t}{\cos\alpha}$ nos conduce también a esta expresión simple

$$\boxed{\frac{U_t}{\cos\alpha} = U\,\frac{\frac{\theta_{tb}}{\cos\alpha}}{\hat{\theta}_{\delta o}} = U\,\frac{0{,}45\ c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p)}{K_M\ K_L\ K_\sigma\ (0{,}8\ \underset{\sim}{\hat{B}_{\delta o}})\ \delta}} \quad \left(\frac{\text{V}}{\text{fase}}\right) \qquad [1.09.12\ q]$$

(τ_p y δ en cm; q en Ac/cm; $\underset{\sim}{\hat{B}_{\delta o}}$, inducción teórica senoidal, en el entrehierro liso, para una f.e.m. en vacío igual a la T.N. nominal de la máquina, en G; $\hat{\theta}_{\delta o}$, Av *para* δ con $\underset{\sim}{\hat{B}_{\delta o}}$).

$E_{\Phi'}$ es la f.e.m. a inducir teniendo en cuenta no solo las caídas de tensión por resistencia y reactancia si no también el efecto de la reacción transversal

$$\boxed{E_\Phi = \sqrt{E^2 - U_t^2}} \qquad [1.09.12\ h]$$

θ_{E+t} es la excitación por polo para inducir la f.e.m. E_Φ (sin descuidar el aumento de la dispersión polar debido a los amperios vueltas necesarios por polo, θ_{lb}, para vencer la reacción longitudinal)

Queda finalmente por calcular

U_l, tensión necesaria para vencer la reacción longitudinal del inducido. La f.m.m. inductora que neutraliza al flujo citado tiene por expresión, [1.07.14 c],

$$\boxed{\theta_{lb} = 0{,}45\ c_l\ \xi_1\ (q\ \tau_p)\ \operatorname{sen}\alpha} \quad \text{(Av/polo)} \qquad [1.09.12\ i]$$

con c_l función también de $\frac{b_\delta}{\tau_p} = \psi$ de acuerdo con las figs. 1.07.14 c o d según se trate respectivamente de un entrehierro uniforme o senoidal. Por razones análogas a las ya expuestas, estos amperios vueltas que actúan sobre el circuito principal saturado de la máquina, se llevarán a continuación de θ_{E+t} (fig. 1.09.12 a) dándonos la suma el valor θ_{bp} de la excitación en carga y por el segmento marcado, el valor de U_l Su fase es normal a la de U_t

E_o, f.e.m. en vacío con la excitación θ_{bp} en carga

ΔU variación de tensión desde P.C. hasta carga nula.

$$u = \frac{\Delta U}{U}\ 100\ (\%)\ \text{coeficiente de regulación.}$$

1.09.13. Ejemplo

Calcular la excitación en carga para un alternador trifásico en estrella de 2 000 kVA, 5500 V, 500 r/m, 12 polos, 50 Hz, $\cos\varphi = 0{,}8$. Las dimensiones principales se muestran en la fig. 1.09.13 a. El estator tiene 117 ranuras con 8 conductores por ranuras, o sea $8 \times 117 = 936$ conductores en total.

En la tabla 1.09.13 a se expone la deducción progresiva de los parámetros del circuito magnético, como se hizo últimamente para la máquina de corriente continua (párr. 1.04.29).

En el caso de un alternador se puede proceder directamente al cálculo de la excitación en carga renunciando a cualquier hipótesis previa revisable sobre el valor de la f.e.m. interna, ya que las caídas óhmicas y de reactancia no dependen más que del inducido sin que se hallen afectadas por devanado alguno, inductor o de conmutación, en serie con él.

El efecto de la reacción del inducido cabe determinarlo también sin necesidad de tanteos preliminares.

TABLA 1.09.13 a. Datos para el cálculo de la excitación de un alternador

$P = 2\,000$ kVA, $U = 5\,500$ V, λ, $N = 500$ r/m, $f = 50$ Hz, $2p = 12$ polos, $\cos\varphi = 0{,}8$

1	$D = 150$ cm		
2	$L = 50$ »		
3	$n = 117$ ranuras		
4	$Z_n = 8$ cond/ran		
5	$Z = n\,Z_n = 117 \cdot 8 = 936$ cond		
6	$n_{pf} = \dfrac{n}{2pm} = \dfrac{117}{12 \cdot 3} = (3 + 1/4)$ r. p. p. y f.		
7	$y_n = 8$ ran. $(1 - 9)$		
8	$\xi = 0{,}917$		
9	$\tau_p = \dfrac{\pi D}{2p} = \dfrac{\pi \cdot 150}{12} = 39{,}3$ cm		
10	$\psi = \dfrac{\delta_p}{\tau p} = 0{,}66$		
11	$b_p = \psi\tau_p = 0{,}66 \cdot 39{,}3 = 26$ cm		
12	$\delta = 5$ mm senoidal		
13	$K_M = 1{,}012$	(fig. 1.04.08 b(2))	
14	$K_f = 0{,}965$	(» 1.04.06 a(2))	
15	$n_e = 6$ canales rad.		
16	$s_e = 1$ cm/canal		
17	$s_\delta = 0{,}29$ »	(fig. 1.04.09 b (2))	
18	$L_\delta = L - n_e s_\delta = 50 - 6 \cdot 0{,}29 = 48{,}26$ cm	[1.04.09 a]	
19	$K_L = \dfrac{L}{L_\delta} = \dfrac{50}{48{,}26} = 1{,}035$	[1.04.09 c]	
20	$\tau_\delta = \dfrac{\pi D}{n} = \dfrac{\pi \cdot 150}{117} = 4{,}03$ cm		
21	$a_\delta = 1{,}6$ cm		
22	$\dfrac{\delta}{a_\delta} = \dfrac{0{,}5}{1{,}6} = 0{,}312$		
23	$\dfrac{a_\delta}{\tau\delta} = \dfrac{1{,}6}{4{,}03} = 0{,}397$		
24	$K_c = 1{,}17$	(fig. 1.04.10 b)	
25	$h_t = 7{,}0$ cm		
26	$D_0 = D = 150$ cm		
27	$\tau_0 = \dfrac{\pi D_0}{n} = \dfrac{\pi \cdot 150}{117} = 4{,}03$ cm		
28	$\tau_m = \dfrac{\pi(D + h_t)}{n} = \dfrac{\pi \cdot 157}{117} = 4{,}21$ »		
29	$\tau_M = \dfrac{\pi(D + 2h_t)}{n} = \dfrac{\pi \cdot 164}{117} = 4{,}4$ »		
30	$a_0 = 1{,}6$ cm		
31	$a_m = 1{,}6$ »		
32	$a_M = 1{,}6$ »		
33	$t_0 = \tau_0 - a_0 = 4{,}03 - 1{,}6 = 2{,}43$ cm		
34	$t_m = \tau_m - a_m = 4{,}21 - 1{,}6 = 2{,}61$ »		
35	$t_M = \tau_M - a_M = 4{,}4 - 1\,6 = 2.80$ »		
36	$L_h = L - n_e s_e = 50 - 6 \cdot 1 = 44$ »	[1.04.17 d]	
37	$L_{Fe} = k_{Fe} L_h = 0{,}9 \cdot 44 = 39{,}6$ cm	[1.04.17 d]	
38	$K_{Fe} = \dfrac{L}{L_{Fe}} = \dfrac{50}{39{,}6} = 1{,}264$ cm	[1.04.17 j]	
39	$k_{t0} = K_{Fe}\dfrac{\tau_0}{t_0} - 1 = 1{,}1$	[1.04.17 n]	
40	$k_{tm} = K_{Fe}\dfrac{\tau_m}{t_m} - 1 = 1{,}04$	»	
41	$k_{tM} = K_{Fe}\dfrac{\tau_M}{t_M} - 1 = 0{,}98$	»	
42	$D_{yo} = D + 2h = 150 + 2 \cdot 7 = 164$ cm		
43	$D_{yM} = 186$ cm		
44	$h_y = \dfrac{D_{yM} - D_{yo}}{2} = \dfrac{186 - 164}{2} = 11$ cm		
45	$S_v = L_{Fe} h_y = 39{,}6 \cdot 11 = 436$ cm²	[1.04.21 b]	
46	$l_y = \dfrac{\pi D_{yM}}{4p} = \dfrac{\pi \cdot 186}{4 \cdot 6} = 24{,}3$ cm/polo	[1.04.21 d]	
47	$L_p = 50$ cm		
48	$h_\psi = 3$ cm		
49	$h_o = 4$ cm		
50	$h\psi_{eq} = \dfrac{2h_\psi + h_o}{3} = \dfrac{2 \cdot 3 + 4}{3} = 3.33$ cm	[1.04.24i]	
51	$L_{np} = 50$ cm		
52	$b_{np} = 18$ »		
53	$h_{np} = 14{,}5$ cm		
54	$b_1 = \dfrac{\pi(D - 2\delta - h_o)}{2p} - b_p$ $= \dfrac{\pi(150 - 2 \cdot 0{,}5 - 4)}{12} - 26 = 12$ cm		
55	$b_3 = \dfrac{\pi(D - 2\delta - 2h_o - h_{nj})}{2p} - b_{np}$ $= \dfrac{\pi(150 - 2 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 4 - 14{,}5)}{12} - 18 = 15{,}2$ cm		
56	$\Lambda\sigma_p = 5{,}204\dfrac{L_p h\psi_{eq}}{b_1} + 2{,}512\dfrac{L_{np} h_{np}}{b_3} + 7{,}36\, h\psi_{eq}\log_{10}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{b_p}{b_1}\right) + 3{,}68\, h_{np}\log_{10}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{b_{np}}{b_3}\right)$ $= 5{,}024\dfrac{50 \cdot 3{,}33}{12} + 2{,}512\dfrac{50 \cdot 14{,}5}{15{,}2} + 7{,}36 \cdot 3{,}33\log_{10}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{26}{12}\right) + 3{,}68 \cdot 14{,}5\log_{10}\left(1 + \dfrac{\pi}{2}\dfrac{18}{15{,}2}\right) = 230\dfrac{M}{Av}$	[1.04.24 h]	

57	$k_{pe} = 0{,}95$ para los polos	63	$h_n = \dfrac{D_{nM} - D_{no}}{2} = \dfrac{112 - 94}{2} = 9$ cm
58	$S_p = k_{Fe} L_{np} b_{np} = 0{,}95 \cdot 0{,}50 \cdot 0{,}18 = 0{,}0855$ m²	64	$S_n = h_n L_n = 9 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$ m²
59	$l_p = h_o + h_{nj} = 4 + 14{,}5 = 18{,}5$ cm	65	$l_n = \dfrac{\pi D_{nM}}{4p} = \dfrac{\pi \cdot 112}{24} = 14{,}65$ cm/polo [1.04.26 c]
60	$D_{nM} = 112$ cm		
61	$D_{no} = 94$ »		
62	$L_n = 50$ »		

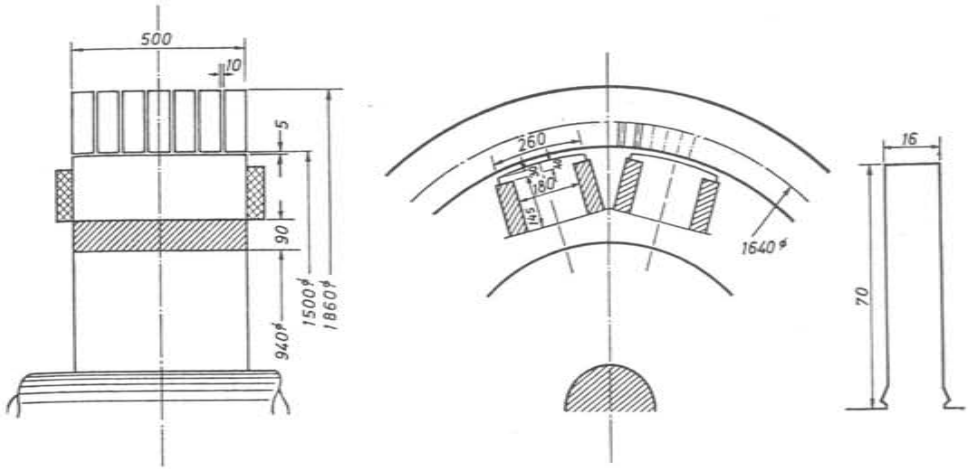


Fig. 1.09.13 a. Dimensiones del circuito magnético de un alternador trifásico de 2 000 kVA, 5 500 V, 50 Hz, 500 r/m, cos $\varphi = 0{,}8$.

No obstante, será muy útil establecer de antemano la característica magnética *en vacío* para juzgar sobre las propiedades de la máquina cuanto a la regulación y variaciones de tensión con la carga. Aquí, lo haremos a posteriori. Como quiera que el cálculo de las caídas de resistencia RI y por dispersión XI ya ha sido estudiado en otros capítulos, las daremos en este ejemplo por conocidas, siendo sus valores relativos del 1,5 % y del 14 % respectivamente, de la tensión nominal U.

Hagamos un inciso para observar que la máquina que ahora analizamos lleva un devanado en dos capas con $n_{pf} = \dfrac{n/m}{2\,p}$, número de ranuras por polo y fase, fraccionario. El análisis de esta clase de arrollamientos será objeto de un capítulo ulterior sobre los alternadores en particular, pero, por el momento, para deducir el flujo, nos es imprescindible conocer el factor de bobinado. Efectuada la composición vectorial referente a los conductores que constituyen una fase resulta ser $\xi_1 = 0{,}917$ (1).

(1) A título de ejemplo, exponemos el cálculo de dicho coeficiente. Siendo el número de ranuras $n = 117$ y el de polos $2\,p = 12$, el de ranuras por polo y fase es

$$n_{pf} = \frac{n}{m \cdot 2p} = \frac{117}{3 \cdot 12} = 3{,}25$$

El ángulo electromagnético entre ranuras asciende, pues, a

$$\gamma = \frac{180^\circ}{m \cdot n_{pf}} = \frac{180^\circ}{3 \cdot 3{,}25} = 18{,}46^\circ$$

Iniciemos ya el proceso de cálculo empezando por deducir la f.e.m. interna de la máquina cuando trabaja con la tensión nominal en bornes y corriente y cos φ nominales. Dicha tensión vale, por fase,

$$U = \frac{5500}{3} = 3180 \qquad \text{V/fase}$$

y según lo dicho sobre las caídas,

$$U_R = RI = 1{,}5\ \frac{3180}{100} = 47{,}5 \qquad \text{V/fase}$$

$$U_x = XI = 14\ \frac{3180}{100} = 445 \qquad \text{V/fase}$$

En la fig. 1.09.13 d a la izquierda se muestra el diagrama vectorial donde se han dibujado las magnitudes

$$U = 3180 \qquad \text{V/fase}$$

$$I = \frac{2000}{\sqrt{3}\ 5{,}5} = 210 \qquad \text{A/fase}$$

Como el mínimo divisor de las 117 ranuras es 3, los 6 pares de polos pueden subdividirse en tres sectores idénticos de $\frac{6}{3} = 2$ pares de polos o 4 polos. En cada uno de estos sectores que comprende un número entero de pares de polos y de ranuras, el arrollamiento se repite sucesivamente en idénticas condiciones. El factor de bobinado podemos estudiarlo, pues, para una máquina equivalente a este respecto, pero más sencilla, de 4 polos y $n = \frac{117}{3} = 39$ ranuras, tal y como aparece en la fig. 1.09.13 b, donde se ha representado completo el devanado de la fase I.

En la fig. 1.09.13 c puede verse el diagrama estrellado de los 26 vectores que la integran. Para trazarlo se ha tomado como vector de referencia el de la f.e.m. correspondiente a la ranura 20. Los conductores marcados con cruces, corresponden a f.e.m. que se suman en sentido negativo y por ello se han dibujado en el diagrama aditivo de la figura c girados previamente de 180°. Para situar cada vector angularmente basta tener en cuenta que a un paso de ranura le corresponden como hemos visto $\gamma = 18{,}46°$.

Como la estrella parcial de la fig. 1.09.13 c resulta ser simétrica respecto al eje AA, basta referir el cálculo de la resultante geométrica a una mitad, izquierda o derecha de la misma, integrada cada mitad por 13 vectores. Proyectándolos sobre el eje AA en cuestión, se obtiene

$$\begin{aligned}\text{Proyección} = 2\ (&\cos 2{,}307° + \cos 6{,}921° + \cos 11{,}535° \\ &+ \cos 16{,}150 + \cos 20{,}764° + \cos 25{,}378° \\ &+ \cos 29{,}992° + \cos 34{,}606° + \cos 39{,}220° \\ &+ \cos 43{,}834° = \\ = 2(&0{,}999 + 0{,}993 + 0{,}98) \\ &+ 0{,}960 + 0{,}935 + 0{,}903 \\ &+ 0{,}865 + 0{,}823 + 0{,}774 \\ &+ 0{,}721 = 11{,}925\end{aligned}$$

de donde

$$\xi_1 = \frac{11{,}925}{13} = 0{,}917$$

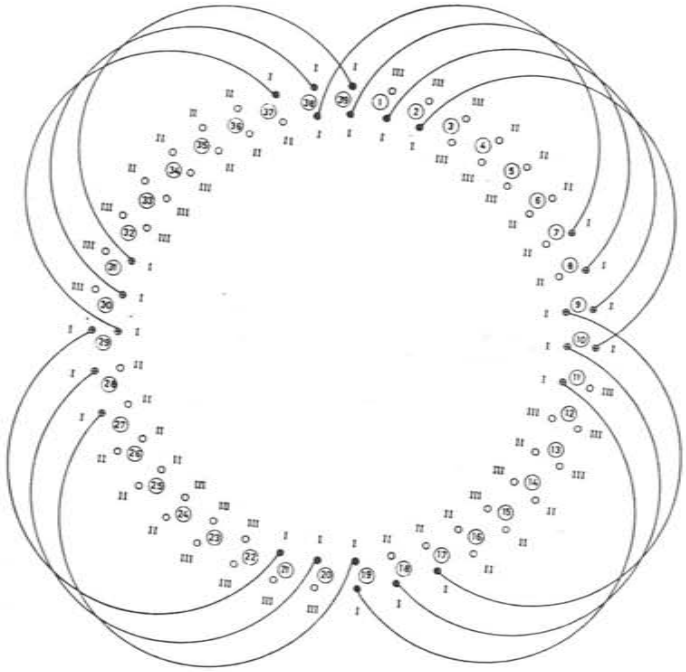


Fig. 1.09.13 b. Devanado de un alternador de paso fraccionario.

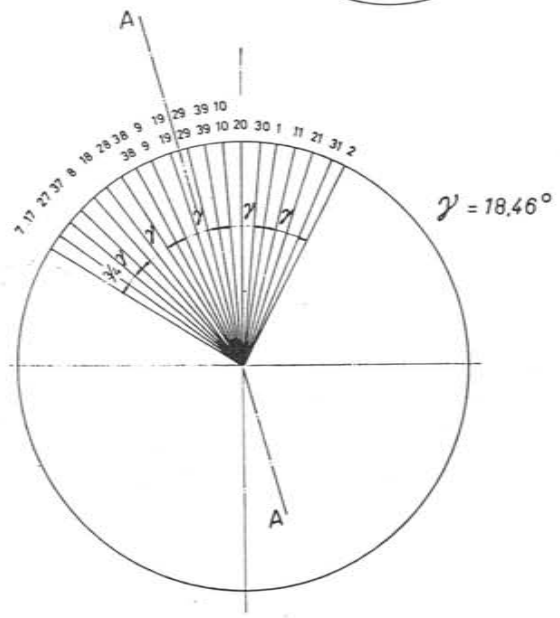


Fig. 1.09.13 c. Estrella de f.e.m. por ranuras.

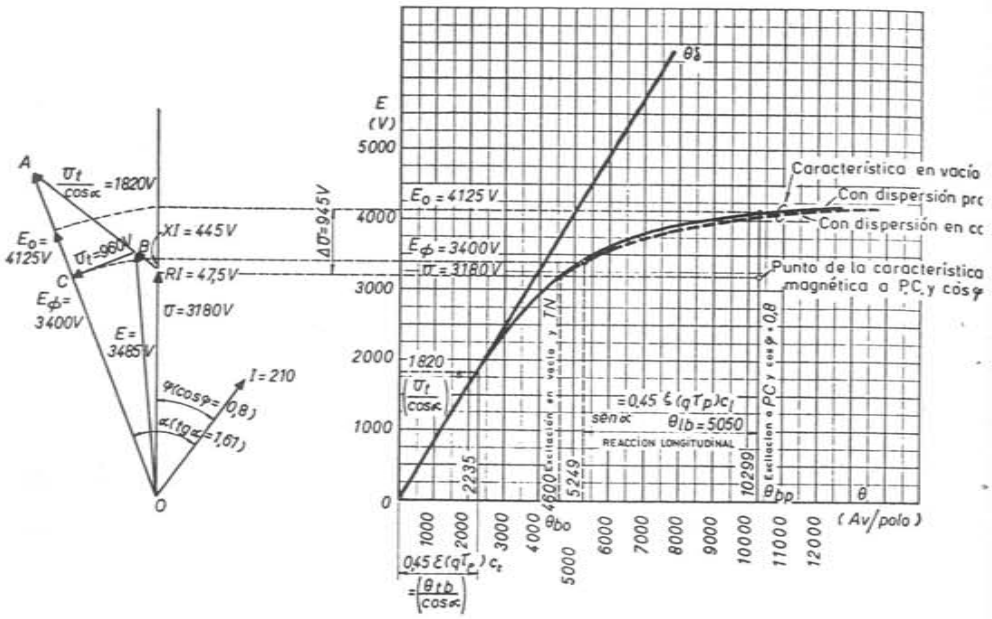


Fig. 1.09.13 d. Cálculo de la excitación en carga de un alternador de polos salientes.

con un desfase reactivo $\varphi = \text{arc cos } 0{,}8$

$RI = 47{,}5$ V/fase en fase con I

$XI = 445$ V/fase en avance de $\frac{\pi}{2}$ respecto a I

y el vector suma nos da la f.e.m. interna real de la máquina [1.09.11 b],

$$E \approx U + RI \cos\varphi + XI \text{ sen } \varphi$$

$$= 3180 + 47{,}5 \cdot 0{,}8 + 445 \cdot 0{,}6 = 3485 \text{ V/fase.}$$

Aunque éste será el valor de la f.e.m. en carga, el efecto de la reacción transversal se computa, según el diagrama de la fig. 1.09.12 a por una componente de tensión a inducir U_t que vamos a determinar.

La reacción del inducido provoca una f.m.m. fundamental, [1.07.12 b],

$$\theta_1 = 0{,}45\ \xi_1\ (q\ \tau_p) \qquad \text{Av/polo;}$$

$$q = \frac{Z\ I}{\pi\ D} = \frac{936 \cdot 210}{\pi \cdot 150} = 417 \qquad \text{Ac/cm.}$$

$$\tau_p = \frac{\pi\ D}{2\ p} = \frac{\pi \cdot 150}{12} = 39{,}3 \text{ cm:}$$

$$\theta_1 = 0{,}45 \cdot 0{,}917\ (417 \cdot 39{,}3) = 6770 \cdot \qquad \text{Av/polo.}$$

El coeficiente de reducción c_t para la componente transversal viene dado en función de $\psi = \frac{b_p}{\tau_p}$; para $\psi = \frac{260}{393} = 0{,}66$ y con entrehierro senoidal, tenemos, según la fig. 1.07.14 d,

$$c_t = 0{,}3 \qquad\qquad c_t = 0{,}88\,;$$

luego, [1.09.12 a],

$$\left(\frac{\theta_{tb}}{\cos\ \alpha}\right) = c_t\ \theta_1 = 0{,}33 \cdot 6770 = 2235 \qquad \text{Av/polo.}$$

Para conseguir el valor de U_t utilicemos las ecuaciones [1.09.12 c y d] que nos proporcionan como etapa intermedia el de $\left(\frac{U}{\cos\ \alpha}\right)$,

$$\hat{\Phi}_{\sim} = \frac{0{,}8}{K_M\ K_L\ K_C}\ \frac{\left(\frac{\theta_{tb}}{\cos\ \alpha}\right)}{\delta}\ \tau_p\ L \qquad \text{(M/polo).}$$

Para $\psi = 0{,}66$ y entrehierro senoidal la fig. 1.04.08 b curva (2) nos da $K_M = 1{,}012$.

Los canales de ventilación radial son de $\varepsilon_c = 10$ mm, longitud por canal, y con $\delta = 5$ mm de entrehierro mínimo la fig. 1.04.09 b curva (2) nos da una pérdida de longitud efectiva $\varepsilon_\delta = 2{,}9$ mm por canal; el número de canales es $n_c = 6$ y la longitud activa de inducido se reduce a, [1.04.09 a],

$$L_\delta = L - n_c\ \varepsilon_\delta = 50 - 6 \cdot 0{,}29 = 48{,}26 \text{ cm}$$

lo que da un coeficiente de corrección, [1.04.09 c],

$$K_L = \frac{L}{L_\delta} = \frac{50}{48{,}26} = 1{,}035$$

El coeficiente de CARTER K_C lo deduciremos de la fig. 1.04.10 b; para el paso de ranuras

$$\tau_\delta = \frac{\pi\ D}{n} = \frac{\pi \cdot 150}{117} = 4{,}03 \text{ cm}$$

y anchura de las mismas en el entrehierro $a_\delta = 1{,}6$ cm, (fig. 1.09.13 a), se tiene

$$\frac{\delta}{a_\delta} = \frac{0{,}5}{1{,}6} = 0{,}312; \quad \frac{a_\delta}{\tau_\delta} = \frac{1{,}6}{4{,}03} = 0{,}397 \text{ y } K_C = 1{,}17$$

Por tanto,

$$\hat{\Phi}_t = \frac{0{,}8}{1{,}012 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}17}\ \frac{2235}{0{,}5}\ 39{,}3 \cdot 50 = 5\,720\,000 \text{ M}$$

y, [1.09.12 e],

$$\left(\frac{U_t}{\cos\ \alpha}\right) = 2{,}22\ f\ \frac{\xi_1\ Z}{m}\ \hat{\Phi}_t \cdot 10^{-8} = 2{,}22 \cdot 50\ \frac{0{,}917 \cdot 963}{3}\ 5\,720\,000 \cdot 10^{-8} = 1820 \text{ V}$$

que llevamos sobre el diagrama de la fig. 1.09.13 d en BA prolongación de XI.

Uniendo A con O y bajando la perpendicular BC, tenemos determinado por este segmento la magnitud U_t = BC así como la f.e.m. E_Φ = OC a inducir por el flujo principal; E_Φ = 3400 V.

Con la recta OA queda también determinado el ángulo α.

Calculado por su tangente trigonométrica, [1.09.12 f],

$$\text{tg } \alpha = \frac{U \text{ sen } \varphi + XI + \left(\frac{U_t}{\cos \alpha}\right)}{U \cos \varphi + RI} = \frac{3180 \cdot 0{,}6 + 445 + 1820}{3180 \cdot 0{,}8 + 47{,}5} = 1{,}61$$

$$\alpha = 58{,}15°; \qquad \text{sen } \alpha = 0{,}8495; \qquad \cos \alpha = 0{,}5277$$

y por tanto la tensión transversal,

$$U = \left(\frac{U_t}{\cos \alpha}\right) \cos \alpha = 1820 \cdot 0{,}5277 = 960 \quad \text{V}$$

Deduciremos de paso a fin de aplicarla más tarde, la f.m.m. de reacción longitudinal antagónica, [1.07.14 c]

$$\theta_{la} = \theta_1 \, c_i \text{ sen } \alpha = 6770 \cdot 0{,}88 \cdot 0{,}8495 = 5050 \quad \text{Av/polo.}$$

Procedamos ahora al cálculo de la excitación para inducir la f.e.m. resultante en carga

$$E_\Phi = 3\,400 \text{ V.}$$

El flujo senoidal equivalente, [1.04.06 a], con $m = 3$ fases $f = 50$ Hz $\xi_1 = 0{,}917$ y $z = 936$ conductores totales, debe ser

$$\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \frac{m\ E}{2{,}22 \cdot f \cdot Z\ \xi_1} = \frac{3 \cdot 3400}{2{,}22 \cdot 50 \cdot 936 \cdot 0{,}917} = 0{,}107 \quad \text{Wb;}$$

la inducción máxima senoidal en el entrehierro, [1.04.08 g],

$$\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = \frac{\pi}{2} \frac{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta}{\tau_p\ L} = 1{,}57 \frac{0{,}107}{0{,}393 \cdot 0{,}5} = 0{,}855 \quad \text{T}$$

La inducción real máxima teniendo en cuenta la forma de onda, la longitud efectiva perdida por los canales de ventilación radial y la abertura de las ranuras en el entrehierro, [1.04.10 e],

$$\hat{B}_\delta = K_M\ K_L\ K_C \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = 1.012 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}17 \cdot 0{,}855 = 1{,}048 \quad \text{T}$$

Para el cálculo de las inducciones en los dientes, se aplica el coeficiente de corrección longitudinal propio de los mismos, [1.04.17 j],

$$K_{Fe} = \frac{L}{L_{Fe}} = \frac{L}{k_{Fe}\ (L - n_c\ e_c)} = \frac{50}{0{,}9\ (50 - 6 \cdot 1)} = 1{,}264.$$

Las inducciones aparentes (véase en la tabla 1.09.13 a los valores de t, part. 33 a 35), de acuerdo con la fórmula [1.04.17 g],

$$B'_{dM} = K_{Fe} \frac{\tau_\delta}{t_o} (K_M \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta) = 1{,}264 \frac{4{,}03}{2{,}43} (1{,}012 \cdot 0{,}855) = 1{,}815 \quad \text{T}$$

$$B'_{dm} = K_{Fe} \frac{\tau_\delta}{t_m} (K_M \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta) = 1{,}264 \frac{4{,}03}{2{,}61} (1{,}012 \cdot 0{,}855) = 1{,}685 \quad \text{T}$$

$$B'_{do} = K_{Fe} \frac{\tau_\delta}{t_M} (K_M \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta) = 1{,}264 \frac{4{,}03}{2{,}80} (1{,}012 \cdot 0{,}855) = 1{,}575 \quad \text{T}$$

Las cifras halladas, por ser reducidas no precisan de corrección alguna al pasar a las inducciones efectivas

$$\hat{B}_{dM} = 1{,}815 \quad \text{T}; \qquad \hat{B}_{dm} = 1{,}685 \quad \text{T}; \qquad \hat{B}_{do} = 1{,}575 \quad \text{T.}$$

Para el yugo, el flujo es prácticamente el mismo del entrehierro, [1.04.06 c],

$$\hat{\Phi}_y = \hat{\Phi}_\delta = K_f \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$$

El coeficiente de transformación del flujo senoidal en flujo de onda real lo tomamos de la fig. 1.04.06 a curva (2) y con $\psi = 0{,}66$, $K_f = \frac{1{,}1}{k_f} = 0{,}965$

$$\hat{\Phi}_\delta = \hat{\Phi}_y = 0{,}965 \cdot 0{,}107 = 0{,}1035 \quad \text{Wb}$$

La sección de yugo vale $S_y = 0{,}0436$ m² (tabla 1.09.13 a, part. 45)

y la inducción máxima en el mismo, [1.04.21 a],

$$\hat{B}_y = \frac{\hat{\Phi}_y}{2\ S_y} = \frac{0{,}1035}{0{,}0436} = 1{,}185 \quad \text{T}$$

Antes de continuar con el cálculo de las inducciones en los polos y en el núcleo polar es preciso deducir la f.m.m. que se desprende del proceso anterior para el entrehierro, dientes y yugo ya que dicha f.m.m. junto con el suplemento para contrarrestar la reacción longitudinal es la que determina el flujo de dispersión polar.

El campo en el entrehierro vale, poniendo $\hat{B}_\delta$ en G, [1.04.02 c],

$$\hat{H}_\delta = 0{,}8\ \hat{B}_\delta = 0{,}8 \cdot 10480 = 8384 \quad \text{Av/cm}$$

El campo para los dientes de chapa magnética se deduce de la curva normal de inducción correspondiente a la calidad empleada. Sea ésta la de la fig. 1.03.02 b curva (1)

para $\hat{B}_{dM} = 1{,}815$ T, $\hat{H}_{dM} = 150$ Av/cm
» $\hat{B}_{dm} = 1{,}685$ », $\hat{H}_{dm} = 74$ »
» $\hat{B}_{do} = 1{,}575$ », $\hat{H}_{do} = 38$ »

y su valor medio, [1.04,19 b],

$$\hat{H}_d = \frac{\hat{H}_{do} + 4\ \hat{H}_{dm} + \hat{H}_{dM}}{6} = \frac{150 + 4 \cdot 74 + 38}{6} = 81 \quad \text{Av/cm}$$

que vendrá a corresponder a una inducción promedio $B_t = 1{,}7$ T.

Análogamente, el yugo de chapa requiere según la misma curva (1) de la figura 1.03.02 b,

para $\hat{B}_y = 1{,}185$ T $\qquad H = 3$ Av/cm.

Conocidas las intensidades de campo, se deducen las excitaciones necesarias por polo multiplicándolas respectivamente por las longitudes del circuito magnético por polo que son

en el entrehierro $\delta = 0{,}5$ cm/polo

en los dientes $h_t = 7$ cm/polo

en el yugo, [1.04.21 d], $l_y = \dfrac{\pi\, D_{yM}}{4\hat{p}} = \dfrac{\pi \cdot 186}{4 \cdot 6} = 24{,}3$ cm/polo

y por tanto, [1.04.11 a], [1.04.19 a] y [1.04.21 c]

$$\hat{\theta}_\delta = \hat{H}_\delta\, \delta = 8384 \cdot 0{,}5 = 4192 \quad \text{Av/polo}$$
$$\hat{\theta}_d = \hat{H}_d\, h_t = 81 \cdot 7 = 567 \quad »$$
$$\hat{\theta}_y = \hat{H}_y\, l_y = 3 \cdot 24{,}3 = 73 \quad »$$
$$\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_y = 4832 \quad \text{Av/polo}$$

Sumándole los 5050 Av/polo para la reacción antagónica, resulta la excitación de dispersión polar

$$\theta_{\sigma p} = \hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_y + \theta_{ia} = 4832 + 5050 = 9882 \quad \text{Av/polo}$$

Procede ahora calcular el flujo de dispersión consiguiente. La permeancia de este circuito de dispersión, que depende únicamente de las dimensiones geométricas del inductor, se halla deducida, de acuerdo con dichas dimensiones, en la tabla 1.09.13 a partida 56 y resulta ser de

$$\Lambda_{\sigma p} = 230 \ \frac{\text{M}}{\text{Av}}$$

lo que da un flujo de dispersión con la f.e.m. de 3480 V/fase incluido el efecto de la reacción transversal, [1.04.24 g],

$$\Phi_{\sigma p} = \theta_{\sigma p}\, \Lambda_{\sigma p} = 9882 \cdot 230 = 2270\,000 \quad \text{M}$$

y un coeficiente de dispersión [1.04.23 d]

$$\sigma_\mu = 1 + \frac{\Phi_{\sigma p}}{\hat{\Phi}_\delta} = 1 + \frac{2270000}{10350000} = 1{,}219$$

El flujo en los polos pasa a ser, [1.04.23 d],

$$\Phi_p = \sigma_p\, \hat{\Phi}_\delta = 1{,}219 \cdot 0{,}1035 = 0{,}126 \quad \text{Wb}$$

lo mismo que en el núcleo, [1.04.26 a],

$$\Phi_n = \Phi_p = 0{,}126 \quad \text{Wb}$$

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

y las inducciones, en el polo de chapas de 1 mm con $k_{yt} = 0{,}95$, [1.04.25 b],

$$B_p = \frac{\Phi_p}{S_p} = \frac{0{,}126}{0{,}95 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}18} = \frac{0{,}126}{0{,}0855} = 1{,}475 \quad \text{T}$$

y en el núcleo macizo de acero fundido, [1.04.26 b],

$$B_n = \frac{\Phi_n}{2 \cdot S_n} = \frac{0{,}126}{2 \cdot 0{,}45} = 1{,}4 \quad \text{T.}$$

Las curvas de inducción normal de los materiales nos dan para los primeros, de chapa ligeramente aleada (fuertes pérdidas), fig. 1.03.02 b curva (2)

con $B_p = 1{,}475$ T $\qquad H_p = 7{,}5$ Av/cm.

y para el núcleo de acero forjado fig. 1.03.02 a

con $B_n = 1{,}4$ T $\qquad H_n = 19$ Av/cm

y siendo las longitudes respectivas,

$l_p = 18{,}5$ cm (tabla 1.09.13 a part. 59)

y, (tabla citada part. 65),

$$l_n = \frac{\pi\, D_{dM}}{4\hat{p}} = \frac{\pi \cdot 112}{24} = 14{,}65 \quad \text{cm/polo,}$$

se tiene finalmente

$$\theta_p = H_p\, l_p = 7{,}5 \cdot 18{,}5 = 139 \quad \text{Av/polo}$$
$$\theta_n = H_n\, l_n = 19 \cdot 14{,}65 = 278 \quad »$$
$$\text{Suma} = 417 \quad \text{Av/polo}$$

así como la excitación total

$$\theta_{bp} = (\theta_\delta + \theta_d + \theta_y) + (\theta_p + \theta_n) + \theta_t = 4832 + 417 + 5050 =$$
$$= 5249 + 5050 = 10299 \quad \text{Av/polo.}$$

(La máquina en cuestión, ensayada, requiere 10050 Av/polo).

Vayamos en último término al cálculo de las bobinas polares.

Hemos visto más arriba que la excitación necesaria por polo a P.C. y $\cos\varphi = 0{,}8$ ascenderá a 10 299 Av. Vamos a prever 10 750 Av para mayor seguridad. La tensión nominal elegida para la excitatriz es de 160 V, de la cual se reserva un 20 % con vistas a una posible regulación quedando, pues, disponibles $0{,}8 \cdot 160 = 128$ V, o sea

$$U_{bp} = \frac{128}{12} = 10{,}6 \quad \text{V/bobina polar}$$

La sección de cobre en las bobinas inductoras, debe ser, pues, [1.09.06 b],

$$s_{bp} = \varrho\, l_{mp}\, \frac{\theta_{bp}}{U_{bp}},$$

a la temperatura de trabajo (120° C) la resistividad vale, tabla 1.01.16 b, $\varrho = 0{,}0217 \cdot 1{,}14 = 0{,}0248 \dfrac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}}$, y siendo la espira media polar, con grueso supuesto de bobina, en total, $g_{bp} \approx 5$ cm, (fig. 1.09.13 a),

$$l_{mp} = 2\ (50 + 18) + \pi \cdot 5 = 151{,}7 \text{ cm} = 1{,}517 \text{ m},$$

resulta

$$s_{bp} = 0{,}0248 \cdot 1{,}517 \frac{10750}{10{,}6} = 38{,}2 \text{ mm}^2\text{; adoptado } 8{,}5 \times 4{,}5 = 38{,}2 \text{ mm}^2$$

Admitiendo una densidad de 3 A/mm² = Δ_{bp} la corriente de excitación sería

$$I_{bp} = 3 \cdot 38{,}2 = 114{,}6 \quad \text{A.}$$

y el número de espiras por bobina

$$N_{bp} = \frac{\theta_{bp}}{I_{bp}} = \frac{10750}{114{,}6} = 93{,}8 \approx 94 \text{ espiras/bobina}$$

1.09.14. Cálculo de las características de regulación

El cálculo de la excitación en las condiciones de carga y cos φ especificados, cualesquiera que sean estos valores, puede efectuarse directamente siguiendo el método que acabamos de exponer, sin necesidad de acudir al trazado previo de la característica magnética ni siquiera de la característica de paso, indispensable para el mismo fin cuando se trataba de máquinas de corriente continua sin devanado compensador.

Ahora bien: el análisis más a fondo de un alternador requiere, cuando menos, el estudio de sus características de regulación en servicio. Por otra parte, las comprobaciones en la plataforma de ensayo casi nunca podrán realizarse con carga real sino a través de ciertas curvas características de vacío y de corto circuito que no exigen más consumo que el de las pérdidas parciales.

Es por tanto necesario proceder también al cálculo previo de las más importantes de dichas características, entre las cuales figura en primer lugar la curva de tensión en vacío, seguida de la recta de corto circuito y de la característica devatiada.

1.09.15. Característica magnética o de tensión en vacío

Viene definida como sabemos por la expresión $E = f(\theta_{bp})$ y su cálculo no se diferencia esencialmente del que ya conocemos para las máquinas de corriente continua.

Caben dos acepciones sobre dicha característica. Una de ellas se aviene con las condiciones efectivas de excitación en vacío e interesa como índice de la tensión que puede alcanzar el alternador al fallar la carga; y la otra, de naturaleza puramente especulativa, sirve como medio de aproximar los resultados en el proceso sucesivo del cálculo de la regulación: nos referimos a la característica de vacío establecida con la dispersión en carga al objeto de establecer ulteriores deducciones en las que, si no, resulta prácticamente imposible tener en cuenta el incremento de la dispersión polar con el suplemento de f.m.m. inductora que la carga exige.

Las mismas consideraciones serían aplicables a las máquinas de corriente continua cuando se trató de los métodos que conducían al trazado de las características externas (párr. 1.09.08 a 10), pero en estas últimas máquinas la variación de la dispersión polar con la carga suele ser mucho menos intensa que en los alternadores y ello justifica el

que casi siempre pueda prescindirse de la nueva corrección aunque nada impide el tenerla en cuenta si fuera necesario.

En síntesis, la característica magnética con dispersión en carga se deduce de la misma manera que la de vacío con el coeficiente de dispersión polar propio, sin más que al calcular esta dispersión, añadir a los amperios vueltas magnetizantes para el entrehierro, diente y yugo ($\theta_\delta + \theta_d + \theta_y$) el suplemento θ_{lb} por polo necesario para contrarrestar la reacción longitudinal, como si tal suplemento existiese también en vacío.

Es claro que ello requiere proceder al cálculo previo de la reacción de inducido, según se describe en el párrafo 1.09.12 y ejemplo 1.09.13.

1.09.16. Ejemplo

Calcular la característica magnética en vacío, a) con la dispersión polar propia de la marcha en estas condiciones; b) con la dispersión polar en carga, para el alternador de 2 000 kVA, 5500 V, 500 r/m, 210 A, cos $\varphi = 0{,}8$ estudiado en el ejemplo 1.09.13.

Disponemos ya de la tabla de datos y parámetros 1.09.13 a y del cálculo mismo del ejemplo citado que nos ha proporcionado el valor de la excitación θ_{lb} para vencer la reacción antagónica a P.C. y cos $\varphi = 0{,}8 : \theta_{lb} = 5050$ Av/polo.

El proceso a seguir se muestra íntegramente en la tabla 1.09.16 a. Se han elegido para el cálculo, cuatro valores de la f.e.m. por fase, E; uno de ellos (3400 V) es el mismo de la f.e.m. a inducir por el flujo del entrehierro en las condiciones de corriente y cos φ

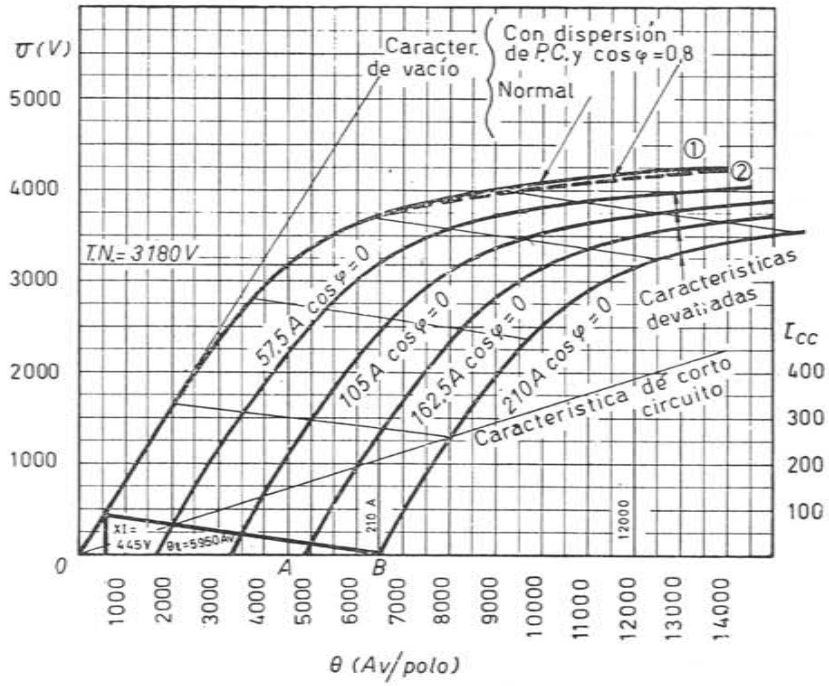


Fig. 1.09.16 a. Característica en vacío y características devatiadas de un alternador de 2000 kVA.

TABLA 1.09.16 a. Características magnéticas de un alternador en vacío con la dispersión polar propia y con la dispersión polar en carga

$P = 2000$ kVA, $U = 5500$ V, λ, $N = 500$ r/m, $f = 50$ Hz, $2p = 12$ polos, $\cos\varphi = 0{,}8$

1	E por fase	V		3 000	3400	4000	4200
2	$\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta = \dfrac{mE}{2{,}22\, f\, (\xi_1 Z)} =$	Wb	[1.04.06 a]		0,107		
3	$\hat{\Phi}_\delta = K_l\, \underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta$	»	[1.04.06 c]	0,0914	0,1035	0,122	0,128
4	$\underset{\sim}{\hat{B}}_\delta = 1{,}57\, \dfrac{\underset{\sim}{\hat{\Phi}}_\delta}{\tau_p\, L} =$	T	[1.04.08 g]		0,855		
5	$\hat{B}_\delta = K_M\, K_L\, K_\sigma\, \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta$	»	[1.04.10 e]		1,048		
6	$\hat{B}'_{dM} = (K_{Fe}\, K_M\, \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta)\, \dfrac{\tau_\delta}{t_o}$	»	[1.04.17 g]	1,6	1,815	2,14	2,24
7	$\hat{B}'_{dm} = (K_{Fe}\, K_M\, \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta)\, \dfrac{\tau_\delta}{t_m}$	»	»	1,488	1,685	1,98	2,08
8	$\hat{B}'_{do} = (K_{Fe}\, K_M\, \underset{\sim}{\hat{B}}_\delta)\, \dfrac{\tau_\delta}{t_M}$	»	»	1,390	1,575	1,855	1,945
9	$\hat{B}_{dM}$ (para $k_{tM} = 1{,}1$) =	»	fig. 1.04.18 e	1,6	1,815	2,09	2,175
10	$\hat{B}_{dm}$ (» $k_{tm} = 1{,}04$) =	»	»	1,488	1,685	1,97	2,05
11	$\hat{B}_{do}$ (» $k_{do} = 0{,}98$) =	»	»	1,39	1,575	1,85	1,94
12	$B_y = \dfrac{\hat{\Phi}_\delta}{2\, S_y}$	»	[1.04.21 a]	1,046	1,185	1,395	1,465
13	$\hat{H}_\delta = 0{,}8\, \hat{B}_\delta$ (con B_δ en G)	Av/cm	[1.04.02 c]		8834		
14	$\hat{H}_{dM} =$	»	fig. 1.03.02 b	45	150	900	1700
15	$\hat{H}_{dm} =$	»	»	20	74	300	530
16	$\hat{H}_{do} =$	»	»	3	38	170	260
17	$\hat{H}_d = \dfrac{H_{dM} + 4\, H_{dm} + H_{do}}{6} =$	»	[1.04.19 b]	23	81	378	680
18	$\hat{H}_y =$	»	fig. 1.03.02 b	3	3	8	16

	E por fase	V		3000		3400		4000		4200	
19	$\hat{\theta}_\delta = \hat{H}_\delta\, \delta =$	Av	[1.04.11 a]	3,700		4,192		4,930		5,165	
20	$\hat{\theta}_d = H_d\, h_t =$	»	[1.04.19 a]	161		567		2,646		4,760	
21	$\hat{\theta}_y = H_y\, l_y =$	»	[1.04.21 c]	73		73		194		390	
22	$(\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_y) =$	»		3934		4832		7770		10315	
23	$\theta_{\sigma p}$ en vacío $= (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_y)$	»	[1.04.24 a]	3934		4832		7770		10315	
24	$\theta_{lb} =$	»	párr. 1.09.13	5050		5050		5050		5050	
25	$\theta_{\sigma p}$ a P.C. $= (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_y) + \theta_{lb}$	»	[1.04.24 b]	8984		9882		12820		15365	
				Con σ_p en vacío	Con σ_p a P.C.	Con σ_p en vacío	Con σ_p a P.C.	Con σ_p en vacío	Con σ_p a P.C.	Con σ_p en vacío	Con σ_p a P.C.
26	$\Phi_{\sigma p} = \theta_{\sigma p}\, \Lambda_{\sigma p}\, 10^{-8} =$	Wb	[1.04.24 g]	0,009	0,0206	0,0111	0,0227	0,0178	0,0294	0,0237	0,0352
27	$\Phi_p = \hat{\Phi}_\delta + \Phi_{\sigma p} = \Phi_y =$	»	[1.04.23 a]	0,1004	0 1120	0,1146	0,1262	0,1393	0,1514	0,1517	0,1632
28	$\sigma_p = 1 + \dfrac{\Phi_{\sigma p}}{\hat{\Phi}_\delta} =$	»	[1.04.23 d]	1,098	1,226	1,107	1,219	1,146	1,241	1,195	1,275
29	$B_p = \dfrac{\Phi_p}{S_p} =$	T	[1.04.23 b]	1,17	1,31	1,34	1,475	1,635	1,77	1,77	1,91
30	$B_n = \dfrac{\Phi_y}{2\, S_n} =$	»	[1.04.26 b]	1,111	1,245	1,275	1,40	1,555	1,685	1,685	1,815
31	$H_p =$	Av/cm	fig. 1.03.02b(2)	3	3,5	3,5	7,5	24	65	55	85
32	$H_n =$ (acero forjado)	»	» 1.03.02 a	9,5	12	13	19	36	64	64	117
33	$\theta_p = H_p\, l_p =$	Av	[1.04.23 c]	56	65	65	139	444	1203	1203	1574
34	$\theta_n = H_n\, l_n =$	»	[1.04.26 d]	139	176	191	278	527	938	938	1,715
35	$\theta_p + \theta_n$	»		195	241	256	417	971	2141	2141	3289
36	$\theta_{\mu b} = (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_d + \hat{\theta}_y) + (\theta_p + \theta_n)$	Av		4129	4175	5088	5249	8741	9911	12456	13606

nominales (210 A y cos $\varphi = 0{,}8$) según el ejemplo 1.09.13. De este modo, la columna respectiva, hasta la partida 25 y su continuación por la columna menor de la derecha, referente a las condiciones del circuito magnético con la máquina en carga, hasta el final, partida 36, se ha rellenado sin necesidad de nuevos cálculos con las cifras ordenadas, tomadas del ejemplo referido. La columna menor de la izquierda, partidas 26 a 36, reproduce el cálculo del flujo en los polos y en el yugo pero con la f.m.m. de dispersión en vacío o sea para $\theta_{lb} = 0$.

De esta manera se llega a 5088 Av/polo realmente en vacío y a 5249 Av/polo también en vacío si aplicamos el flujo de dispersión en carga.

Las demás columnas, para 3 000, 4 000 y 4 200 V se deducen ya, por lo que se refiere a las inducciones en el entrehierro, en los dientes (aparentes) y en la corona del inducido o yugo, mediante simples relaciones de proporcionalidad con la f.e.m. consiguiente.

Así se completan los resultados de la última fila (n.º 36) traducidos después en las curvas (1) y (2) de la figura 1.09.16 a; la segunda, de puntos, es, justamente, la característica magnética de vacío con la dispersión de P.C. y cos $\varphi = 0{,}8$.

Trasladando ambas curvas al lado del diagrama del ejemplo n.º 1.09.13 (fig. 1.09.13 d, a la derecha) se identifican sobre las mismas los distintos puntos de la construcción vectorial y se deduce el coeficiente de regulación

$$u = \frac{\Delta U}{U} 100 = \frac{945}{3180} 100 = 29{,}7\ \%$$

Si se dispone de la característica magnética o al menos de la parte rectilínea inicial dominada por la reluctancia del entrehierro, puede omitirse el cálculo analítico de $\left(\frac{U_t}{\cos \alpha}\right)$ deduciéndose su valor gráficamente, según se expuso también en el párrafo 1.09.12. Una vez obtenida la excitación, [1.09.12 a],

$$\frac{\theta_t}{\cos \alpha} = 0{,}45\ c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p) \qquad \text{(Av/polo)}$$

se lleva como abscisa a partir del origen (2 235 Av/polo en el ejemplo 1.09.13) y se lee directamente $\left(\frac{U_t}{\cos \alpha}\right)$ sobre dicha zona rectilínea 1.820 V sobre la fig. 1.09.13 d, coincidente con la cifra hallada por cálculo.

1.09.17. Característica devatiada

Expresa la dependencia que existe entre la tensión en bornes de la máquina, U, y la excitación por polo θ_{bp}, a velocidad nominal N, manteniéndose constante la corriente nominal I pero con carga íntegramente reactiva (cos $\varphi = 0$).

$$U = f\ (\theta_{bp}). \quad \text{para } I = \text{P.C.} \qquad \cos \varphi = 0 \text{ (inductivo)}; \qquad N, \text{ constante.}$$

Interesa deducir esta característica a los efectos de poder estudiar las propiedades de la máquina en distintas condiciones de funcionamiento ya que la teoría nos enseña cómo es posible hacerlo conociendo simplemente ambas características, de vacío y devatiada.

El diagrama vectorial a tensión normal U se muestra en la figura 1.09.17 a y se deriva del anterior ya conocido, fig. 1.09.11 a, con sólo abrir el ángulo φ hasta los 90º. Dadas las magnitudes y posiciones relativas de los vectores $\overrightarrow{RI}$ y $\overrightarrow{XI}$, φ y α resultan ahora prácticamente iguales.

Al ser la reacción de inducido íntegramente longitudinal desapareciendo la componente transversal, este diagrama vale lo mismo para una máquina de rotor cilíndrico que para una máquina de polos salientes diferenciándose ambos casos nada más que por la presencia del factor c_t cuando se trata de estas últimas, en las cuales el circuito magnético sigue siendo irregular por la presencia de los espacios interpolares.

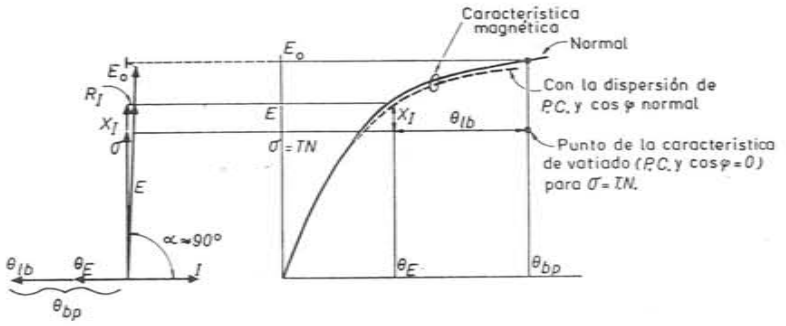


Fig. 1.09.17 a. Excitación a T.N., P.C. y cos $\varphi = 0$.

Tendremos, así, con cos $\varphi = 0$.

$$E \approx U + XI \qquad \text{[1.09.17 a]}$$

La excitación necesaria θ_E para crear esta f.e.m. se deduce de la característica magnética en vacío, corregida, para mayor precisión por el efecto de la dispersión polar en carga normal (A P.C. y cos $\varphi = 0{,}8$ por ejemplo; estrictamente, para cos $\varphi = 0$).

Sumando a θ_E los amperios vueltas necesarios para contrarrestar la reacción longitudinal con $\alpha = 90^\circ$, [1.07.14 c],

$$\theta_{lb} = 0{,}45\ c_t\ \xi_1\ (q\ \tau_p), \qquad \text{(Av/polo)} \qquad \text{[1.09.17 b]}$$

se halla

$$\theta_{bp} = \theta_E + \theta_{lb} \qquad \text{(Av/polo)}. \qquad \text{[1.09.17 c]}$$

Para los turborrotores, $c_t = 1$. En los demás casos c_t viene dado por las curvas de las figuras 1.07.14 c o d.

Los valores XI y θ_{lb} son independientes de la tensión mientras se mantengan

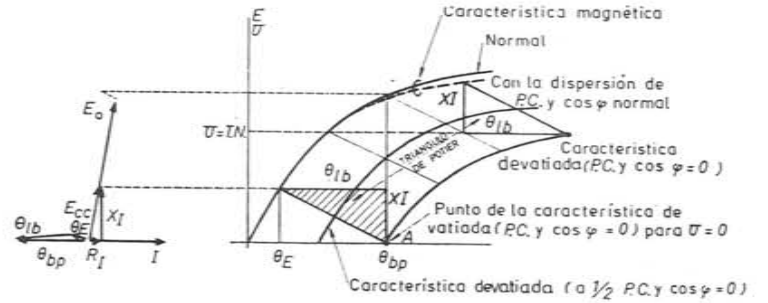


Fig. 1.09.17 b. Trazado de la característica devatiada.

constantes I = P.C. y cos $\varphi = 0$. Valen, pues, incluso cuando $U = 0$, es decir, en corto circuito ya que la corriente en tales condiciones es prácticamente reactiva (RI, muy inferior a XI).

La figura 1.09.17 b muestra el diagrama vectorial en corto circuito. A la derecha se identifica el llamado «triángulo de POTIER» con sus dos catetos XI y θ_{lb} que permanece invariable cualquiera que sea el valor de U.

La traslación de dicho triángulo paralelamente a sí mismo con un vértice permanentemente apoyado en la característica magnética de vacío con dispersión en carga nos irá señalando por el otro extremo de la hipotenusa los distintos puntos de la característica devatiada. Dividiendo la hipotenusa proporcionalmente a la intensidad I se obtienen las características devatiadas para distintas cargas.

1.09.18. Ejemplo

Trazar las curvas devatiadas correspondientes al alternador de 2 000 kVA, 5 500 V, 210 A, 50 Hz, 500 r/m. estudiado en los ejemplos 1.09.13 y 1.09.16.

Las características en vacío se han representado en la figura 1.09.16 a. Los datos complementarios son:

$$XI = 445 \text{ V (párrafo 1.09.13).}$$

$$\theta_{lb} = c_1\ \theta_1 \text{ sen } \alpha = 0{,}88 \cdot 6770 \cdot 1 = 5950 \quad \text{Av/polo (idem)}$$

Llevando estos valores sobre el gráfico de la fig. 1.09.16 a obtenemos inmediatamente las características propuestas a P.C., 3/4 P.C. y 1/2 P.C. cos $\varphi = 0$. De ellas se deduce, por ejemplo, que la excitación necesaria para mantener la T.N. a P.C. y cos $\varphi = 0$, o sea para hacer trabajar el alternador como compensador de fase (compensador sincrónico) asciende a 12 000 Av/polo [1]. Con cos $\varphi = 0{,}8$ sólo se requerían 10 299 Av/polo (párr. 1.09.13). En vacío, a T.N., 4 500 Av/polo, un 37,5 % de la primera. La corriente normal en corto circuito exige una excitación de 6500 Av/polo; el cociente $\frac{4500}{6500} = 0{,}69$ es la relación de corto circuito.

1.09.19 Característica de corto circuito permanente $I_{cc} = f(\theta)$

Como complemento necesario para el estudio de los alternadores y su verificación en la plataforma de ensayos se debe calcular la variación de la corriente de corto circuito en función de la excitación.

Las corrientes de cortocircuito I_{cc} requieren una f.e.m. prácticamente igual a la caída interna de reactancia XI_{cc} porporcional a I_{cc} y engendran una reacción antagónica $\theta_{lb} = 0{,}45\ c_1\ \xi_1\ (q_{cc}\ \tau_p)$ Av/polo, siendo nula la reacción transversal; (para los turboalternadores $c_1 = 1$);

$$q_{cc} = \frac{Z\ I_{cc}}{\pi\ D}$$

es a su vez proporcional a I_{cc}. Asimismo mientras I_{cc} no exceda de unas 4 a 5 veces la corriente nominal de P.C., límites que no suelen rebasar las máquinas sincrónicas, el valor de XI_{cc} viene a caer sobre la parte recta de la característica magnética y la excitación θ_E es igualmente proporcional a I_{cc}. La función $I_{cc} = f(\theta)$ es entonces lineal y pasa por el origen; bastando, pues, otro punto para determinarla, punto que puede ser el de I_{cc} = P.C. El trazado anterior de la característica deviatada a P.C. y cos $\varphi = 0$ nos facilita la solución por su arranque sobre el eje de abscisas.

(1) En realidad sería algo más. Para calcular la máquina como compensador sincrónico, la característica de vacío con dispersión en carga se hubiera determinado también a base de cos $\varphi = 0$ en vez de cos $\varphi = 0{,}8$, o sea, sustituyendo en la tabla 1.09.16 a part. 24 y sig. 5050 Av por 5950.

1.09.20. Ejemplo

Calcular la característica de corto circuito para el alternador de los ejemplos anteriores.

En el párrafo 1.09.13 ya anotamos que para I = P.C. = 210 A/fase, $XI = 445$ V y $\theta_{lb} = 5950$ Av/polo, lo que conducía a una excitación en corto circuito $\theta_{cc} = 6500$ Av/polo.

Llevando por esta abscisa una ordenada igual a 210 A. y uniendo el punto con el origen de coordenadas, tenemos la característica de corto circuito propuesta, fig. 1.09.16 a.

Hagamos notar que, además, esta característica es también independiente de la frecuencia lo cual puede resultar cómodo cuando se determina por ensayo. En efecto: de la igualdad $E = XI_{cc}$ o $I_{cc} = \frac{E}{X}$ se deduce que la frecuencia, al afectar proporcionalmente al numerador y al denominador de la fracción, carece de efecto sobre el cociente I_{cc}.

1.09.21. Máquinas asincrónicas polifásicas

La excitación de estas máquinas se toma de la misma red de alimentación energética, en forma de potencia reactiva, a través del arrollamiento primario, que produce simultáneamente un campo estatórico principal o activo; y mediante una corriente supletoria retrasada de $\pi/2$ con respecto a la componente $-E_1$ de U_1 para la f.e.m. interna, el campo, rotatorio también, inductor del flujo principal.

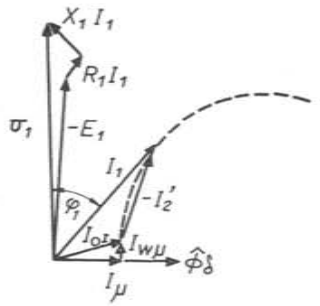


Fig. 1.09.20 a. Diagrama vectorial del primario de un motor asíncrono.

La fig. 1.09.20 a muestra el diagrama vectorial del primario de un motor asincrónico en marcha normal. Con todas las magnitudes, por fase,

U_1 es la tensión aplicada a los bornes del primario
I_1 la corriente absorbida de la línea

φ_1 el desfase en retraso de la corriente respecto a la tensión

$R_1 I_1$ la tensión para vencer la caída óhmica primaria, en fase con I,

$X_1 I_1$ la tensión, adelantada de $\frac{\pi}{2}$ respecto a I_1 necesaria para vencer la f.e.m. de reactancia primaria ya que ésta, a su vez, retrasa de $\frac{\pi}{2}$ respecto a la corriente.

$-E_1$ es la tensión necesaria para vencer la f.e.m. interna E_1

$$\vec{U}_1 = -\vec{E}_1 + \overrightarrow{R_1 I_1} + \overrightarrow{X_1 I_1}$$

Para inducir la f.e.m. E_1 se necesita un flujo $\hat{\Phi}_\delta$, y por consiguiente, una corriente magnetizante adelantada de $\frac{\pi}{2}$ respecto a E_1 o retrasada del mismo ángulo respecto a $-E_1$. Por tanto,

$\hat{\Phi}_\delta$ es el flujo del entrehierro en carga

I_μ la corriente magnetizante, por fase, necesaria para creer este flujo, retrasada de $\frac{\pi}{2}$ respecto a $-E_1$.

$I_{w\mu}$ la pequeña corriente vatiada, en fase con $-E_1$ absorbida para suministrar las pérdidas en el hierro.

I_{oI} la corriente resultante de las de pérdidas $I_{w\mu}$ y magnetizante I_μ. Se diferencia de la corriente de vacío I_o del motor sólo por el efecto de las caídas óhmicas $R_1 I_1$ y reactiva $X_1 I_1$ que reducen la f.e.m. en carga hasta E, y por el de las pérdidas mecánicas.

$$\overrightarrow{I_{oI}} = \overrightarrow{I_\mu} + \overrightarrow{I_{w\mu}}$$

$$I_{oI} = \sqrt{I^2_\mu + I^2_{w\mu}}$$

En valor absoluto

$$I_{oI} \approx I_\mu$$

$-I'_2$ Componente de carga por fase primaria para compensar la corriente de carga secundaria.

$$\vec{I}_1 = -\vec{I}'_2 + \vec{I}_{oI}$$

Aproximadamente

$$\vec{I}_1 = -\vec{I}'_2 + \vec{I}_\mu$$

Tratemos de calcular ahora el valor de la corriente magnetizante por fase, I_μ, necesaria para crear el flujo inductor $\hat{\Phi}_\delta$. Este es el resultado de la f.m.m. rotatoria debida al sistema de corrientes polifásicas primarias I_μ.

La fundamental de dicha f.m.m., único armónico que interesa, puesto que los de orden más elevados actúan como campos de dispersión, viene dada por, [1.07.12 b],

$$\hat{\theta}_\mu = 0{,}45\ \xi_1\ (q_\mu\ \tau_p) \qquad \text{(Av/polo) (máquinas trifásicas)}$$

o

$$\hat{\theta}_\mu = 0{,}9\ \xi_1\ (q_\mu\ \tau_p) \qquad \text{» (» bifásicas)}$$

y este valor debe igualar al de la excitación necesaria por polo para mantener el flujo $\hat{\Phi}_\delta$ correspondiente a la f.e.m. E.

(En todo el desarrollo asociado con estos cálculos, el índice adicional (1) o (2) sirve para distinguir las dimensiones o datos referentes al primario y las del secundario).

Por q_μ se entiende la carga lineal debida a la corriente magnetizante misma

$$q_\mu = \frac{Z_1\ I_\mu}{\pi\ D} \qquad \text{(Ac/cm)} \qquad [1.09.20\ a]$$

En otros términos, para los motores trifásicos, [1.07.12 a], con $m = 3$

$$\boxed{I_\mu = \frac{\hat{\theta}_\mu}{1{,}35 \cdot \xi_1\ Z_{n(1)}\ n_{pf(1)}}} \qquad \text{(A eficaces)} \qquad [1.09.20\ b]$$

El valor de $\hat{\theta}_\mu$ se deducirá previa determinación de la f.e.m. E en carga para la cual a estos cálculos debe anteceder el de las caídas de resistencia y de reactancia, $R_1 I_1$ y $X_1 I_1$, en el primario, a fin de trazar el diagrama de la fig. 1.09.20 a, lo cual exige la admisión provisional de unas ciertas magnitudes ($\cos \varphi_1$ y rendimiento η) que deben ser comprobadas más tarde pero cuyos valores aproximados son conocidos e incluso para ciertos tipos industriales se hallan normalizados según expondremos a su debido tiempo.

Será incluso conveniente calcular I_μ tanto para la f.e.m. E_1 en carga como para dicha f.e.m. E_{10} en vacío a fin de comprobar el resultado de I_μ en la plataforma de ensayos ya que la intensidad de la corriente magnetizante no puede medirse con el motor en carga, aparte el que esta última prueba de carga real no siempre es posible realizarla.

1.09.22. Ejemplo

Calcular la corriente magnetizante en carga de un motor trifásico asincrónico de 6 CV, 220/380 V, Δ/λ, 50 Hz, 1500 r/m. sincrónicas.

Las dimensiones del circuito magnético se dan en la fig. 1.09.21 a.

Los datos de bobinado y la deducción de los parámetros y dimensiones auxiliares se encuentran dispuestos ordenadamente en la tabla 1.09.21 a.

TABLA 1.09.21 a. Cálculo de la corriente de excitación de un motor trifásico asincrónico. Datos y parámetros.

Part	Motor trifásico asincrónico de 6 CV, 220/380 V, 50 Hz, 1 500 r/m sincrónicas
1	F.e.m., en carga $E_{f1} = 200$ V/fase
2	$D = 111$ mm
3	$L = 150$ »
4	$n_1 = 24$ ranuras $\quad n_{t1} = 30$ ran
5	$Z_{n(1)} = 38$ cond/ran.
6	$Z_1 = n_1 Z_{n(1)}\ 24 \cdot 38 = 912$ cond
7	$n_{pf(1)} = \dfrac{n_1}{2\,p\,m_1} = \dfrac{24}{4 \cdot 3} = 2 : \xi_{g(1)} = 0{,}966$ (tablas 1.04.13 a y b)
8	$\dfrac{y_{n(1)}}{n_{p(1)}} = \dfrac{6}{6} : \xi_{y(1)} = 1$. (tabla 1.04.15a)
9	$\xi_1 = \xi_{d(1)}\,\xi_{y(1)} = 0{,}966$
10	$\tau_p = \dfrac{\pi D}{2\,p} = \dfrac{\pi \cdot 11{,}1}{4} = 8{,}71$ cm
11	$k_s = \dfrac{\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_{\delta(1)} + \hat{\theta}_{\delta(2)}}{\hat{\theta}_\delta} = 1{,}4$ (supuesto) [1.04.06f]
12	$K_M = 0{,}92$ (fig. 1.04.08 b, curva 4)
13	$K_f = 1{,}024$ (» 1.04.06 a, » 4)
14	$\delta = 0{,}35$ mm
15	$n_{c(1)} = 0 \qquad n_{c(2)} = 0$
16	$\varepsilon_{c(1)} = 0 \qquad \varepsilon_{c(2)} = 0$
17	$\varepsilon_{\delta(1)} = 0 \qquad \varepsilon_{\delta(2)} = 0$ (fig. 1.04.09-b)
18	$L_\delta = L - n_{c(1)}\,\varepsilon_{\delta(1)} - n_{c(2)}\,\varepsilon_{\delta(2)} = 15 - 0 = 15$ cm [1.04.09 b]
19	$K_L = \dfrac{L}{L_\delta} = \dfrac{15}{15} = 1$ [1.04.09 c]
20	$\tau_{\delta(1)} = \dfrac{\pi D}{n_1} = \dfrac{\pi \cdot 11{,}1}{24} = 1{,}452$ cm
21	$\tau_{\delta(2)} = \dfrac{\pi D}{n_2} = \dfrac{\pi \cdot 11.1}{30} = 1{,}162$ cm
22	$a_{\delta(1)} = 0{,}25$ cm $\qquad a_{\delta(2)} = 0{,}1$ cm
23	$\dfrac{\delta}{a_{\delta(1)}} = \dfrac{0{,}35}{2{,}5} = 0{,}14$
24	$\dfrac{a_{\delta(1)}}{\tau_{\delta(1)}} = \dfrac{2{,}5}{14{,}52} = 0{,}1725$ $\Big\}\ K_{C(1)} = 1{,}1$ (fig. 1.04.10b)
25	$\dfrac{\delta}{a_{\delta(2)}} = \dfrac{0{,}35}{1} = 0{,}35$
26	$\dfrac{a_{\delta(2)}}{\tau_{\delta(2)}} = \dfrac{1}{11{,}63} = 0{,}086$ $\Big\}\ K_{C(2)} = 1{,}03$ (fig. 1.04.10 b)
27	$K_C = K_{C(1)} \cdot K_{C(2)} = 1{,}1 \cdot 1{,}03 = 1{,}13$ [1.04.10 c]
28	$h_{t(1)} = 1{,}75$ cm $\qquad h_{t(2)} = 1{,}6$ cm
29	$\tau_{M(1)} = \dfrac{\pi D_{M(1)}}{n_{(1)}} = \dfrac{\pi \cdot 14{,}6}{24} = 1{,}91$ cm
30	$\tau_{m(1)} = \dfrac{\pi D_{m'1)}}{n_{(1)}} = \dfrac{\pi \cdot 13{,}05}{24} = 1{,}71$ »
31	$\tau_{o(1)} = \dfrac{\pi\, D_{o(1)}}{n_{(1)}} = \dfrac{\pi \cdot 11{,}5}{24} = 1{,}51$ cm
32	$t_{M(1)} = \tau_{M(1)} - a_{M(1)} = 1{,}91 - 1{,}22 = 0{,}69$ cm
33	$t_{m(1)} = \tau_{m'1)} - a_{m(1)} = 1{,}71 - 1{,}02 = 0{,}69$ »
34	$t_{o(1)} = \tau_{o(1)} - a_{o(1)} = 1{,}51 - 0{,}82 = 0{,}69$ »
35	$\tau_{M(2)} = \dfrac{\pi\, D_{M(2)}}{n_{(2)}} = \dfrac{\pi \cdot 10{,}63}{30} = 1{,}113$ cm
36	$\tau_{m(2)} = \dfrac{\pi\, D_{m(2)}}{n_{(2)}} = \dfrac{\pi \cdot 9{,}23}{30} = 0{,}966$ »
37	$\tau_{o(2)} = \dfrac{\pi \cdot D_{o(2)}}{n_{(2)}} = \dfrac{\pi \cdot 7{,}83}{30} = 0{,}819$ »
38	$t_{M(2)} = \tau_{M(2)} - a_{M(2)} = 1{,}113 - 0{,}56 = 0{,}553$ cm
39	$t_{m(2)} = \tau_{m(2)} - a_{m(2)} = 0{,}966 - 0{,}415 = 0{,}551$ »
40	$t_{o(2)} = \tau_{o(2)} - a_{o(2)} = 0{,}819 - 0{,}270 = 0{,}549$ »
41	$L_h = L - n_c\ \varepsilon_c = 15 - 0 \cdot 0 = 15$ cm [1.04.17 d]
42	$k_{Fe} = 0{,}9$
43	$L_{Fe} = k_{Fe}\,L_h = 0{,}9 \cdot 15 = 13{,}5$ cm [1.04.17 e]
44	$K_{Fe} = \dfrac{L}{L_{Fe}} = \dfrac{15}{13{,}5} = 1{,}111$ [1.04.17 j]
45	$k_{M(1)} = K_{Fe}\dfrac{\tau_{M(1)}}{t_{M(1)}} - 1$ [1.04.17 n]
46	$k_{tm(1)} = K_{Fe}\dfrac{\tau_{m'1)}}{t_{m(1)}} - 1$ »
47	$k_{to(1)} = K_{Fe}\dfrac{\tau_{o(1)}}{t_{o(1)}} - 1$ »
48	$k_{tM(2)} - K_{Fe}\dfrac{\tau_{M(2)}}{t_{M(2)}} - 1$ »
49	$k_{tm(2)} = K_{Fe}\dfrac{\tau_{m(2)}}{t_{m(2)}} - 1$ »
50	$k_{to(2)} = K_{Fe}\dfrac{\tau_{o(2)}}{t_{o(2)}} - 1$ »
51	$h_y = 1{,}6$ cm
52	$S_y = L_{Fe}\,h_y = 13{,}5 \cdot 1{,}6 = 21{,}6$ cm² [1.04.21 b]
53	$l_y = \dfrac{\pi\, D_{yM}}{4\,p} = \dfrac{\pi \cdot 17{,}8}{4 \cdot 2} = 7$ cm [1.04.21 d]
54	$h_n = 1{,}915$ cm
55	$S_n = L_{Fe}\,h_n = 13{,}5 \cdot 1{,}915 = 25{,}8$ cm²
56	$l_n = \dfrac{\pi\, D_{o(2)}}{4\,p} = \dfrac{\pi \cdot 7{,}83}{4 \cdot 2} = 3{,}08$ cm [1.04,26 c]

Para calcular la f.e.m. en carga que figura como primera partida, seguiremos el proceso a continuación:

Rendimiento (supuesto) $\eta = 0{,}83$
Factor de potencia (supuesto) $\cos \varphi_1 = 0{,}84$
Corriente de línea a 220 V en A

$$I_1 = \frac{0{,}736 \cdot 6}{\sqrt{3} \cdot 0{,}220 \cdot 0{,}83 \cdot 0{,}84} = 16{,}6 \quad \text{A}$$

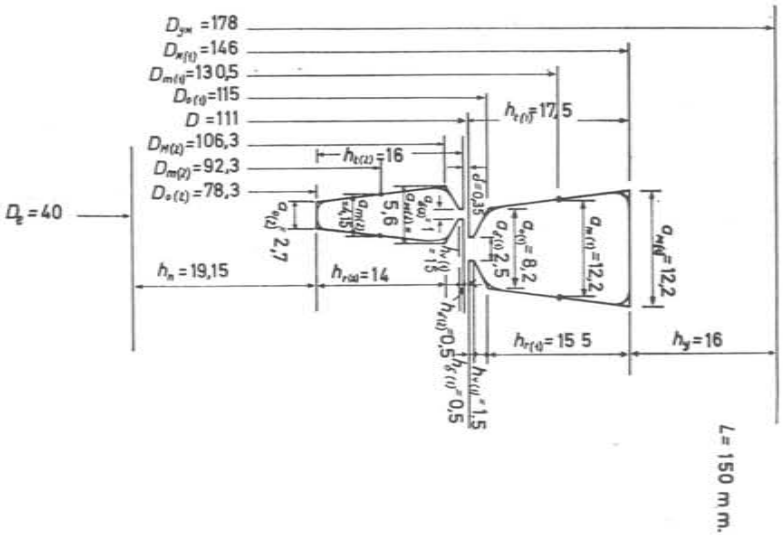


Fig. 1.09.21 a. Dimensiones del circuito magnético de un motor trifásico asíncrono de 6 CV 220/380 VΔ/λ, 50 Hz, 1 500 r/m, vel. sincrónica.

Corriente por fase

$$I_{f1} = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{16{,}6}{\sqrt{3}} = 9{,}6 \quad \text{A}$$

La caída de resistencia puede calcularse, conocido el bobinado y la corriente por fase. Sea su valor a la temperatura de régimen (40° C ambiente + 75° C de incremento; total 115° C)

$$R_1\ I_{f1} = 4{,}5\ \%\ \text{de la T.N.}$$

$$R_1\ I_{f1} = 4{,}5\ \frac{220}{100} = 9{,}9 \quad \text{V/fase}$$

Análogamente los datos constructivos de la máquina permiten calcular la caída de reactancia primaria que asciende a

$$X_1\ I_{f1} = 10\ \%\ \text{de la tensión nominal} = 10\ \frac{220}{100} = 22 \quad \text{V/fase}$$

El diagrama vectorial de la fig. 1.09.21 b nos proporciona el valor de la f.e.m. en carga: con suficiente aproximación

$$E_1 \approx U_1 - (X_1\, I_{f1})\ \text{sen}\ \varphi_1 - (R_1\, I_{f1})\ \cos\varphi_1 \qquad \text{[1.09.21 a]}$$

$$= 220 - 22 \cdot 0{,}543 - 9{,}9 \cdot 0{,}84 \approx 200 \quad \text{V.}$$

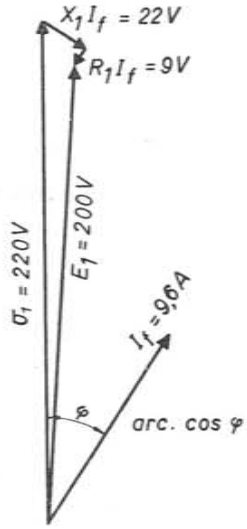


Fig. 1.09.21 b. F.e.m. interna de un motor sincrónico.

La tabla 1.09.21 a reúne ordenados, como hemos dicho, los datos necesarios para el cálculo de la excitación en carga y en la tabla 1.09.21 b se ha procedido a efectuar estos cálculos progresivamente.

En principio el método no se diferencia del que se sigue para las máquinas de continua o los alternadores. Sólo cabe hacer notar que los coeficientes K_M y K_f para la onda de flujo dependen aquí del coeficiente de saturación $k_\delta = \dfrac{\theta_\delta + \theta_{d(1)} + \theta_{d(1)}}{\theta_\delta}$ cuyo valor es necesario admitirlo a priori y rectificarlo después tras un primer tanteo. La corriente magnetizante dada por la fórmula [1.09.20 b] asciende a 3,83 A/fase (tabla 1.09.21 b, part. 37) lo que equivale a

$$\frac{I_\mu}{I_{f1}}\ 100 = \frac{3{,}93}{9{,}6}\ 100 = 40\ \%$$

de la corriente de P.C.

La corriente de vacío será algo más elevada debido a la disminución de las caídas de tensión en estas condiciones, lo cual hace aumentar la f.e.m. interna, y a la presencia de la corriente de pérdidas en vacío. Si quisiéramos deducir la primera de estas dos componentes, corriente magnetizante en vacío podríamos repetir las operaciones de la tabla 1.09.21 b para la f.e.m. correspondiente a unas caídas reducidas aproximadamente al 50 % de las de plena carga pero con un desfase $\varphi \approx 90°$, es decir, partiendo de

$$E = 220 - 0{,}5 \cdot 22 = 209 \quad \text{V}$$

en lugar de 200 V de f.e.m. Las inducciones teóricas son proporcionales a la f.e.m.; los coeficientes de corrección K_M y K_f aumentan al ser mayor la saturación de la máquina.

TABLA 1.09.21 b. Cálculo de la corriente magnetizante de un motor trifásico asincrónico

	II	III	IV	V	VI
	F.e.m. E			200 V	
1	$\hat{\Phi}_\delta = \dfrac{m_1 E_1}{2{,}22 f(\xi_1 Z_1)} = \dfrac{3.200}{2{,}22.50 \cdot (0{,}966.912)} =$	[1.04.06 a]	Wb	0,00613	
2	$\hat{B}_\delta = 1{,}57\ \dfrac{\hat{\Phi}_\delta}{\tau_p\, L} = 1{,}57\ \dfrac{0{,}00613}{0{,}0871 \cdot 0{,}15} =$	[1.04.08 g]	T	0,736	
3	$\hat{B}_\delta = (K_M K_L K_C)\ \hat{B}_\delta = 0{,}92 \cdot 1 \cdot 1{,}13 \cdot 0{,}736 =$	[1.04.10 e]	T	0,765	
4	$\hat{B}'_{o(1)} = (K_M\, K_{Fe}) \left(\hat{B}_\delta\ \dfrac{\tau_{\delta(1)}}{t_{M(1)}}\right) =$	[1.04.17 g]			
5	$\hat{B}'_{m(1)} = (K_M\, K_{Fe}) \left(\hat{B}_\delta\ \dfrac{\tau_{\delta(1)}}{t_{m(1)}}\right) = (0{,}92 \cdot 1{,}111) \times$ $\times \left(0{,}736\ \dfrac{1{,}452}{0{,}69}\right) =$	»	T	1,582	
6	$\hat{B}'_{M(1)} = (K_M\, K_{Fe}) \left(\hat{B}_\delta\ \dfrac{\tau_{\delta(1)}}{t_{o(1)}}\right) =$	»			
7	$\hat{B}'_{o(2)} = (K_M\, K_{Fe}) \left(\hat{B}_\delta\ \dfrac{\tau_{\delta'(2)}}{t_{M(2)}}\right) =$	»			
8	$\hat{B}'_{m(2)} = (K_M\, K_{Fe}) \left(\hat{B}_\delta\ \dfrac{\tau_{\delta(2)}}{t_{m(2)}}\right) = (0{,}92 \cdot 1{,}111) \times$ $\times \left(0{,}736\ \dfrac{1{,}162}{0{,}551}\right) =$	»	T	1,586	
9	$\hat{B}'_{M(2)} = (K_M\, K_{Fe}) \left(\hat{B}_\delta\ \dfrac{\tau_{\delta(2)}}{t_{o(2)}}\right) =$	»			
10	$\hat{B}_{o(1)}$ (para $k_{t\,M(1)} =$)	fig. 1.04.18 e			
11	$\hat{B}_{m(1)}$ (» $k_{t\,m(1)} =$)	»	T	1,582	
12	$\hat{B}_{M(1)}$ (» $k_{t\,o(1)} =$)	»			
13	$\hat{B}_{o(2)}$ (» $k_{t\,M(2)} =$)	»			
14	$\hat{B}_{m(2)}$ (» $k_{t\,m(2)} =$)	»	T	1,586	
15	$\hat{B}_{M(2)}$ (» $k_{t\,o(2)} =$)	»			
16	$\hat{H}_\delta = 0{,}8\ \hat{B}_\delta = 0{,}8 \cdot 7650$	[1.04.02 c]	Av/cm	6120	
17	$\hat{H}_{o(1)} =$	Fig. 1.03.02 b calidad intermedia			
18	$\hat{H}_{m(1)} =$		Av/cm	25	
19	$\hat{H}_{M(1)} =$				
20	$\hat{H}_{o(2)} =$				
21	$\hat{H}_{m(2)} =$	»	Av/cm	26	
22	$\hat{H}_{M(2)} =$				

I	II	III	IV	V	VI
	F. e. m. E			200 V	
23	$H_{d(1)} = \dfrac{H_{o(1)} + 4\ H_{m(1)} + H_{M(1)}}{6} =$	[1.04.19 b]	Av/cm	25	
24	$H_{d(2)} = \dfrac{H_{o(2)} + 4\ H_{m(2)} + H_{M(2)}}{6} =$	»	Av/cm	26	
25	$\hat{\theta}_\delta = H_\delta\ \delta = 6\,120 \cdot 0{,}035 =$	[1.04.11 a]	Av	214	
26	$\hat{\theta}_{d(1)} = H_{d(1)}\ h_{t(1)} = 25 \cdot 1{,}75 =$	[1.04.19 a]	Av	44	
27	$\hat{\theta}_{d(2)} = H_{d(2)}\ h_{t(2)} = 26 \cdot 1{,}60 =$	»	Av	42	
28	$\hat{\theta}_\delta + \theta_{d(1)} + \theta_{d(2)} =$		Av	300	
29	$k_s = \dfrac{\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_{d(1)} + \hat{\theta}_{d(2)}}{\hat{\theta}_{(1)}} = \dfrac{300}{214} = 1{,}4$ *				
30	$\hat{B}_y = K_f \left(\dfrac{\hat{\Phi}_\delta}{2\ S_y}\right) = 1.024\ \dfrac{0{,}00613}{2 \cdot 0{,}00216} =$	[1.04.21 a]	T	1,45	
31	$\hat{B}_n = K_f \left(\dfrac{\hat{\Phi}_\delta}{2\ S_n}\right) = 1{,}024\ \dfrac{0{,}00613}{2.00258} =$	[1.04.26 b]	T	1,22	
32	$\hat{H}_y =$	Fig. 1.02.03 b calidad media	Av/cm	10	
33	$\hat{H}_n =$			3	
34	$\hat{\theta}_y = \hat{H}_y\ l_y = 10 \cdot 7 =$	[1.04.21 c]	Av	70	
35	$\hat{\theta}_n = \hat{H}_n\ l_n = 3 \cdot 3{,}08 =$	[1.04.26 d]	Av	10	
36	$\hat{\theta}_\mu = (\hat{\theta}_\delta + \hat{\theta}_{d(1)} + \hat{\theta}_{d(2)}) + (\hat{\theta}_y + \hat{\theta}_n) = 300 + 7010$		Av	380	
37	$I_\mu = \dfrac{\hat{\theta}_\mu}{1{,}35\ \xi_1\ Z_{n1}\ n_{p(1)}} = \dfrac{380}{1{,}35 \cdot 0{,}966 \cdot 38 \cdot 2}$	[1.09.20 b]	A/fase	3,83	

1.10 LAS PÉRDIDAS EN LAS MÁQUINAS ELÉCTRICAS

Las pérdidas que se producen en las máquinas eléctricas son fuentes de calentamiento que elevan la temperatura de sus diversos órganos; cojinetes, colectores, devanados, aislamientos, paquetes de chapa, etc., y constituyen por lo general la causa limitadora de la potencia que podría obtenerse de la máquina en cuestión.

Estas mismas pérdidas implican un gasto de energía no utilizada que encarece el servicio y, por tanto, repercute desfavorablemente en la economía de la explotación. Atendiendo a la naturaleza de dichas pérdidas y su localización cabe estudiarlas aisladamente como

- Pérdidas en el hierro
- Pérdidas en los bobinados, generalmente, de cobre
- Pérdidas adicionales varias
- Pérdidas mecánicas

Las pérdidas dieléctricas carecen de importancia en las máquinas industriales.

1.10.01. Pérdidas en el hierro. Clasificación

Son debidas a las variaciones de flujo y pueden subdividirse en pérdidas por histéresis y pérdidas por corrientes de FOUCAULT (c.d.F).

Tanto unas como otras se hallan afectadas como suplemento por la concentración autoinductiva del flujo y por la distribución irregular de la inducción sobre cada sección plana del circuito magnético debido a las necesidades constructivas de la máquina.

Hay que considerar también otras pérdidas adicionales producidas por el flujo inductor como son, las pérdidas superficiales que provienen de la pulsación del flujo en las superficies polares, las pérdidas adicionales de origen

similar en la masa de los dientes y las pérdidas adicionales por asimetrías de los campos rotatorios (campos elípticos).

Los flujos de dispersión son causa a su vez de pérdidas adicionales en el hierro que sólo se presentan en carga.

1.10.02. Pérdidas por histéresis

Las *pérdidas de potencia* por unidad de volumen o de peso, con una distribución uniforme de la inducción en la masa ferromagnética, son proporcionales como sabemos (párr. 1.03.10 a) a la superficie A_h del ciclo de histéresis y a la frecuencia o número de ciclos por segundo f.

Según las primeras investigaciones, la superficie A_h de la curva de histéresis venía a resultar proporcional a la potencia 1,6 de la *inducción máxima* uniforme $\hat{B}$ en la sección transversal del hierro, independientemente de la ley de variación temporal de la misma; los estudios posteriores de RICHTER sobre las chapas aleadas industriales mostraron una relación entre A_h y $\hat{B}$ de la forma

$$A_h = a\ \hat{B} + b\ \hat{B}^2$$

de constantes a y b particulares para cada tipo de chapa; pero con inducciones $B > 1$ T como siempre se encuentran en las máquinas eléctricas, el término lineal $a\ \hat{B}$ resulta despreciable al lado de $b\ \hat{B}^2$, pudiendo escribirse, prácticamente, [1.03.10 a],

$$p_h = k_h\ f\ \hat{B}^2 \left(\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right) \qquad [1.10.02\ \text{a}]$$

Con f en Hz y $\hat{B}$ en T, k_h varía entre 0,028 para la chapa fuertemente aleada (tipo comercial de 1,7 W) y 0,048 (tipo comercial de 3,6 W) todas ellas destinadas a máquinas rotativas.

Las pérdidas específicas (p_h) por histéresis dependen, pues, de la inducción máxima y de la frecuencia pero son independientes de la forma de onda temporal o espacial del flujo y del espesor de la chapa.

1.10.03. Pérdidas por corrientes de Foucault

Según se demostró en el párrafo 1.03.10 b, estas pérdidas de potencia en $\frac{\text{W}}{\text{kg}}$, con inducción uniforme alterna *de variación senoidal en el tiempo* son proporcionales al cuadrado de la inducción máxima $\hat{B}$, de la frecuencia f y del espesor τ de las chapas, [1.03.10 b],

$$p_f = k_F\ (f\ \hat{B}\ \tau)^2 \left(\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right) \qquad [1.10.03\ \text{a}]$$

Esta ley resulta evidente observando que las pérdidas por c.d.F. no son sino pérdidas por efecto JOULE sobre los circuitos elementales recorridos por las corrientes parásitas, y si la resistencia R de dichos circuitos se supone constante, las pérdidas de potencia en cada uno de dichos circuitos será de la forma

$$p = \frac{E^2}{R} = k\ E^2$$

representando por E la f.e.m. local de a.i. debida al flujo alterno concatenado. Estas f.e.m. serán proporcionales a la frecuencia f y al flujo Φ abrazado, y Φ a su vez, será proporcional a la inducción $\hat{B}$ y a la sección del circuito limitado por la línea sobre la cual se cierra la f.e.m. E. Si este circuito, supuesto rectangular, es de gran longitud con respecto a su anchura o grueso de la chapa τ el flujo variará proporcionalmente a f, $\hat{B}$ y τ, mientras que la resistencia R permanecerá como hemos dicho prácticamente constante. Siendo así, E proporcional a f, $\hat{B}$ y τ, las pérdidas p, proporcionales a E^2, variarán como el cuadrado de estas tres magnitudes (fórmula [1.10.03. a])

Poniendo τ en mm, f en Hz y $\hat{B}$ en T, k_F oscila entre $0{,}45 \cdot 10^{-3}$ para la chapa comercial denominada de 1,7 W y $2 \cdot 10^{-3}$ para la de 3,6 W antes aludidas. Estas cifras sólo valen con chapas perfectamente aisladas y sin mecanizado alguno susceptible de producir rebarbas en las mismas; son, pues, cifras teóricas de partida para el cálculo de las pérdidas en el hierro.

1.10.04. Efecto de la concentración autoinductiva del flujo en las piezas ferromagnéticas

La f.e.m. de autoinducción engendrada por la variación del flujo crea en la masa ferromagnética las corrientes circulatorias causantes de las pérdidas por efecto de FOUCAULT, al mismo tiempo que se oponen a la variación

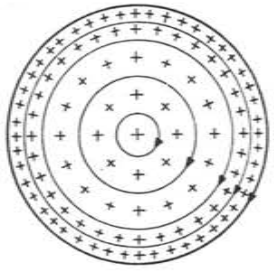


Fig. 1.10.04 a. Distribución de las c.d.F. y del flujo en un cilindro magnético.

del flujo y dicha oposición es tanto más efectiva cuanto mayor el número de líneas de corriente que rodea a cada filamento magnético. Este conjunto de líneas es máximo para los filamentos centrales del circuito magnético (fig. 1.10.04 a) de tal modo que la inducción queda muy reducida en las proximidades del eje de la sección, deslizándose el flujo hacia la zona periférica de la misma. Con ello se altera la uniformidad supuesta del flujo, y aparecen, por una parte, inducciones locales en la periferia muy superiores al valor medio, y, por otra, resulta un aumento de la resistencia efectiva para las corrientes circulatorias, concentradas también en la zona exterior.

Como consecuencia, desde el punto de vista de las pérdidas, el circuito magnético macizo viene a resultar equivalente a otro, hueco, de la misma configuración exterior a manera de tubo de espesor ε dado por

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^7\,\rho}{f\,\mu}}\,(\text{mm})$$

con ρ en $\dfrac{\Omega\,\text{mm}^2}{\text{m}}$, f en Hz, y μ en valor relativo respecto al aire.

Así, para el hierro de resistividad 0,12 $\dfrac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}}$ si trabaja con una permeabilidad $\mu = 2\,000$ a la frecuencia f de 50 Hz

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^7\cdot 0{,}12}{50.2000}} = 0{,}55\ \text{mm}$$

No resulta, pues, práctico emplear chapas de un orden de espesor superior a los 0,5 mm, cuando la frecuencia es de 50 Hz, si se trabaja con inducciones que den una permeabilidad del orden de magnitud señalado.

El aumento de la inducción máxima hace subir las pérdidas específicas medias por histéresis y asimismo tiende a incrementar las pérdidas por corrientes de FOUCAULT, proporcionales unas y otras al cuadrado de $\hat{B}$ pero el aumento simultáneo de la resistencia aparente (dado el pequeño grueso de tubo equivalente) aunque no tiene efecto sobre las primeras; contrarresta sobradamente, por lo general, el incremento de la inducción en lo que respecta a la última clase de pérdidas.

El estudio de este fenómeno, bastante complejo, conduce a las siguientes conclusiones:

Si representamos por ζ una magnitud sin dimensiones, definida, con τ en cm, por

$$\zeta = \alpha\,\tau \qquad (\text{cm}^0) \qquad [1.10.04\ \text{a}]$$

siendo α un coeficiente dado por (1)

(1) Expresión actual del mismo coeficiente definido por [1.06.06 b]

$$\alpha = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{\mu}{10^3}\frac{f}{\varrho}}\ (\text{cm}^{-1}) \qquad [11.10.04\ \text{b}]$$

los factores de corrección f_h para las pérdidas específicas por histéresis y f_F para las pérdidas por c.d.F. resultan ser:

$$f_h = \frac{\zeta}{2}\frac{\text{Sh}\ \zeta - \text{sen}\ \zeta}{\text{Ch}\ \zeta - \cos\zeta}$$

y

$$f_F = \frac{3}{\zeta}\frac{\text{Sh}\ \zeta - \text{sen}\ \zeta}{\text{Ch}\ \zeta - \cos\zeta}$$

hasta valores de $\zeta \leqslant 2$ tanto f_h como f_F difieren poco de la unidad, y a partir de $\zeta \geqslant 4$ es la fracción hiperbólica y trigométrica la que pasa a ser prácticamente igual a 1. Con circuitos ferromagnéticos industriales ζ toma siempre valores muy por encima de 4, pudiendo escribirse entonces sin gran error

$$f_h = \frac{\zeta}{2} \qquad f_F = \frac{3}{\zeta} \qquad [1.10.04\ \text{c}]$$

Las figuras 1.10.04 b y c muestran respectivamente estos dos factores en función de ζ donde se observa el aumento casi lineal del primero y el decrecimiento del segundo según una hipérbola, dentro de la zona práctica de ζ.

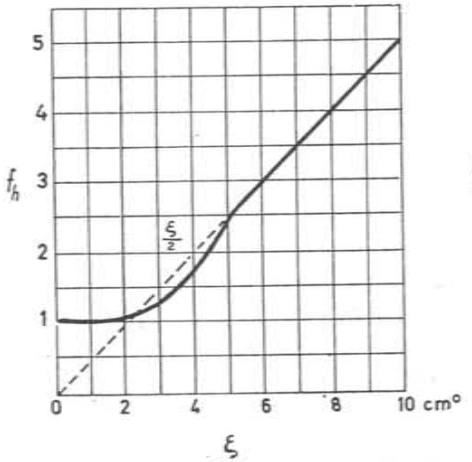


Fig. 1.10.04 b. Factor de corrección, debido a la concentración del flujo, para las pérdidas por histéresis.

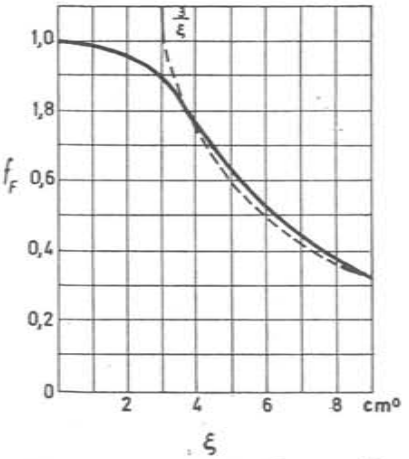


Fig. 1.10.04 c. Factor de correccion, debido a la concentración del flujo, para las pérdidas por c.d.F.

La elevada permeabilidad del hierro es lo que da importancia a ζ contribuyendo análogamente la frecuencia cuando ésta rebasa bastante la cifra industrial de 50 Hz.

La fórmula general de las pérdidas específicas en el hierro teniendo en cuenta la concentración autoinductiva del flujo, es así, [1.10.02 a] y [1.10.03 a],

$$p_{fe} = (f\ k_h)\ f_h\ \hat{B}^2 + (f_F\ k_F)\ (f\ \tau\ \hat{B})^2 \left(\frac{W}{kg}\right) \qquad [1.10.04\ d]$$

con τ en mm, f en Hz y $\hat{B}$ en T

(En las cifras empíricas de k_h y k_F citadas al final de los párrafos 1.10.02 y 1.10.03 ya iban incluidos, en realidad, los factores de corrección respectivos f_h o f_F).

Esta expresión no tiene aún en cuenta los efectos de la irregular distribución del flujo a través de la sección magnética por razones constructivas ni las posibles pulsaciones del mismo por idénticas causas, o las deficiencias de aislamiento entre chapas, debidas sobre todo a la presencia de rebarbas de punzonado.

Para las pérdidas fundamentales hasta aquí consideradas resulta más práctico tomar los valores experimentales deducidos del aparato EPSTEIN (fig. 1.03.10 c y d) aumentándolos debidamente.

1.10.05. **Ejemplo**

Calcular las pérdidas *teóricas* por histéresis y corriente de FOUCAULT en el hierro del alternador de 2 000 kVA, 5 500 V, 50 Hz 500 r/m (12 polos) cos $\varphi = 0{,}8$ representado en la fig. 1.09.13 a y cuya característica magnética y cálculo de la excitación en carga se han seguido en la tabla 1.09.16 a y párrafo 1.09.13, respectivamente.

Empecemos por determinar los pesos del circuito magnético afectado por estas pérdidas, es decir: los dientes y el yugo.

Las dimensiones que constan en la figura citada y la tabla de datos anexa 1.09.13 a son:

Diámetro exterior del yugo $D_{yM} = 18{,}6$ dm
» interior del yugo $D_{yo} = 16{,}4$ »
» del entrehierro $D = 15$ »

El número de ranuras es $n = 117$ con anchura $a = 0{,}16$ dm y profundidad $h_t = 0{,}7$ dm por ranura. La longitud geométrica del inducido es $L = 5$ dm de la cual hay que descontar $n_c = 6$ canales de ventilación de $\varepsilon_c = 0{,}1$ dm, o sea 0,6 dm en total lo que da una longitud bruta de hierro $L_h = 5 - 0{,}6 = 4{,}4$ dm y neta, contando con un factor de empilado $k_{Fe} = 0{,}9$, $L_{Fe} = 0{,}9 \cdot 4{,}4 = 3{,}96$ dm.

Admitiendo un peso específico de la plancha siliciosa $\gamma_{Fe} = 7{,}7$ kg/dm³, tendremos

Peso del yugo $G_y = \gamma_{Fe}\ L_{Fe} \dfrac{\pi}{4} (D_{yM}^2 - D_{yo}^2) =$

$$= 7{,}7 \cdot 3{,}96 \cdot 0{,}785\ (18{,}6^2 - 16{,}4^2) = 1865 \text{ kg}$$

Peso de los dientes $G_d = \gamma_{Fe}\ L_{Fe} \left[\dfrac{\pi}{4} (D_{yo}^2 - D^2) - n\ h_t\ a\right]$

$$= 7{,}7 \cdot 3{,}96\ [0{,}785(16{,}4^2 - 15^2) - 117 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}16] = 653 \text{ kg.}$$

Las inducciones de trabajo a plena carga y cos $\varphi = 0{,}8$ con una f.e.m. $E = 3\,485$ V/fase valen respectivamente, según el cálculo de la excitación en carga, párrafo 1.09.13, como promedios,

$$\hat{B}_y = 1{,}185\ T$$

$$\hat{B}_d = 1{,}7\ T$$

Tratándose de una chapa tipo dinamo de buena calidad (1.85 W/kg a 10 kG y 50 Hz (curva 1.302 b) podemos poner

$$(f_h\ k_h) = 0{,}030 \text{ (párrafo 1.10.02)}$$

$$(f_F\ k_F) = 0{,}47 \cdot 10^{-3} \text{ (» 1.10.03)}$$

ya que las cifras dadas en los párrafos citados incluyen como se ha dicho al final del párrafo 1.10.04 los factores de concentración de flujo f_h y f_F con lo cual, [1.10.04 d],

$$p_h = (f_h\ k_h)\ f\ \hat{B}^2 \qquad \text{(W/kg)}$$

$$p_f = (f_F\ k_F)\ (\tau f \hat{B})^2 \qquad \text{(W/kg)}$$

el grueso de esta plancha es $\tau = 0{,}5$ mm. En conjunto, para el yugo

$$p_{fe\,y} = p_{hy} + p_{fy} = 0{,}03 \cdot 50 \cdot 1{,}185^2 + 0{,}47 \cdot 10^{-3}\ (0{,}5 \cdot 50 \cdot 1{,}185)^2$$

$$= 2{,}110 + 0{,}413 = 2{,}523 \frac{W}{kg}$$

y para los dientes

$$p_{fe\,d} = p_{hd} + p_{fd} = 0{,}03 \cdot 50 \cdot 1{,}7^2 + 0{,}47 \cdot 10^{-3}\ (0{,}5 \cdot 50 \cdot 1{,}7)^2 =$$

$$= 4{,}34 + 0{,}85 = 5{,}19 \frac{W}{kg}$$

La curva (2) de la fig. 1.03.10 c nos daría para $\hat{B} = 1{,}185$ T, $p_{fe\,y} = 2{,}5 \dfrac{W}{kg}$ en el yugo y para $\hat{B} = 1{,}7$ T, $p_{fe\,d} = 6{,}6 \dfrac{W}{kg}$ en los dientes, medidas al aparato EPSTEIN. Es más práctico utilizar estas curvas y aumentar, aún, los valores de las mismas en un cierto %. No obstante, y a efectos comparativos seguiremos con el cálculo teórico. En total,

$$p_{Fe\,y} = 2{,}523 \frac{W}{kg} \cdot 1865 \text{ kg} = 4710 \text{ W}$$

$$p_{Fe\,d} = 5{,}19 \frac{W}{kg} \cdot 653 \text{ kg} = \underline{3390 \text{ W}}$$

pérdidas teóricas en el hierro $p_{Fe} = 8100$ W

Esta cifra teórica requiere importantes correcciones incrementales como vamos a ver enseguida.

1.10.06. Efecto de la distribución no uniforme del flujo en las coronas. Pérdidas en el yugo y nucleo

La corona del estator (yugo o culata) y la del rotor (núcleo) son componentes del circuito magnético donde la inducción en las secciones transversales pierde forzosamente su uniformidad debido a las distintas longitudes de las líneas de fuerza que se extienden en arcos aproximadamente concéntricos de radios diferentes, fig. 1.10.06 a. Este efecto será tanto más notable

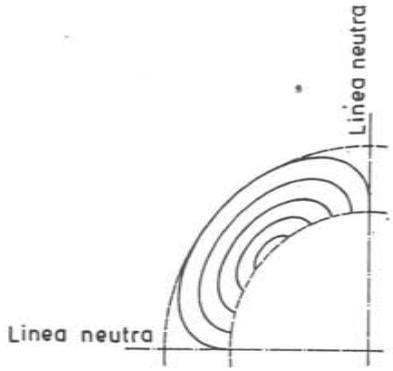


Fig. 1.10.06 a. Desviación radial del flujo en las coronas

cuanto mayor sea la relación del grueso radial de dichas coronas al paso polar medido sobre las mismas.

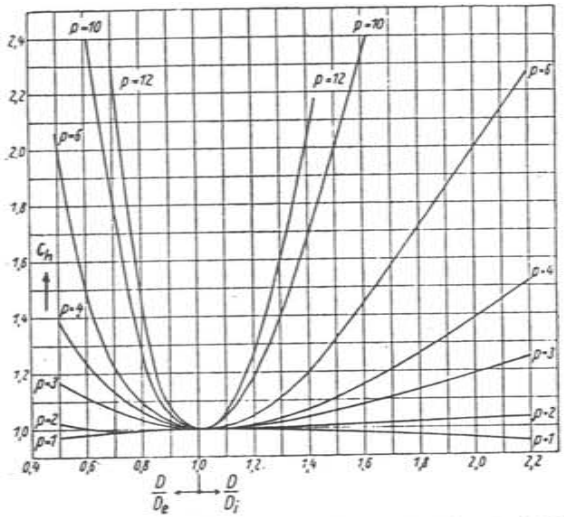


Fig. 1.10.06 b. Factor de aumento de las perdidas por histéresis debido a la desigual distribución de la inducción en las coronas de chapa.

El flujo en las zonas más alejadas de la raíz de los dientes presenta la mínima inducción, gracias a lo cual es posible ceñir a las planchas el armazón o carcasa macizos, o el eje sólido, sin que dichos órganos de gran espesor sean asiento de pérdidas extraordinarias. Pero en las planchas mismas, la inducción irregular provoca ciertos aumentos de pérdidas por histéresis y por c.d.F.

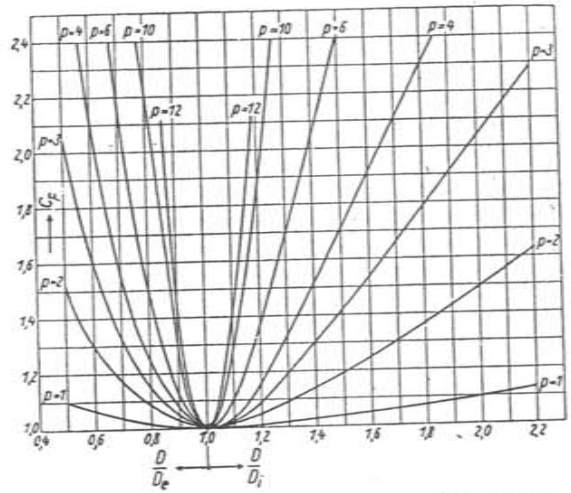


Fig. 1.10.06 c. Factor de aumento de las pérdidas por c.d.F. debido a la desigual distribución de la inducción en las coronas de chapa.

Estos aumentos se computan mediante otros tantos factores de corrección c_h, c_F que dependen del número de polos y son tanto más elevados cuanto mayor es este número pudiendo expresarse por término medio, en función de la relación del diámetro D de la máquina en el entrehierro al diámetro exterior D_e o interior D_i de la corona en cuestión. Las figs. 1.10.06 b y c nos dan gráficamente los valores

$$c_h = f\left(p, \frac{D}{D_e} \text{ o } \frac{D}{D_i}\right)$$

$$c_F = f\left(p, \frac{D}{D_e} \text{ o } \frac{D}{D_i}\right)$$

y en ellas puede verse cómo resulta inútil, desde el punto de vista de las pérdidas, rebajar la inducción en las coronas de las máquinas con gran número de polos a expensas de aumentar extraordinariamente el grueso radial de las mismas.

Aplicando a dichas coronas la fórmula 1.10.04 b corregida por los factores de irregularidad c_h y c_F tendremos para las pérdidas especificas por histéresis y corrientes de FOUCAULT en ellas

$$p_{fe} = p_h + p_f = c_h f_h k_h \cdot f \hat{B} + c_F f_F k_F (\tau f \hat{B})^2 \quad \left(\frac{W}{kg}\right) \qquad [1.10.06\ a]$$

(τ en mm, f en Hz, $\hat{B}$ en T).

1.10.07. Ejemplo

Corregir las pérdidas en el yugo del alternador objeto del ejemplo 1.10.05 teniendo en cuenta la desigual distribución del flujo.

Aplicaremos la ecuación [1.10.06 a] que para la corona del yugo puede escribirse

$$p_{fe\,y} = p_{hy} + p_{fy} = c\ f_h\ k_h\ f_h\ \hat{B}_y^2 + c_F\ f_F\ k_F\ (\tau\ f\ \hat{B})^2 \qquad \left(\frac{W}{kg}\right)$$

Los valores de $(f_h\ k_h)\ f\ B_y^2$ y $f_F\ k_F\ (\tau f B_y)^2$ ya han sido hallados en el ejemplo anterior 1.10.05 resultando ser 2,110 y 0,413 W/kg, respectivamente. Fáltanos determinar los coeficientes de corrección c_h y c_F según las figuras 1.10.06 b y c.

Con

$$\frac{D}{D_{yM}} = \frac{15}{18{,}6} = 0{,}87 \quad \text{y} \quad p = 6 \text{ pares de polos}$$

tenemos, fig. 1.10.06 b y c,

$$c_h = 1{,}5 \qquad c_F = 1{,}47\ ;$$

luego, en el yugo.

$$p_{fe\,y} = 1{,}5 \cdot 2{,}110 + 1{,}47 \cdot 0{,}413 = 3{,}17 + 0{,}61 = 3{,}78 \text{ W/kg}$$

en lugar de 2,523 W/kg antes hallados, (párr. 1.10.05)

$$p_y = 3{,}78\ \frac{W}{kg} \cdot 1865 \text{ kg} = 7050 \text{ W}$$

en lugar 4710 W, o sea un 50 % de aumento por este concepto.

Si le sumamos las pérdidas fundamentales en los dientes (3'390 W según el ejemplo del párrafo 1.10.05), llegamos a

$$p_{Fe} = 7050 + 3390 = 10440 \text{ W}$$

que aun no tienen en cuenta las pérdidas por pulsaciones de flujo, a considerar más adelante, ni el efecto de las rebarbas.

1.10.08. Pérdidas en los dientes

Las debidas a la onda principal de flujo, con sus componentes por histéresis y por c.d.F. son directamente calculables, como lo hemos hecho en el ejemplo 1.10.05, a base de la ecuación [1.10.04 d] que tiene en cuenta únicamente la concentración autoinductiva del flujo.

$$p_{fe\,d} = p_{hd} + p_{fd} = (f_h\ k_h)\ f\ \hat{B}_d^2 + (f_F\ k_F)\ (\tau\ f\ \hat{B}_d)^2 \left(\frac{W}{kg}\right) \qquad [1.10.08\ a]$$

Para la inducción $\hat{B}_d$ se puede tomar el valor correspondiente al campo medio (ejemplo citado y párrafo 1.09.13) o bien, simplificando, el valor a media altura del diente y mejor aún a 1/3 de la altura, contada desde el punto donde la inducción es máxima, sea éste la cabeza o la raíz del diente.

Los factores de aumento de pérdidas f_h y f_F se suelen dar casi siempre ya incorporados a los valores de k_h y k_F para las planchas magnéticas de grueso determinado.

1.10.09. Efectos de las pulsaciones de flujo

Independientemente de la frecuencia principal f del flujo inductor, y aunque fuese $f = 0$, como sucede para la parte estatórica de las máquinas de corriente continua y para el rotor de los alternadores, aparecen en ciertas zonas pulsaciones de flujo debidas al paso de los dientes, las cuales equivalen a una componente alterna suplementaria, capaz de provocar importantes pérdidas adicionales. Entre ellas caben distinguir.

1.10.10. Pérdidas superficiales en las expansiones polares de las máquinas de polos salientes

Al deslizarse en movimiento relativo frente a las superficies polares el sistema ranurado del inducido, arrastra consigo el campo irregular del entrehierro y penetra a través de aquellas superficies un flujo variable que engendra corrientes parásitas en la zona afectada. La componente pulsatoria de este flujo equivale a una onda alterna espacial, con semiondas en general distintas (fig. 1.10.10a) y el flujo variable que actúa sobre cada una de estas zonas de

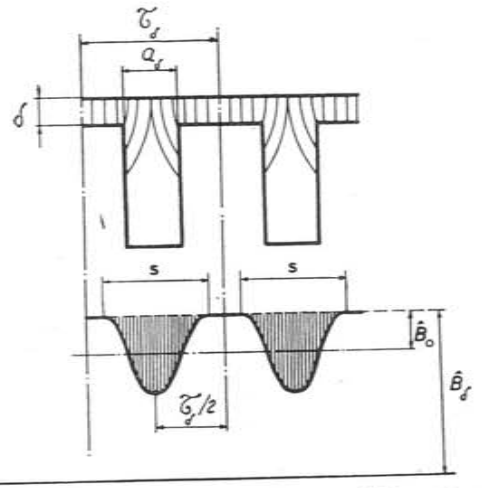


Fig. 1.10.10 a. Inducción en las superficies polares.

corrientes circulatorias locales es proporcional al área rayada de la depresión según se muestra en la curva de campo. Dicha área es a su vez proporcional a ($s\ \hat{B}_0$) representando por $\hat{B}_0$ el valor medio de la depresión y por s la extensión periférica de la misma.

Los valores relativos de la amplitud $\hat{B}_0$ con respecto a la máxima en el entrehierro $\hat{B}_\delta$, o sea

$$\beta = \frac{\hat{B}_0}{\hat{B}_\delta},$$

y de la anchura de la pulsación s con respecto a la abertura a_δ de la ranura en el entrehierro, es decir,

$$\gamma = \frac{s}{a_\delta}$$

pueden hallarse por el método de la representación conforme. Ambos dependen de la

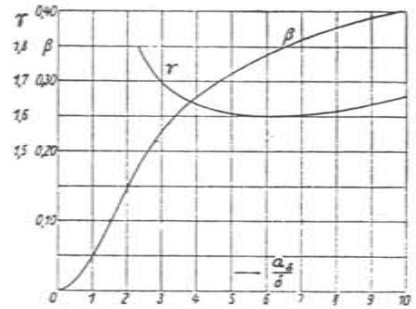


Fig. 1.10.10 b. Amplitud relativa β de la pulsación de flujo y paso γ de la onda pulsante en las superficies polares en función de la abertura a_δ de ranura referida a la amplitud del entrehierro δ

relación entre la misma abertura a_δ y la dimensión del entrehierro δ. La figura 1.10.10 b nos da los valores de

$$\beta = \frac{\hat{B}_0}{\hat{B}_\delta} = \mathrm{f}\left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)$$

y

$$\gamma = \frac{s}{a_\delta} = \mathrm{f}\left(\frac{a_\delta}{\delta}\right)$$

Ello nos permite por lo pronto calcular fácilmente la inducción $\hat{B}_0$ conocida la inducción máxima en el entrehierro $\hat{B}_\delta$ y las dimensiones del ranurado. Así,

$$\boxed{\hat{B}_0 = \beta\ \hat{B}_\delta} \qquad [1.10.10\ a]$$

Las zonas parciales de corrientes parásitas se extienden en el arco deslizante de medio paso de ranura $\tau_\delta/2$ (distancia entre máximos de la onda pulsatoria) ya que a dos generatrices separadas por esta distancia le corresponden f.e.m. parásitas iguales y de signos contrarios. Ello circunscribe a dicha magnitud $\frac{\tau_\delta}{2}$ una de las dimensiones del circuito eléctrico recorrido por las corrientes de FOUCAULT debidas a la pulsación del flujo.

De otra parte, la frecuencia f_n de la onda pulsante bajo la superficie polar, resultado de la presencia alternativa de las ranuras y los dientes ante cada punto de aquella superficie, corresponderá a un ciclo por cada secuencia τ_δ y vendrá dada por

$$\boxed{f_n = n\,\frac{N}{60}} \quad (\mathrm{Hz}) \qquad [1.10.10\ b]$$

N = velocidad angular de la máquina en r/m.

n = número de ranuras del inducido.

Las demás características del circuito magnético asiento de las corrientes inducidas por el flujo pulsante, las constituyen sin duda α y ζ, [1.10.04 b y a], referidas a la superficie polar, como parámetros que afectan a la profundidad o penetración del flujo a través de esta superficie.

Si tanto δ como $\hat{B}_\delta$ son constantes bajo cada polo, la amplitud $\hat{B}_0$ de la pulsación lo será también. En caso contrario (δ variable, como suele hacerse para los alternadores con onda espacial e inducción teórica $\underset{\sim}{B}_\delta$ de tipo senoidal; este mismo tipo de onda aparece poco más o menos en el campo inductor de los motores asíncronos), se tendrá, correlativamente, una pulsación de amplitud $\hat{B}_0$ variable.

Establecidas las magnitudes básicas del circuito parasitario, es decir, sus dimensiones y la inducción $\hat{B}_0$ característica de la pulsación, el estudio teórico en condiciones análogas a las que se aplican de un modo general a los circuitos de esta naturaleza conduce a una expresión de las pérdidas específicas superficiales de la siguiente forma:

con τ_δ en cm, $\hat{B}_0$ en T, y f en Hz,

$$\boxed{p_s = k_s \left(\frac{f_n}{1000}\right)^{1,5} (\hat{B}_0\ \tau_\delta)^2} \left(\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right) \qquad [1.10.10\ c]$$

k_s varía desde 3000 para polos de chapa de acero de 1 mm, y 3500 para chapa dinamo de 0,5 mm, a 25 000 para la fundición y 35 000 para polos macizos de hierro forjado.

Si como sucede en una máquina de corriente continua el entrehierro δ y la inducción $\hat{B}_\delta$ permanecen invariables bajo todo el arco polar b_p, las pérdidas totales se hallarán multiplicando el valor constante de p_s deducido de la fórmula [c] por la superficie total de los polos ($2\ p \cdot L_p \cdot b_p$) en m^2

$$\boxed{p_s = p_s \cdot 2p\ L_p b_p} \quad (\mathrm{W}) \qquad [1.10.10\ d]$$

Si, como suele ocurrir en los alternadores, el entrehierro es senoidal, $\hat{B}_\delta$ y con ello $\hat{B}_0$ varían a lo largo del arco polar. A la fórmula anterior [c] habrá que aplicarle un coeficiente de corrección f_s tal que

$$f_s = \frac{p_s\ \mathrm{med}}{p_s\ \mathrm{máx}} = \frac{\int_{-\frac{b_p}{2}}^{+\frac{b_p}{2}} \hat{B}_{ox}^2\, dx}{b_p\ \hat{B}_0^2}$$

siendo para cada punto

$$\hat{B}_{oz} = \beta\, B_\delta$$

considerada B_δ como la inducción máxima del campo principal en el punto considerado. $\hat{B}_\delta$ será dicha inducción para el centro del polo, donde

$$\hat{B}_o = \beta_{max}\ \hat{B}_\delta \text{ y } p_s = p_{s\,max}$$

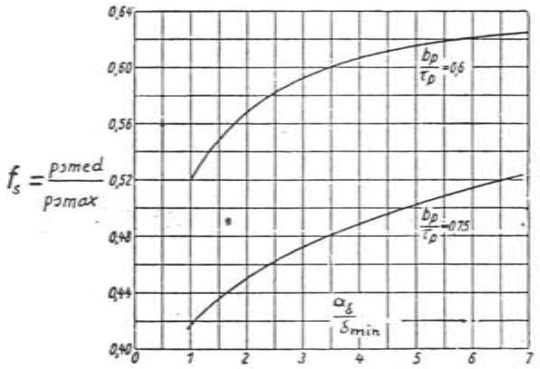


Fig. 1.10.10 c. Factor de corrección f_s para las pérdidas en las superficies polares de una máquina de entrehierro senoidal, en función de la relación de la abertura a_δ de ranura a la amplitud del entrehierro δ_{min}

La figura 1.10.10 c da las curvas de f_s en función de $\frac{a_\delta}{\delta_{min}}$ (δ_{min} = entrehierro mínimo o en el centro del polo); así, tendremos:

$$\boxed{p_{s\,med} = f_s\, k_s \left(\frac{f_n}{1000}\right)^{1,5} (\hat{B}_o\, \tau_\delta)^2} \quad \text{(W/m}^2\text{)} \qquad [1.10.10\ e]$$

(τ_δ en cm, $\hat{B}_o$ en T, f_n en Hz)

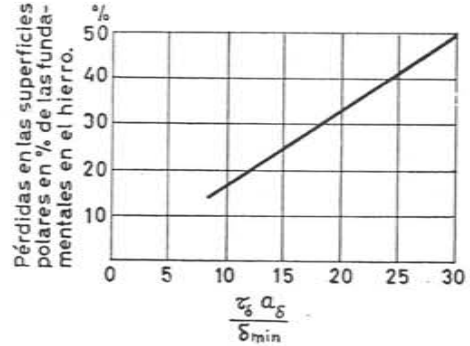


Fig. 1.10.10 d. Alternadores de entrehierro senoidal. Pérdidas superficiales en los polos en % de las pérdidas fundamentales en el hierro estatórico, en función del paso de los dientes τ_δ, de la abertura de ranuras a_δ y del entrehierro mínimo δ_{min} (chapas de inducido, de 2,7 W/kg, chapas de los polos de 1 mm)

Como resultados medios pueden tomarse los valores de la fig. 1.10.10 d que nos da las pérdidas en las superficies polares para alternadores de entrehierro senoidal, en % de las pérdidas fundamentales calculadas para el hierro del estator, y en función del paso τ_δ, de la abertura de ranuras α_δ y del entrehierro mínimo δ_{min}.

Al objeto de mantener estas pérdidas dentro de un límite aceptable es imprescindible emplear expansiones laminadas siempre que el inducido sea de ranuras abiertas (máquinas de corriente continua y alternadores de alta tensión).

1.10.11. Ejemplo

Calcular las pérdidas en las superficies polares del alternador, fig. 1.09.13 a, objeto de los dos últimos ejemplos 1.1005 y 1107; el entrehierro es senoidal de valor mínimo $\delta = 5$ mm y la inducción correspondiente en las condiciones nominales de servicio (P.C. y cos $\varphi = 0{,}8$), $\hat{B}_\delta = 1.048$ T (párrafo 1.09.13)

Para

$$\frac{a_\delta}{\delta} = \frac{16}{5} = 3{,}2,$$

la fig. 1.10.10 b nos da $\beta = 0{,}24$ y, por tanto, [1.10.10 a],

$$\hat{B}_o = \beta\ \hat{B}_\delta = 0{,}24 \cdot 1{,}048 = 0{,}258 \text{ T}$$

Asimismo, [tabla 1.09.13 a],

para $b_p = 260$ mm, $\tau_p = 393$ mm, $\psi = 0{,}66$ y con $\frac{a_\delta}{\delta_{min}} = 3{,}2$,

la fig. 1.10.10 b nos proporciona $f_s = 0{,}52$.

Cuanto a k_s, al ser los polos de chapa de acero de 1 mm pondremos (ver párrafo 1.10.10) $k_s = 3\,000$.

La frecuencia de la pulsación vale, [1.10.10 b],

$$f_n = n\,\frac{N}{60}$$

y siendo $N = 500$ r/m. y $n = 117$ ranuras,

$$f_n = 117\,\frac{500}{60} = 975 \text{ Hz}$$

y el paso de ranuras $\tau_\delta = 4{,}03$ cm (tabla citada).

Apliquemos ahora la ecuación [1.10.10 e]

$$p_{s\,med} = f_s\, k_s \left(\frac{f_n}{1000}\right)^{1,5} (\hat{B}_o\, \tau_\delta)^2 = 0{,}52 \cdot 3000 \left(\frac{975}{1000}\right)^{1,5} (0{,}258 \cdot 4{,}03) = 1620 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$$

y para el conjunto de todas las superficies polares, [1.10.10 d], con una longitud axial de polo L_p igual a la del inducido $L = 0{,}5$ m, y un arco polar $b_p = 0{,}26$ m (fig. 1.09.13 a),

$$p_s = p_{s\,med}\ 2p\ L_p\ b_p = 1620 \cdot 12 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}26$$

$$= 2\,530 \text{ W}$$

1.10.12. Ejemplo

Deducir las pérdidas adicionales en las superficies polares del alternador objeto del ejemplo anterior por evaluación empírica global.

Acudiremos al gráfico de la fig. 1.10.10 d para lo cual debemos empezar por hallar la relación

$$\frac{\tau_\delta \; a_\delta}{\delta_{min}} = \frac{4{,}03 \cdot 1{,}6}{0{,}5} = 12{,}9 \text{ cm}$$

A este valor le corresponden según dicho gráfico unas pérdidas superficiales del 19 % de las fundamentales en el hierro, que, como vimos, ascendían a 10140 W (Ejemplo del párrafo 1.10.07. Así),

$$p_s = 0{,}19 \cdot 10440 = 1990 \text{ W}$$

algo distintas de las recién halladas en el ejemplo anterior (2530 W). Con la primera cifra obtenida, las pérdidas en el hierro ascienden ya a

$$p_{Fe} = 10440 + 1990 = 12430 \text{ W}$$

en vez de los 8100 W estrictamente teóricos párr. [1.10.05.]

1.10.13. Pérdidas superficiales en las máquinas de polos no salientes

Son máquinas con ranuras en el inducido y en el inductor lo que corresponde, por ejemplo, al caso de los motores asíncronos. Hay que considerar entonces pérdidas superficiales en uno y otro órgano de la máquina, con campo inductor de tipo senoidal.

Identificando por el subíndice (1) las magnitudes referentes al primario y por el subíndice (2) los del secundario tendremos para un punto determinado del entrehierro, [1.10.10 c],

$$p_{s(1)z} = k_s \left(\frac{f_{n(2)}}{1000}\right)^{1{,}5} (\hat{B}_{o(1)z} \; \tau_{\delta(2)})^2 \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)$$

con

$$\hat{B}_{o(1)z} = \beta_{(2)z} \; B_\delta$$

y

$$f_{n(2)} = n_2 \frac{N}{60}$$

Siendo constantes todas las magnitudes de la primera fórmula, excepto $\hat{B}_{o(1)z}$ al no serlo B_δ, el valor medio de $p_{s(1)\,med}$ vendrá dado, supuesta una distribución senoidal del campo principal, $\hat{B}_\delta = B_\delta \text{ sen } \alpha$, por

$$\boxed{p_{s(1)\,med}} = p_{s(1)\,max} \frac{\int_0^\pi \hat{B}_{o(1)^2\,max} \text{ sen}^2 \alpha \; d\alpha}{\hat{B}_{o(1)^2} \; \pi} = \frac{1}{2} \; p_{s(1)\,max}$$

$$\boxed{= \frac{k_s}{2} \left(\frac{f_{n(2)}}{1000}\right)^{1{,}5} (\hat{B}_{o(1)} \; \tau_{\delta(2)})^2} \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) \qquad [1.10.13 \text{ a}]$$

Dichas pérdidas sólo se producen en la superficie de los dientes que mira el entrehierro. Las pérdidas totales de este género en el primario serán, pues:

$$\boxed{p_{S(1)} = \left(\pi \; D \; L_h \frac{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)}}{\tau_{\delta(1)}}\right) \left[\frac{k_s}{2} \left(\frac{f_{n(2)}}{1000}\right)^{1{,}5} (\hat{B}_{o(1)} \; \tau_{\delta(2)})^2\right]} \text{ (W)} \qquad [1.10.13 \text{ b}]$$

$$\boxed{\hat{B}_{o(1)} = \beta_{(2)} \; \hat{B}_\delta} \text{ (T)} \qquad [1.10.13 \text{ c}]$$

con D (diámetro del entrehierro) y $L_{(h)}$ (longitud bruta del hierro), en m; $f_{n(2)}$ en Hz, $\hat{B}_\delta$ y $\hat{B}_{r(1)}$ en T y $\tau_{\delta(1)}$, $a_{\delta(1)}$ y $\tau_{\delta(2)}$ en cm.

Permutando los subíndices (1) y (2) se obtienen las pérdidas superficiales correspondientes al secundario. Se toma la longitud bruta de hierro en lugar de la longitud neta porque el coeficiente k_s ya tiene en cuenta el laminado y aislamiento de la chapa.

1.10.14. Ejemplo

Un motor asíncrono de 6 CV, $N = 1\,500$ r/m. sincrónicas $f = 50$ Hz ($2\,p = 4$ polos) tiene un diámetro de entrehierro $D = 111$ mm, longitud de paquete $L_h = 150$ mm, $n_1 = 24$ ranuras en el estator y $n_2 = 30$ ranuras en el rotor; la abertura de las ranuras son respectivamente $a_{\delta(1)} = 2{,}5$ y $a_{\delta(2)} = 1$ mm. y el entrehierro $\delta = 0{,}35$ mm. Calcular las pérdidas adicionales por pulsación del flujo en las superficies del entrehierro, trabajando con una inducción máxima en carga $\hat{B}_\delta = 7{,}6$ kG.

La ecuación de estas pérdidas es, para el estator, [1.10.13 b y c],

$$p_{S(1)} = \left(\pi \; D \; L_h \frac{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta(1)}}{\tau_{\delta(1)}}\right) \left[\frac{k_s}{2} \left(\frac{f_{n(2)}}{1000}\right)^2 (\hat{B}_{o(1)} \; \tau_{\delta(2)})^2\right] \text{ (W)}$$

donde

k_s = coeficiente de pérdidas superficiales = 3 500 (chapa de 0,5 mm, párr. 1.10.10).

$f_{n(2)}$ = frecuencia de la pulsación debida a las ranuras del rotor [1.10.10 b]

$$f_{n2} = n_{(2)} \frac{N}{60} = 30 \frac{1500}{60} = 750 \text{ Hz}$$

$\hat{B}_{o(1)}$ amplitud de la pulsación en el estator debida al paso de las ranuras del rotor, [1.10.10 a],

$$\hat{B}_{o(1)} = \beta_{(2)} \; \hat{B}_\delta$$

Para

$$\frac{\alpha_{\delta(2)}}{\delta} = \frac{1}{0{,}35} = 2{,}86, \text{ la figura 1.10.10 b da } \beta_2 = 0{,}22$$

de donde

$$\hat{B}_{o(1)} = 0{,}22 \cdot 0{,}76 = 0{,}167 \text{ T}$$

Por otra parte,

$$\tau_{\delta(2)} = \frac{\pi D}{n_2} = \frac{\pi \cdot 11{,}1}{30} = 1{,}16 \text{ cm}; \quad \tau_{\delta(1)} = \frac{\pi D}{n_1} = \frac{\pi\ 11{,}1}{24} = 1{,}45 \text{ cm};$$

$a_{\delta(1)} = 0{,}25$ cm; $D = 0{,}111$ m; $L_h = L = 0{,}15$ m; y según [1.10.13 a],

$$\dot{p}_{s(1)\,med} = \frac{k_s}{2}\left(\frac{f_{s(2)}}{1000}\right)^{1{,}5} (\hat{B}_{o(1)}\,\tau_{\delta(2)})^2 = \frac{3500}{2}\,0{,}75^{1{,}5}\,(0{,}167 \cdot 1{,}16)^2 = 43{,}0 \text{ W/m}^2$$

y para toda la superficie estatórica del entrehierro, [1.10.13 b],

$$\dot{p}_{S(1)} = \pi\, D\, L_h \frac{\tau_{\delta(1)} - a_{\delta\,1)}}{\tau_{\delta(1)}}\,\dot{p}_{s(1)\,med} = \pi \cdot 0{,}111 \cdot 0{,}15\,\frac{1{,}45 - 0{,}25}{1{,}45} \cdot 43{,}0 = 1{,}96 \text{ W}$$

La escasa magnitud de estas pérdidas en los motores pequeños se pone bien de manifiesto. Ello permite a veces aumentarlas, sin consecuencias todavía perjudiciales, cuando se hace preciso recurrir a un mecanizado o rectificado de la superficie interna del estator para corregir ciertos defectos de montaje o centrado a los cuales son muy sensibles tales máquinas dados los escasísimos entrehierros con que trabajan.

Completemos, no obstante, el cálculo para el rotor.

Análogamente

$$\dot{p}_{s(2)\,med} = \frac{k_s}{2}\left(\frac{f_{s(1)}}{1000}\right)^{1{,}5} (\hat{B}_{o(2)}\,\tau_{\delta(1)})^2 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

$$f_{s(1)} = n_1 \frac{N}{60} = 20\,\frac{1500}{60} : 600 \text{ Hz}$$

$$\tau_{\delta(1)} = 1{,}45 \text{ cm}; \quad a_{\delta(1)} = 0{,}25 \text{ cm}; \quad \delta = 0{,}35 \text{ mm}$$

$$\frac{a_{\delta(1)}}{\delta} = \frac{2{,}5}{0{,}35} = 7{,}5\,; \quad \beta_{(1)} = 0{,}365 \text{ (fig. 1.0,10 b)}$$

$$\hat{B}_{o(2)} = \beta_{(1)}\,\hat{B}_\delta = 0{,}365 \cdot 0{,}76 = 0{,}285$$

$$\dot{p}_{s(2)\,med} = \frac{3500}{2}\,0{,}6^{1{,}5}\,(0{,}285 \cdot 1{,}45)^2 = 138 \text{ W/m}^2$$

$$\dot{p}_{S(2)} = \pi\, D\, L_h \frac{\tau_{\delta(2)} - a_{\delta(2)}}{\tau_{\delta(2)}}\,\dot{p}_{s(2)med} = \pi \cdot 0{,}111 \cdot 0{,}15\,\frac{1{,}16 - 0{,}1}{1{,}16}\,138 = 6{,}60 \text{ W}$$

No se confundan estas pérdidas adicionales con las fundamentales del rotor a la frecuencia de deslizamiento, aun más reducidas, que pueden despreciarse en cualquier cálculo.

1.10.15. Pérdidas por pulsación de flujo en los dientes

Cuando la máquina lleva ranuras en ambos órganos, como es el caso que acabamos de ver, la pulsación del flujo principal no solo produce pérdidas superficiales sino que afecta también a toda la masa de los dientes.

El estudio de estas últimas, suplementarias de las normales descritas en el párrafo 1.10.08, conduce a la siguiente fórmula. Para el primario, en W/kg con el espesor de la chapa τ en mm, $f_{s(2)}$ en Hz y $B_{o(1)}$ en T

$$\boxed{\dot{p}_{do(1)\,med} = k_F \left(\tau \frac{f_{s(2)}}{100}\,\hat{B}_{od(1)}\right)^2} \quad \left(\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right) \qquad \text{[1.10.15 a]}$$

donde k_F es el coeficiente de pérdidas por corriente de FOUCAULT (párr. 1.10.03), incorporado el efecto de la concentración superficial del flujo, como ya figura en las cifras dadas en dicho párrafo.

$$\boxed{f_{s(2)} = n_2 \frac{N}{60}} \quad \text{(Hz)} \qquad \text{[1.10.15 b]}$$

(n_2 = número de ranuras del rotor; N = velocidad de giro en r/m).

y la amplitud de la pulsación

$$\boxed{\hat{B}_{od(1)} = \beta_{i(2)}\,\hat{B}_\delta\,\frac{\tau_{\delta(1)}}{k_{Fe}\,t_1}} \qquad \text{[1.10.15 c]}$$

$\tau_{\delta(1)}$ y t_1 son el paso de ranura en el entrehierro y la anchura del diente a mitad (mejor, aún, a 1/3) de la altura del mismo, contada ésta desde la sección de mínima anchura, k_{Fe} el factor de empilado ($\approx$ 0,9), y

$$\boxed{\beta_{i(2)} = \frac{\gamma_2\,\delta}{2\,\tau_{\delta(1)}}} \text{ con } \boxed{\gamma_2 = \frac{\left(\frac{a_{\delta(2)}}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{a_{\delta(2)}}{\delta}}} \qquad \text{[1.10.15 d]}$$

Permutando los subíndices (1) y (2) se obtienen las pérdidas de esta naturaleza correspondientes al secundario.

Como orientación sobre la magnitud de las pérdidas adicionales en los motores asíncronos, por pulsación superficial, y en los dientes, la figura 1.10.15 a

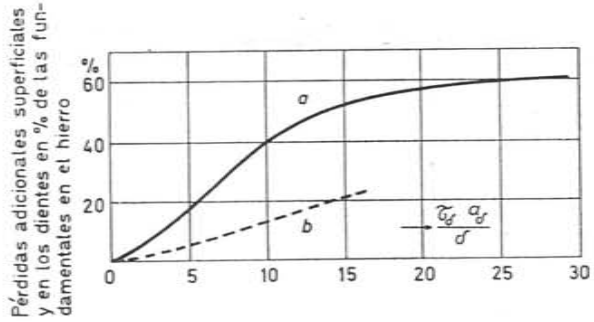


Fig. 1.10.15 a. Máquinas asíncronas. Pérdidas adicionales en el hierro, en % de las fundamentales, en función del paso de ranura τ_δ, de la abertura de ranura a_δ y del entrehierro δ

nos da el porcentaje que representan con respecto a las fundamentales del hierro, en función del paso τ_δ y de la abertura de las ranuras a_δ (respectivamente del estator y del rotor), y del entrehierro común δ.

1.10.16. Ejemplo

Calcular las pérdidas adicionales por pulsación del flujo en los dientes del motor de 6 CV, 1500 r/m sincrónicas objeto del ejemplo 1.10.14. El grueso del diente uniforme en el estator es de $t_1 = 6{,}9$ mm y el del rotor, asimismo uniforme, $t_2 = 5{,}5$ mm.

La fórmula válida para dichas pérdidas adicionales en los dientes del estator es, [1.10.15 a],

$$\dot{p}_{do(1)\,med} = k_F \left(\tau \frac{f_{n(2)}}{100} \hat{B}_{od(1)} \right)^2$$

Tomemos $k_F = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ para la chapa calidad motor (párr. 1.10.03); $\tau = 0{,}5$ mm de grueso.

$$f_{n(2)} = n_2 \frac{N}{60} = 30 \frac{1500}{60} = 750 \text{ Hz}$$

Según [1.10.15 d] y las dimensiones dadas en el ejemplo anterior,

$$\gamma_2 = \frac{\left(\frac{\alpha_{\delta(2)}}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{\alpha_{\delta(2)}}{\delta}} = \frac{\left(\frac{1}{0{,}35}\right)^2}{5 + \frac{0{,}35}{1}} = 1{,}04$$

$$\beta_{t(2)} = \frac{\gamma_2\, \delta}{2\, \tau_{\delta(1)}} = \frac{1{,}04 \cdot 0{,}35}{2 \cdot 14{,}5} = 0{,}0125$$

La pulsación en el diente [1.10.15 c]

$$\hat{B}_{od(1)} = \beta_{t(2)}\, \hat{B}_\delta \frac{\tau_{\delta(1)}}{k_{Fe}\, t_1} = 0{,}0125 \cdot 0{,}76 \frac{1{,}45}{0{,}9 \cdot 0{,}69} = ;0{,}0222 \text{ T};$$

$$\dot{p}_{do(1)\,med} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \left(0{,}5 \frac{750}{100} \cdot 0{,}0222\right)^2 = 3{,}046 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{kg}}$$

realmente insignificante como es común en todos los motores de ranura semicerrada.

De la misma manera para el rotor, [1.10.15 a],

$$\dot{p}_{do(2)\,med} = k_F \left(\tau \frac{f_{n(1)}}{100} \hat{B}_{od(2)} \right)^2 \quad \left(\frac{\text{W}}{\text{kg}}\right)$$

$$k_F = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \;\; ; \;\; \tau = 0{,}5 \text{ mm} \;\; ; \;\; f_{n(1)} = n_1 \frac{N}{60} = 24 \frac{1500}{60} = 600 \text{ Hz};$$

$$\gamma_1 = \frac{\left(\frac{\alpha_{\delta(1)}}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{a_{\delta(1)}}{\delta}} = \frac{\left(\frac{2{,}5}{0{,}35}\right)}{5 + \frac{2{,}5}{0{,}35}} = 4{,}2$$

$$\beta_{t(1)} = \frac{\gamma_1\, \delta}{2\, \tau_{\delta(2)}} = \frac{4{,}2 \cdot 0{,}35}{2 \cdot 11{,}6} = 0{,}0633$$

$$\hat{B}_{od(2)} = \beta_{t(1)}\, \hat{B}_\delta \frac{\tau_{\delta(1)}}{k_{Fe}\, t_1} = 0{,}0633 \cdot 0{,}76 \frac{1{,}16}{0{,}9 \cdot 0{,}55} = 0{,}113 \text{ T}$$

$$\dot{p}_{do(2)\,med} = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \left(0{,}5 \frac{600}{100} 0{,}113\right)^2 = 57{,}5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{kg}}$$

todavía insignificantes aunque específicamente mucho más altas que para el estator.

Sería ocioso proseguir el cálculo averiguando el peso de los dientes para hallar las pérdidas adicionales de la máquina por este concepto ya que el resultado arroja de todos modos un valor despreciable.

La magnitud de estas pérdidas sólo se hace sensible con punzonado de ranuras abiertas.

1.10.17. Pérdidas por mecanizado

Dependen de la precisión del punzonado, estado de las herramientas de corte, manipulaciones de empilado, posible ajuste, rectificado o limado de entrehierros y ranuras (siempre muy perjudiciales) y de cualquier otra operación a que deba someterse la chapa durante el proceso de fabricación.

No se puede hacer otra cosa sino estimarlas por experiencia oscilando los valores entre un 25 y un 50 % del total de las pérdidas calculables en el hierro.

En el ejemplo del alternador de 2 000 kVA, habiendo llegado ya por el cálculo a un total de 12430 W (párr. 1.10.12), si tomamos un 50 % de incremento, se alcanza una cifra final de

$$\dot{p}_{Fe} = 1{,}50 \cdot 12430 = 18\,700 \text{ W}.$$

Medidas en vacío con la tensión de 3485 V/fase igual a la f.e.m. a P.C. y cos $\varphi = 0{,}8$, resultaban unos 20 kW.

1.10.18. Cálculo simplificado de las pérdidas en el hierro de las máquinas rotatorias

La variedad e inconsistencia de los coeficientes de pérdidas en el hierro, incluidas las adicionales de este género, y la influencia grande que ejerce sobre el resultado el sistema constructivo y la mecanización de las chapas, justifica el recurrir a datos experimentales de conjunto tomados sobre la base de máquinas ya construidas, eliminando previamente toda solución constructiva que provoque oscilaciones de flujo en piezas macizas (esto hace recomendable, por ejemplo, emplear siempre expansiones polares laminadas y es indispensable en las máquinas con ranuras abiertas).

La fig. 1.10.18 a proporciona directamente las pérdidas específicas (W/kg) para cualquier parte del circuito magnético laminado sometido a un flujo, alterno, incluidas las pérdidas suplementarias de las máquinas rotatorias, en función de las inducciones uniformes de cálculo y de la frecuencia del flujo.

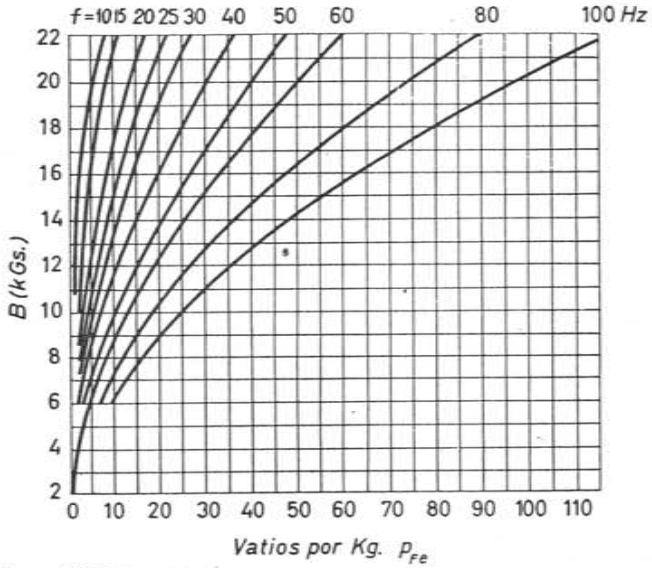


Fig. 1.10.18 a. Pérdidas globales en las chapas magnéticas para las máquinas terminadas (para chapas de baja calidad y manipulación descuidada. Con chapas de primera calidad y buen mecanizado, las pérdidas pueden reducirse en un 25 a 50 %).

Estas curvas bastan en la mayoría de los casos. Véase cómo, con inducciones max. de solo 10 kG, a 50 Hz, resultan pérdidas del orden de 10W/kg, es decir, de 3 a 5 veces mayores que las que se deducen del ensayo con el aparato de EPSTEIN.

1.10.19. Ejemplo

Deducir las pérdidas en el hierro por evaluación global para el alternador de 2 000 kVA objeto de los ejemplos 1.10.05, 1.10.07, 1.10.11 y 1.10.12 que totalizadas en el párrafo 1.10.17 ascienden, por cálculos parciales, a 18 700 W.

Recojamos de los ejemplos anteriores las cifras que interesan para esta determinación conjunta de las pérdidas en el hierro.

Peso del yugo $G_y = 1\,865$ kg
» de los dientes $G_d = 653$ kg

Inducción en el yugo a P.C. $\hat{B}_y = 1{,}185$ T
» equivalente en los dientes $\hat{B}_d = 1{,}7$ T (correspondiente al campo medio $\hat{H}_d$)

Frecuencia $f = 50$ Hz

Según la figura 1.10.18 tenemos

Para $\hat{B}_y = 1{,}185$ T y $f = 50$ Hz , $p_{fe} = 15 \frac{W}{kg}$

» $\hat{B}_d = 1{,}7$ T y $f = 50$ Hz , $p_{fe} = 30 \frac{W}{kg}$

De acuerdo con estos valores tendremos

Pérdidas en el yugo $p_{Fe\,y} = 15 \cdot 1865 = 28000$ W

» en los dientes $p_{Fe\,d} = 30 \cdot 653 = 19600$ W

Totales en el hierro $p_{Fe} = 47600$ W

Cifra excesiva. La misma figura nos indica que es posible bajar las pérdidas hasta un 50 %. En el presente caso, dicho 50 % que reduciría p_{Fe} a 23800 W, todavía es elevado si nos atenemos al resultado de los ensayos, los cuales daban unos 20 kW.

1.10.20. Cálculo de las pérdidas en el hierro de los transformadores

Las pérdidas adicionales en la chapa son en este caso mucho menos importante debido a la mayor uniformidad de las inducciones en el circuito magnético y a la ausencia de pulsaciones de ranura y diente. El cortado y punzonado de la plancha tiende a aumentar las pérdidas con la presencia de las rebarbas y, sobre todo en las chapas de grano orientado, a consecuencia de las alteraciones que la más mínima deformación introduce en la estructura cristalina del material lo cual hace recomendable el proceder a un recocido final de los paquetes a la temperatura de unos 800 °C en atmósfera neutra.

Como resultado de las experiencias que el constructor haya adquirido sobre su propio sistema de fabricación, se tomarán cifras de pérdidas aumentadas en un 10 a 20 % sobre las obtenidas mediante el ensayo al aparato EPSTEIN.

Las figuras 1.03.10 d y e muestran también, en líneas de puntos, las curvas de pérdidas incrementadas de un 15 % a los efectos prácticos indicados.

1.10.21. Ejemplo

Las dimensiones del núcleo de chapa orientada Unisil 62 sin recocer de un transformador trifásico, 2 000 kVA 50 Hz 15 000/220 V se indican en la fig. 1.10.21 a y trabaja con una inducción de 16,95 kG. en columnas y culatas.

Calcular las pérdidas en el hierro.

La cubicación detallada del núcleo según las dimensiones principales señaladas nos conduciría a un peso neto de chapas $G_{Fe} = 1\,490$ kg.

Para la inducción de 16,95 kG la curva correspondiente de la fig. 1.03.10 e da unas pérdidas de 2,11 W/kg con chapa recocida después del mecanizado. Si se omite este pro-

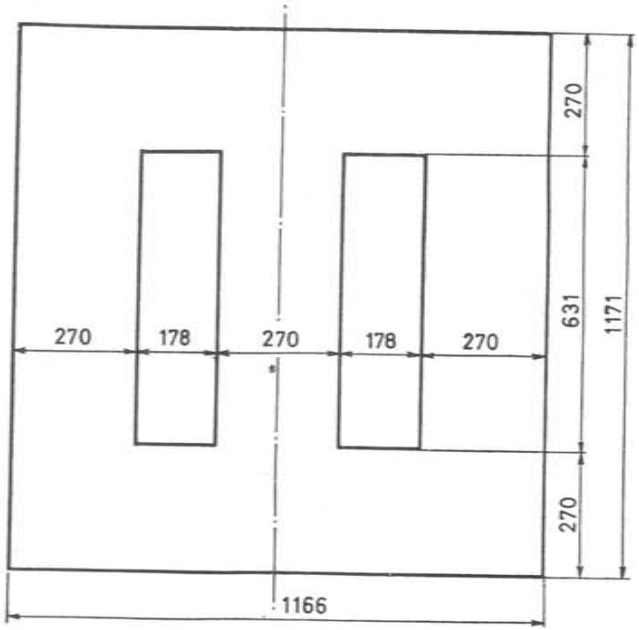


Fig. 1.10.21 a. Dimensiones generales del núcleo de un transformador de 2000 kVA, 15 kV, para el cálculo de las pérdidas en el hierro. Chapa orientada sin recocido. Sección neta del circuito magnético $S_n = 472$ cm².

Peso de chapa $G_{Fe} = 1\,490$ kg
Inducción de trabajo 16,95 kG

ceso final, las pérdidas aumentan alrededor de un 20 %, debiéndose contar, pues, con unos 2,5 W/kg.

Las pérdidas en el hierro serán, así,

$$p_{Fe} = 2{,}5\ \frac{\text{W}}{\text{kg}} \cdot 1\,490\ \text{kg} = 3\,725\ \text{W}$$

Un convenio español sobre transformadores fijaba estas pérdidas en 3 820 W.

1.10.22. Pérdidas adicionales en los conductores

Las pérdidas por efecto JOULE se estudiaron en el párrafo 1.01.15, pero de la misma manera que el flujo alterno de un circuito magnético experimenta una concentración superficial por efecto autoinductivo, así la corriente alterna que circula por un conductor tiende a concentrarse por autoinducción en las capas superficiales del mismo y en general en las zonas exteriores del flujo propio (fig. 1.10.22 a). Las razones son parecidas en ambos casos: el mayor flujo autoinductivo que rodea a los filamentos centrales de corriente, engendra f.c.e.m. más elevadas que se oponen al paso de la corriente misma.

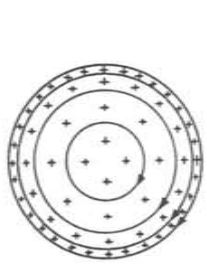


Fig. 1.10.22 a. Representación esquemática de la concentración de corriente por efecto autoinductivo.

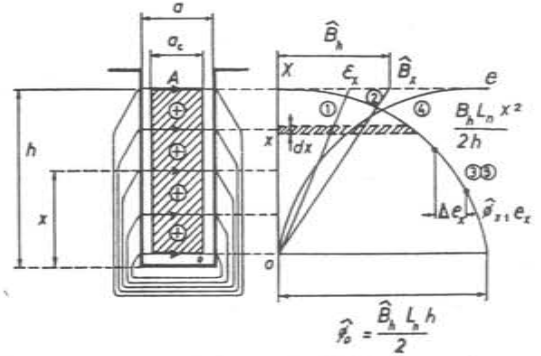


Fig. 1.10.22 b. Fundamento del fenómeno de concentración de corriente en un conductor alojado en su ranura.

Si examinamos el caso de una barra alojada en una ranura, fig. 1.10.22 b, podremos seguir mejor el desarrollo práctico del fenómeno en las máquinas eléctricas.

Supongamos el conductor único, macizo, A, situado en la ranura de una máquina y recorrido por corriente alterna de frecuencia f. Imaginemos por el momento, que la distribución de la corriente en toda la sección del conductor fuese uniforme (densidad Δ, A/mm² constante).

En la fig. b se han dibujado las líneas de flujo autoinductivo creadas por la corriente a través del cuerpo del conductor en un determinado instante y que no son otras sino las líneas de flujo disperso o flujo transversal de ranura. Elijamos, por ejemplo, el momento en que la corriente pasa por un máximo con densidad siempre uniforme $\hat{\Delta}$ en el sentido indicado por las cruces.

A la derecha de la ranura sobre un sistema de ejes coordenados se muestran las curvas representativas de los valores más característicos de este flujo de dispersión. El eje x paralelo a la altura de la ranura corresponde a las cotas radiales del conductor medidas a partir del fondo O del mismo y sobre cada una de estas cotas se ha llevado horizontalmente el segmento correspondiente a la magnitud representada por la curva respectiva a saber:

(1) *F.m.m.* $\hat{\mathcal{E}}_x$ producida por la corriente uniforme del conductor, para cada línea de fuerza autoinductiva que pasa por el punto, en general, de cota x. Al ser constante la anchura a_c del conductor, dicha f.m.m. será proporcional a x

$$\hat{\mathcal{E}}_x = \hat{\Delta}\ (a_c\ x) = k_1\ x \qquad \text{(Av)}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_x = \frac{4\ \pi}{10}\ \hat{\Delta}(a_c x) \qquad \text{(Gb)}$$

(2) *Inducción* $\hat{B}_x$ debida a esta f.m.m. Despreciando la reluctancia del hierro y con un ancho de ranura uniforme a, la inducción en cada punto x será, a su vez proporcional a la f.m.m.

$$\hat{B}_x = \frac{\hat{\mathcal{E}}_x}{a} = \frac{4\ \pi}{10}\ \frac{\hat{\Delta}\ (a_c x)}{a} = k_2\ x \qquad \text{(G)}$$

para $x = h$, $\hat{B}_h = \dfrac{4\ \pi}{10}\ \dfrac{\hat{\Delta}\ a_c h}{a}$

(3) *Flujo máximo* $\hat{\Phi}_x$ abrazado por una capa laminar de corriente en la cota x. Evidentemente, si la longitud axial magnéticamente efectiva de la ranura es L_n y como quiera que cada filamento de corriente sólo enlaza el flujo que circula por cotas superiores a la suya propia x,

$$\hat{\Phi}_x = \int_x^h d\hat{\Phi} = \int_x^h \hat{B}_x\ (L_n\ dx) = \int_x^h \frac{4\ \pi}{10}\ \frac{\hat{\Delta}\ (a_c\ x)}{a}\ L_n\ dx = L_n\ \frac{4\ \pi}{10}\ \frac{\hat{\Delta}\cdot a_c}{a} \int_x^h x\ dx$$

$$= L_n\ \frac{4\ \pi}{10}\ \frac{\hat{\Delta}\cdot a_c}{a}\left(\frac{h^2 - x^2}{2}\right) = \frac{L_n}{2}\left[\frac{4\ \pi}{10}\ \frac{\hat{\Delta}\ (a_c\ h)}{a}\right]\left(h - \frac{x^2}{h}\right) = \frac{L_n\ \hat{B}_h}{2}\left(h - \frac{x^2}{h}\right)$$

para $x = h$, $\hat{\Phi}_h = 0$; para $x = 0$, $\hat{\Phi}_0 = \dfrac{L_n\ h}{2}\ \hat{B}_h$; $\hat{\Phi}_x = \hat{\Phi}_h\left[1 - \left(\dfrac{x}{h}\right)^2\right]$ (M)

El flujo abrazado por cada capa laminar de corriente aumenta como indica la curva (3) simétrica de la (4) que representa al término

$$\frac{L_n\ \hat{B}_h}{2\ h}\ x^2$$

(4) *F.e.m.* eficaz e_x inducida por el flujo de autoinducción Φ_x en cada capa laminar dx limitadora del mismo.
La f.e.m. eficaz inducida por Φ_x, supuesta senoidal su variación en el tiempo, es proporcional al flujo máximo $\hat{\Phi}_x$ y puede expresarse abreviadamente por

$$e_x = k_3\ \hat{\Phi}_x \text{ (V)}$$

La misma curva (3) a diferente escala (5) representa, pues, el valor de la f.e.m. de a.i. para cada capa.
Esta curva nos muestra que, supuesta una distribución inicial uniforme de la corriente en la sección del conductor, aparecen diferencias de f.e.m., Δe_x entre sus distintas capas laminares y estas diferencias de f.e.m. darán origen a corrientes circulatorias en la masa del conductor que han de alterar forzosamente la distribución uniforme supuesta y con ello los resultados numéricos de esta teoría simplificada. El circuito local de cada corriente circulatoria se extiende axialmente cerrándose a la salida de las ranuras por el comienzo de la cabeza de bobina o conexión frontal, fig. 1.10.22 c.

(6) *Corriente circulatoria* i_c. La resistencia de los circuitos elementales de circulación local queda determinada prácticamente por la longitud L del inducido, si despreciamos el pequeño recorrido radial de cierre sobre las cabezas de bobina; podemos considerar, pues, dicha resistencia como constante para todas las corrientes locales que circulan a consecuencia de estas diferencias de f.e.m. en la barra. Si los circuitos

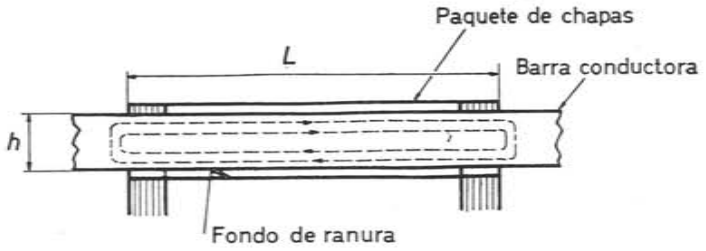


Fig. 1.10.22 c. Circuito local de las corrientes parásitas en una barra.

en cuestión no fueran a la vez autoinductivos las corrientes circulatorias a través de resistencias constantes serían simplemente proporcionales a las diferencias de f.e.m. entre las capas constituyentes de cada circuito.
Por otra parte, estas corrientes locales sobre circuitos puramente óhmicos irían en fase temporal con las f.e.m. las cuales a su vez retrasan 1/4 de período respecto al

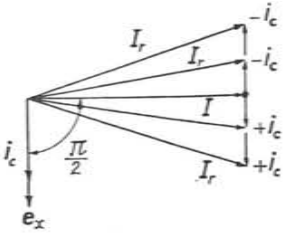


Fig. 1.10.22 d. Fase relativa de las corrientes principal I y circulatorias i_c en una barra dentro de las ranuras, supuestos reducidos los circuitos locales a una resistencia pura.

flujo inductor (aquí el de dispersión, flujo en fase con la corriente principal a la cual debe su origen). En resumen: las corrientes parásitas circulatorias prescindiendo de la reactancia propia de los circuitos locales, retrasarían de $\dfrac{\pi}{2}$ en el tiempo con respecto a la corriente principal I (fig. 1.10.22 d). Como el sentido de circulación de

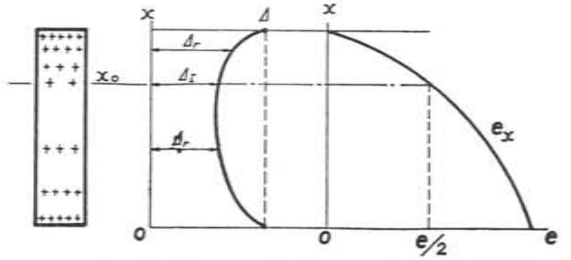


Fig. 1.10.22 e. Distribución de la corriente con circuitos locales sin reactancia.

esta última, en cada barra, es único y el de las corrientes circulatorias es doble, de ida y vuelta (fig. 1.10.22 c), los vectores de i_c se sumarían al de I con la fase propia de aquellos, en una zona; y en la otra, con fase opuesta, dando origen a las resultantes I_r distintas para cada filamento conductor, pero con densidades Δ, siempre mayores que las que se desprenden de tener sólo en cuenta la corriente principal. El efecto, en el supuesto de que los circuitos locales fueran puramente resistentes, se limitaría a un aumento simétrico de los valores de la densidad de corriente a lo alto de la barra, aunque el eje de simetría no coincidiera tampoco con el eje transversal del conductor. Dicho eje pasaría por el punto x_0 donde se alcanza una f.e.m. de autoinducción mitad de la de la capa o (fig. 1.10.22 e). En este caso, la concentración de corriente se produciría tanto hacia el fondo como hacia la superficie libre de la ranura.

En realidad, sin embargo, los circuitos locales presentan también una reactancia apreciable, que supera incluso a la resistencia óhmica, en virtud de lo cual las corrientes circulatorias i_c retrasan de un cierto ángulo con respecto a la f.e.m. de autoinducción e_x. El diagrama de la figura 1.10.22 d toma entonces el aspecto de la figura 1.10.22 f dando pie a una distribución más desigual de las densidades de

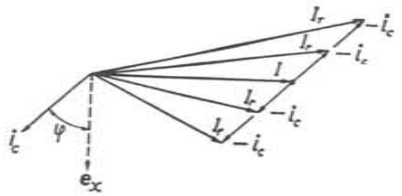


Fig. 1.10.22 f. Diagrama de las intensidades de corriente en las barras, con circuitos locales reactivos.

corriente, las cuales disminuyen en la zona próxima a la raíz y aumentan en la zona opuesta.

Este análisis, habría que proseguirlo por aproximaciones sucesivas ya que se ha partido de la base de una densidad $\hat{\Delta}$ uniforme en la sección de la barra, condición que se altera inmediatamente por el efecto pelicular. El seguir tal camino para llegar a la valoración numérica de los resultados sería muy penoso y, afortunadamente, el estudio cuantitativo puede hacerse planteando ya de salida las ecuaciones del circuito. No obstante, el desarrollo matemático es extraordinariamente complicado por lo cual nos limitaremos a exponer las consecuencias del mismo aunque señalando los fenómenos físicos que permiten prever el resultado en líneas generales.

El hecho de la distribución irregular de las densidades de corriente en el seno de la barra alojada en las ranuras se traduce, en cierto aspecto, como un aumento de las pérdidas por efecto JOULE, computables numéricamente si se atribuye un incremento ficticio a la resistencia óhmica del conductor. Al mismo tiempo, la concentración de la corriente provoca una disminución de la permeancia del circuito magnético de dispersión transversal de las ranuras y con ello un descenso de la caída de reactancia en la máquina.

El agente eficaz de estas modificaciones reside en las f.e.m. de a.i. e_x cuyas diferencias Δe_x son casi proporcionales al cuadrado de la altura de la barra (fig. b curva (5)). Las pérdidas adicionales por efecto JOULE, de expresión formal $\frac{(\Delta e_x)^2}{R}$ crecerán como los cuadrados de estas f.e.m. y en líneas generales, pues, *como la 4.ª potencia* de la altura de la barra. Se comprende, por consiguiente, que el aumento de resistencia debido a este fenómeno pueda adquirir una importancia excepcional a partir de cierta altura de los conductores. De hecho, rebasada la llamada «altura crítica», el aumento que sigue de la sección de las barras, en lugar de disminuir la resistencia óhmica aparente del bobinado, la aumenta, siendo, pues, contraproducente para la marcha normal de la máquina. Por otra parte, el mismo fenómeno del incremento extraordinario que experimenta la resistencia, y la reducción simultánea de la reactancia que se opera a frecuencia industrial con los conductores de gran altura radial, se utiliza para mejorar el par de arranque de los motores asíncronos con rotores denominados «de barra profunda» y análogamente en los de doble arrollamiento.

Dicho aumento de resistencia, útil para la puesta en marcha, va desapareciendo, a medida que el motor se acelera y disminuye la frecuencia rotórica, y es insignificante, como conviene que así sea, a la velocidad de servicio, próxima a la de sincronismo.

1.10.23. Conductor individual en una ranura de varios conductores

La uniformidad de la distribución de la corriente alterna que circula por un conductor, se pierde, no sólo por el efecto autoinductivo del conductor mismo sino, además, por la acción inductora de otros conductores siempre que

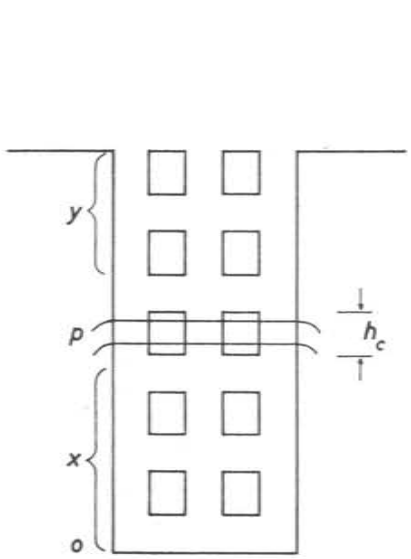


Fig. 1.10.23 a. Acción de las capas inferiores.

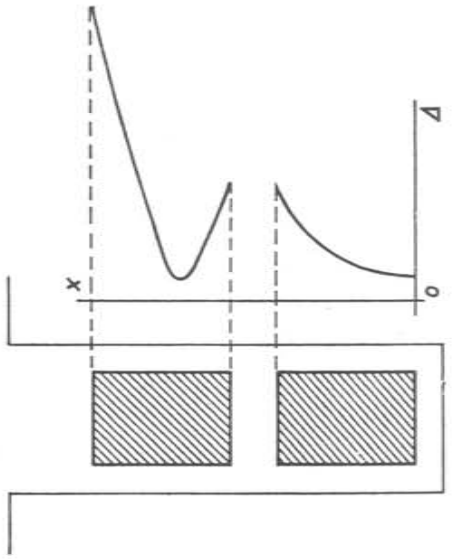


Fig. 1.10.23 b. Distribución de la corriente en el caso de una ranura con dos barras superpuestas

el campo debido a estos últimos atraviese la masa del conductor dado. Carecen de influencia en tal sentido las líneas de flujo que envuelven conjuntamente a todos los filamentos del conductor en cuestión.

Así, cualquier barra de nivel p en la ranura de la fig. 1.10.23 a se halla sometida, en este aspecto, simultáneamente, a su propia influencia, a la de las barras de su mismo nivel y a la de todas las restantes, x, hasta el nivel cero, ya que unas y otras hacen circular parte de su flujo de dispersión, en concatenación progresiva, a través de la altura h_c sobre la capa considerada p. En cambio, las barras y exteriores a p no producen alteración alguna en la distribución de corrientes al nivel p ni en ninguno de los inferiores.

La figura 1.10.23 b muestra un ejemplo de distribución de las densidades de corriente en el caso de una ranura con dos barras superpuestas. Además, entre los conductores a distinto nivel pueden existir también corrientes compensadoras, debidas al desigual flujo de dispersión de ranuras que afecta a unos y otros siempre que vayan unidos en paralelo por puntos situados fuera de las mismas.

Estas corrientes compensadoras no cierran sus circuitos locales exclusivamente por dentro de la masa conductora alojada en las ranuras sino que los prolongan a través de las cabezas de bobina cuya resistencia se incorpora pasivamente con la ventaja de reducir la magnitud de las corrientes de compensación.

Si los conductores de distinto nivel se hallan, por ejemplo, conectados en paralelo, mediante los casquillos extremos soldados a las barras en las caras frontales de las cabezas de bobina, o al final de cada fase, la única mejoría con respecto al conductor único que englobase a todos aquellos en paralelo procede

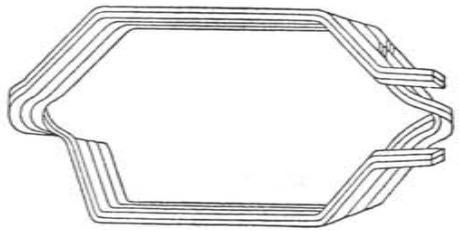


Fig. 1.10.23 c. Inversión del nivel de los conductores en el codo de las cabezas de bobina

del aumento a resistencia introducido por las cabezas de bobina en cuestión. Si dichos conductores se presentan en serie a lo largo del bobinado las corrientes compensadoras entre ranuras distintas son poco importantes y quedan solamente las de circulación en la masa dentro de las ranuras. alimentadas por el flujo de inducción procedente de las capas inferiores. Al mismo resultado favorable se llega para los conductores reunidos en paralelo cuando se efectúan transposiciones completas o simple inversión de orden (fig. 1.10.23 c) en las cabezas de bobina.

1.10.24. Expresión de la resistencia en corriente alterna

a) *Caso de una sola barra en la ranura* (fig. 1.10.24 a). Tal es el caso, por ejemplo, de los rotores de barra profunda.

Representemos por $\underset{\sim}{K}$ la relación del valor de la resistencia aparente $\underset{\sim}{R}$ en corriente alterna de frecuencia f al valor $\underset{=}{R}$ de la resistencia óhmica en corriente continua (frecuencia cero),

$$\underset{\sim}{K} = \frac{\underset{\sim}{R}}{\underset{=}{R}} \qquad [1.10.24\ a]$$

y por

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{K} - 1 = \frac{\underset{\sim}{R} - \underset{=}{R}}{\underset{=}{R}} \qquad [1.10.24\ b]$$

el incremento relativo. $\underset{\sim}{K}$ viene dado, *para la fracción de barra rodeada por el flujo de dispersión en las ranuras*, es decir, en la extensión total L_n de la longitud activa del flujo disperso en las mismas, por la ecuación

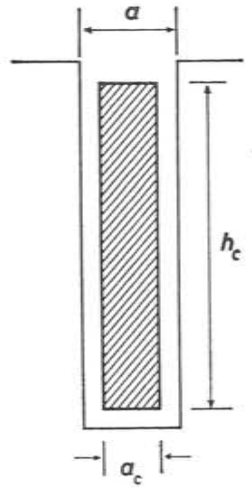


Fig. 1.10.24 a. Barra única en una ranura.

$$\underset{\sim}{K} = \varphi(\zeta) = \zeta \frac{\text{Sh } 2\zeta + \text{sen } 2\zeta}{\text{Ch } 2\zeta - \cos 2\zeta} \qquad [1.10.24\ c]$$

ζ es un parámetro de naturaleza angular, sin dimensión, que incluye las magnitudes características del circuito donde se asientan las corrientes parásitas, función de la altura radial del conductor h_c (cm), de la resistividad $\varrho\left(\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}\right)$ del material, de la frecuencia f (Hz) de la corriente alterna y de las dimensiones de la ranura.

$$\boxed{\zeta = \alpha\ h_c} \quad (\text{cm}^0) \qquad [1.10.24\ d]$$

siendo, fig. a,

$$\boxed{\alpha = 0{,}2\ \pi \sqrt{\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3\ \varrho}}} \quad (\text{cm}_{-1}) \qquad [1.10.24\ e]$$

a_c es la anchura neta de la barra conductora y a la de la ranura expresadas ambas en las mismas unidades; h_c, la altura neta de conductor en cm.

La ecuación [c] admite expresiones simplificadas en ciertos casos [1]

para $\zeta \leqslant 1$ $\quad \underset{\sim}{K} = \varphi(\zeta) \approx 1 + \frac{45}{4}\zeta^4$ [I.10.24 f]

» $1 < \zeta \leqslant 2$ $\quad \underset{\sim}{K} = \varphi(\zeta)$ según la figura I.10.24 b

» $\zeta > 2$ $\quad \underset{\sim}{K} = \varphi(\zeta) \approx \zeta$ según la figura I.10.24 c [I.10.24 g]

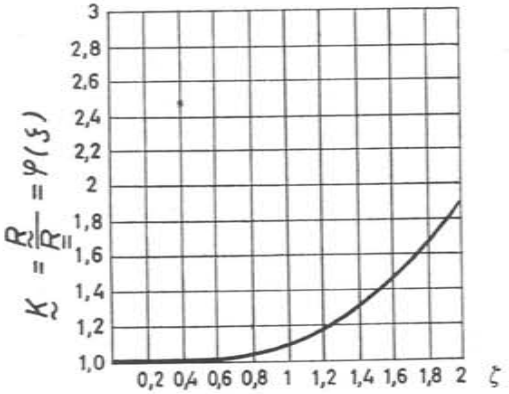


Fig. I.10.24 b. Relación $\underset{\sim}{K}$ entre resistencias en corriente alterna $\underset{\sim}{R}$ y la resistencia óhmica o en corriente continua $\underset{=}{R}$ para el caso de una sola barra maciza por ranura, en función del parámetro ζ (ζ=0...2)

(1) Hagamos notar aparte, que las pérdidas adicionales ($\underset{\sim}{k}\, p_J$) vienen a ser inversamente proporcionales a la resistencia y, por tanto, con temperatura variable, inversamente proporcionales al coeficiente de corrección de la resistencia $k_\theta = \frac{235 + \theta}{310}$, [I.01.14 a].

En efecto: admitiendo que $\zeta \leqslant 1$, las pérdidas adicionales relativas $\underset{\sim}{k}$ son proporcionales a la cuarta potencia de ζ, [f], o la 4.ª de α, [d] y, como consecuencia, inversamente proporcionales al cuadrado de ϱ, [e], e inversamente proporcionales también al cuadrado de k_θ

$$\frac{\underset{\sim}{k}}{\underset{\sim}{k'}} = \left(\frac{k_{\theta'}}{k_\theta}\right)^2 \qquad [I.10.24\ i]$$

Las pérdidas por efecto JOULE son a su vez proporcionales a ϱ y con ello a k_θ

$$\frac{p_J}{p_{J'}} = \left(\frac{k_\theta}{k_{\theta'}}\right)$$

De ello se deduce

$$\frac{\underset{\sim}{k}\, p_J}{\underset{\sim}{k'}\, p_{J'}} = \left(\frac{k_{\theta'}}{k_\theta}\right)^2 \left(\frac{k_\theta}{k_{\theta'}}\right) = \frac{k_{\theta'}}{k_\theta} = \frac{\varrho'}{\varrho} \qquad [I.10.24\ j]$$

La condición $\zeta \leqslant 1$ se procura mantenerla en la construcción de inducidos y transformadores; los valores de ζ superiores convendrá evitarlos excepto en los rotores de barra profunda para motores de inducción con jaula de ardilla donde se rebasa generalmente el valor $\zeta = 2$ a fin de conseguir un buen par de arranque.

Los coeficientes $\underset{\sim}{K}$ o $\underset{\sim}{k}$ así calculados se aplican, según hemos dicho, sólo

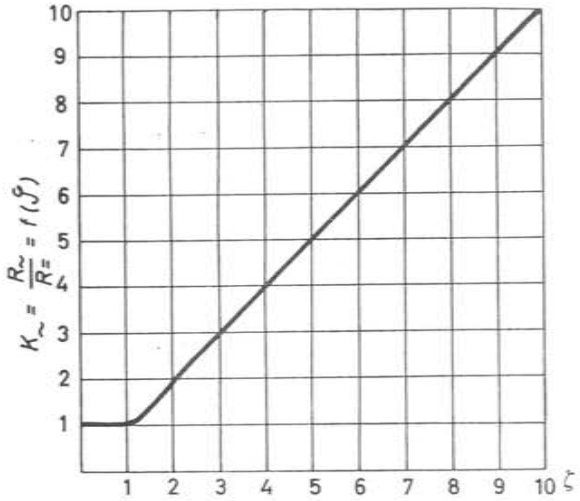


Fig. I.10.24 c. Relación K entre las resistencias en corriente alterna R y en corriente continua $\underset{=}{R}$ para el caso de una sola barra maciza por ranura aplicable, a partir de $\zeta \geqslant 2$.

a la parte de arrollamiento alojada en las ranuras. Para el devanado completo y como promedio del aumento de resistencia se tendrá

$$\underset{\sim}{k_m} = \underset{\sim}{k}\,\frac{L_n}{l_m} \qquad [I.10.24\ h]$$

L_n, repetimos, es la longitud activa de dispersión de los paquetes de chapa [I.06.05 a] habida cuenta de los canales de ventilación radial y, l_m es la longitud media de un conductor (en el caso de los arrollamientos de jaula, la longitud de una barra l_b más la de los dos anillos, equivalente por barra Δl_b. Ver ejemplo siguiente y párrafo 2.03.08).

I.10.25. Ejemplo

Calcular el incremento de resistencia rotórica que experimenta en el momento de arranque un motor trifásico de corto circuito de 12 CV, 8 polos, 50 Hz, tipo de ranura profunda, de rotor inyectado en aluminio constituido por 39 barras de sección $S_b = 54$ mm² y altura $h_c = 26$ mm; la longitud del paquete de chapas es $L = 25$ cm, sin canales de

ventilación radial y los anillos extremos de aluminio tienen cada uno una sección $S_a = 135$ mm² con diámetro medio $D_a = 134$ mm.

La resistividad del cobre en frío (a 20 °C) vale $\frac{1}{56}\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$ y para el aluminio inyectado podemos admitir un coeficiente de aumento del 70 %, o sea, $\frac{1}{33}\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$.

El valor de α, [1.10.24 e],

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3 \rho}} \quad (\text{cm}^{-1})$$

resulta ser en este caso, puesto que la barra inyectada llena íntegramente la ranura ($a_c = a$) y la frecuencia rotórica en el momento del arranque es igual a la de la red, $f = 50$ Hz,

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{50}{10^3 \frac{1}{33}}} = 0{,}806$$

y, por tanto, [1.10.24 d],

$$\zeta = \alpha\, h_c = 0{,}806 \cdot 2{,}6 = 2{,}1 \text{ cm}^0$$

La figura 1.10.21 c nos da inmediatamente como coeficiente multiplicador de la resistencia para las barras

$$\underset{\sim}{K} = 2$$

o sea, un incremento relativo

$$\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{K} - 1 = 1$$

Calculemos ahora la longitud equivalente de anillos por cada barra, la cual viene dada por [2.03.08 b]

$$\Delta l_b = \frac{D_a}{p^2}\frac{S_b}{S_a}\frac{n_2}{2\pi} = \frac{13{,}4}{4^2}\frac{54}{135}\frac{39}{2\pi} = 2{,}08 \text{ cm}$$

$$l_m = l_b + \Delta l_b = 25 + 2{,}08 = 27{,}08 \text{ cm} \quad ; \quad L_n = L = 25 \text{ cm}$$

el valor efectivo $\underset{\sim}{k}_m$ del aumento relativo de resistencia, [1.10.24 h],

$$\underset{\sim}{k}_m = \underset{\sim}{k}\frac{L_n}{l_m} = 1\frac{.25}{27{,}08} = 0{,}925$$

La resistencia rotórica en el momento de la puesta en marcha resulta, pues, igual a 1,925, casi dos veces, la de funcionamiento normal.

1.10.26. Arrollamiento en una o varias bobinas por ranura y conductores rectangulares, todos ellos en serie

La fig. 1.10.26 a muestra una de estas ranuras con bobina única (devanados en una capa) y la fig. 1.10.26 b otra ranura análoga con devanado en dos capas de paso diametral, si la máquina es polifásica, a fin de que se mantenga la identidad de fase temporal postulada para toda la ranura.

Al efecto autoinductivo de una barra de nivel p sobre sí misma, que responde a la ecuación [1.10.24 c] dada anteriormente, hay que sumarle ahora el efecto de irregularidad conductiva provocado por la inducción que ejercen los conductores situados en los niveles inferiores hasta el fondo de la ranura. El incremento de resistencia es distinto de uno a otro estrato de conductores ma-

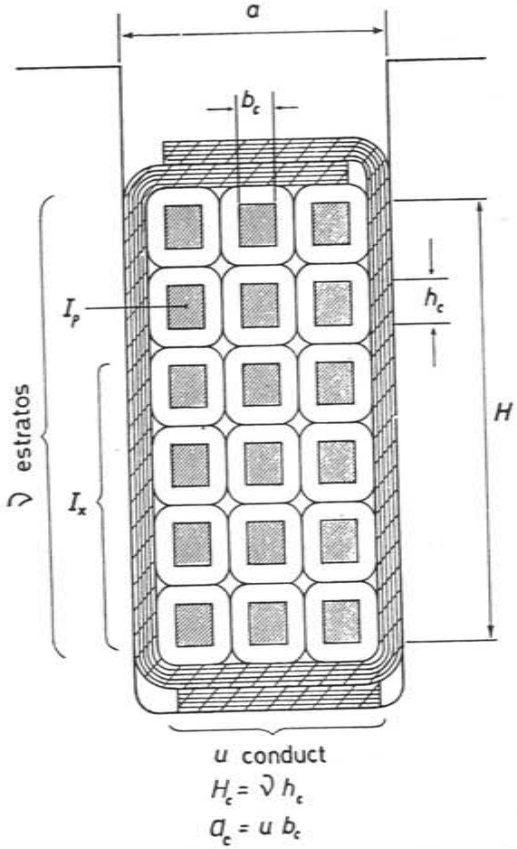


Fig. 1.10.26 a. Dimensiones características para el cálculo de la resistencia en corriente alterna. Devanados de 1 capa. Conductores en serie.

nifestándose en proporción más elevada para los conductores próximos al entrehierro que son los afectados por mayor número de estratos subyacentes.

Para cualquier capa de nivel p (fig. 1.10.23 a) se deduce entre ambos efectos, autoinductivo y de inducción mutua,

$$\underset{\sim}{K} = \varphi(\zeta) + \left[\left(\frac{I_x}{I_p}\right)^2 + \left(\frac{I_x}{I_p}\right)\right] \psi(\xi) \qquad [1.10.26\ a]$$

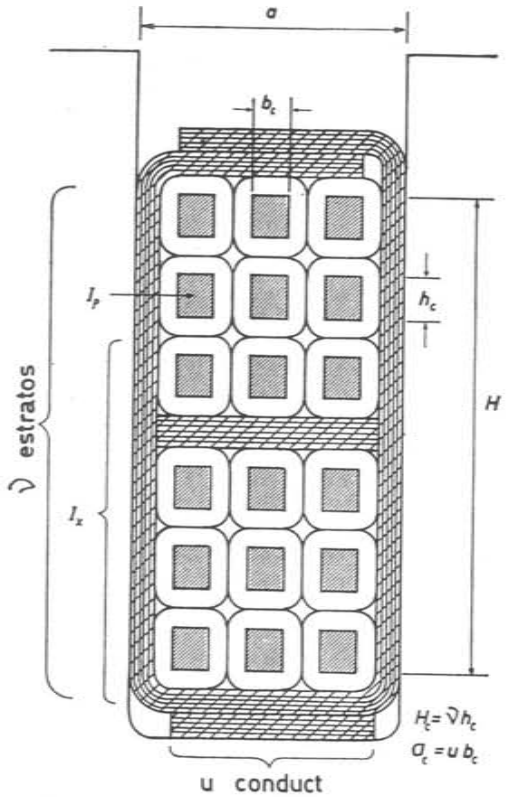


Fig. 1.10.26 b. Dimensiones características para el cálculo de la resistencia en corriente alterna Devanados de doble capa. Conductores en serie.

I_p es la corriente en el estrato p considerado

I_x es la corriente total en el conjunto de estratos por debajo del p^{mo}

$\varphi(\zeta)$ es la misma función [1.10.24 c] simplificable en sus formas [f] o [g], según los valores particulares de ζ

Cuanto a $\psi(\zeta)$, se trata de una nueva función de este parámetro dada por

$$\psi(\zeta) = 2\,\zeta \frac{\text{Sh}\ \zeta - \text{sen}\ \zeta}{\text{Ch}\ \zeta + \cos\ \zeta} \qquad [1.10.26\ b]$$

ecuación que admite también ciertas simplificaciones en determinadas zonas de valores de ζ

$$\text{Para } \zeta \leqslant 1 \qquad \psi(\zeta) \approx \frac{\zeta^4}{3} \qquad [1.10.26\ c]$$

Para $1 < \zeta \leqslant 2$ $\psi(\zeta)$ viene dada por la curva de la fig. 1.10.26 c.

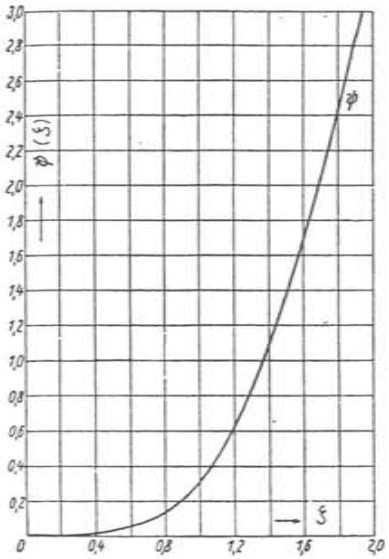


Fig. 1.10.26 c. Función auxiliar ψ (ζ) para el cálculo de la resistencia adicional en corriente alterna de los distintos conductores alojados en una ranura.

Para $\zeta > 2$ no suelen encontrarse aplicaciones prácticas. En caso necesario puede acudirse a la ecuación original [b].

Incidentalmente diremos que para $\zeta > 4$, $\psi(\zeta) \approx 2\,\zeta$ [1.10.26 d]

Tratándose de máquinas normales no se pasa nunca de valores de $\zeta = 1$

La fórmula [a] aplicada a cada estrato de conductores nos da

$$\underset{\sim}{K}_p = \varphi(\zeta) + (p^2 - p) \cdot \psi(\zeta) \qquad [1.10.26\ e]$$

Promediada dentro del conjunto de una ranura, determina el valor medio de $\underset{\sim}{K}$ *para la parte del devanado alojado en la ranura* en cuestión. El incremento relativo $\underset{\sim}{k} = \underset{\sim}{K} - 1$ aplicado al bobinado completo deberá ir afectado del cociente antes citado $\frac{L_n}{l_m}$ entre la longitud activa de los paquetes de chapa desde el punto de vista de la dispersión de ranuras, L_n, y la longitud media de un conductor l_m.

En resumen se obtiene

$$\underset{\sim}{K}_m = \left[\varphi(\zeta) + \frac{p^2 - 1}{3}\,\psi(\zeta)\right] \frac{L_n}{l_m} \qquad [1.10.26\ f]$$

y prescindiendo ahora de cualquier valor $\zeta > 1$, poco normal en este tipo de bobinas, resulta como promedio para todo el devanado

$$\boxed{\underset{\sim}{k}_m} = (\underset{\sim}{K} - 1) = \left(\frac{4}{45}\zeta^4 + \frac{\nu^2 - 1}{3}\frac{\zeta^2}{3}\right)\frac{L_n}{l_m}$$

$$\boxed{= \left(\frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\zeta^4\right)\frac{L_n}{l_m}} \qquad [1.10.26\ g]$$

ν es el número total de estratos verticales o conductores superpuestos por ranura. Como los hilos van aislados entre sí, conviene introducir una ligera corrección en el cálculo de $\zeta = \alpha\, h_c$, [1.10.24 d y e], poniendo

$$\boxed{\alpha = 0{,}2\ \pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3\ \varrho}}\ \ (\text{cm}^{-1})} \qquad [1.10.26\ h]$$

donde, (fig. 1.10.26 a y b),

$H_c = \nu h_c$ la altura neta de conductores por ranura

H es la altura de conductores entre caras extremas incluido los aislantes intermedios

$a_c = u b_c$, la anchura neta de conductores por ranura siendo u el número de conductores por estrato y b_c el grosor neto de cada conductor.

a, el ancho de ranura

todas las longitudes en la misma unidad;

f, la frecuencia en Hz

ϱ la resistividad en $\dfrac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

Para el cobre a 50 Hz y 75 °C, α se acerca bastante a la unidad; en efecto: tomando aproximadamente $\dfrac{H_c}{H}\dfrac{a_c}{a} = 0{,}9$,

$$\alpha = 0{,}2\ \pi \sqrt{0{,}9\ \frac{10^3 \cdot 0{,}0217}{50}} = 0{,}9\ \text{cm}^{-1}$$

Por tanto, en dichas condiciones, numéricamente ζ no se diferencia gran cosa de h_c cm, es decir, el parámetro ζ viene a ser casi igual a la altura del conductor.

Con el fin de tener una idea de la importancia relativa de estos fenómenos, tomando un caso extremo, al que no debe llegarse nunca, por supuesto, diremos

que para una bobina con 3 conductores rectangulares por ranura de 2 cm de altura cada conductor, la resistencia de la barra más próxima al entrehierro aumentaría, a 50 Hz, hasta 16 veces su valor en corriente continua y a 1,6 veces dicho valor, la del fondo:

El promedio sería de unas 8 veces para las tres barras.

Se advierte la necesidad de subdividir las barras altas dentro de la ranura en elementos aislados y permutados entre sí (conexiones ROEBEL, PUNGA), o al menos las de los estratos superiores siempre que sea necesario disponer grandes secciones de conductor recorridas por corrientes de frecuencia industrial (turboalternadores y máquinas de gran potencia). El caso de los rotores de las máquinas asíncronas, ya hemos dicho que es distinto.

Cuando el bobinado se hace con hilos redondos, si se toma para h_c el diámetro del conductor desnudo el valor de $\underset{\sim}{k}$ se hallará multiplicando el segundo miembro de la ecuación [g] por 0,59

1.10.27. Ejemplo

Un alternador trifásico de 1 600 kVA, 94 r/m, 50 Hz, 3 650 V está bobinado en una capa con paso diametral y $\nu = 4$ conductores superpuestos, por ranura, de $b_c \times h_c = 9 \times 7{,}6$ mm, según la fig. 1.10.27 a.

El ancho de la ranura es $a = 16$ mm y longitud del inducido, $L = 306$ mm total

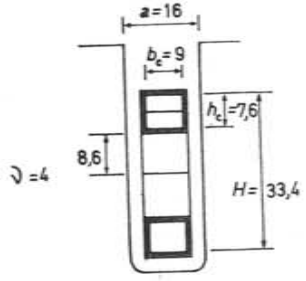


Fig. 1.10.27 a. Ranura de un alternador de 1600 kVA para el cálculo del efecto superficial en los conductores.

con tres canales de ventilación radial ($n_c = 3$) de $\varepsilon_c = 10$ mm cada uno; el desarrollo por conductor vale $l_m = 900$ mm.

Calcular el incremento de resistencia, en %, con corriente alterna de 50 Hz a la temperatura de referencia según las Normas (75 °C).

Tenemos, [1.10.26 h],

$$\alpha = 0{,}2\ \pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3 \varrho}}\ \ \text{cm}^{-1}$$

$$H_c = \nu\, h_c = 4 \cdot 7{,}6 = 30{,}4\ \text{mm}$$

$$H = 4 \cdot 8{,}6 - (8{,}6 - 7.6) = 33{,}4\ \text{mm}$$

$a_c = u\ b_c = 1 \cdot 9 = 9$ mm

$a = 16$ mm

$f = 50$ Hz

$\rho = 0{,}0217\ \dfrac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

y $$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{30{,}4}{33{,}4}\,\frac{9}{16}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}682\ \text{cm}^{-1}$$

luego, [1.10.24 d],

$$\zeta = \alpha\ h_c = 0{,}682 \cdot 0{,}76 = 0{,}518$$

Como este valor se halla por bajo de la unidad podemos, bien, aplicar la ecuación [1.10.26 g]

$$\underset{\sim}{k}_m = \underset{\sim}{K}_m - 1 = \left(\frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\,\zeta^4\right)\frac{L_n}{l_m};$$

Según [1.06.05 a],

$L_n = L - n_c\ \varepsilon_n$; $a = 16$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm, $\varepsilon_n = 1{,}8$ mm (fig. 1.06.05 b) y

$L_n = 306 - 3 \cdot 1{,}8 = 300{,}6$ mm. Así,

$$\underset{\sim}{k}_m = \left(\frac{4^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}518^4\right)\frac{300{,}6}{900} = 0{,}126 \cdot 0{,}333$$

o sea, un 4,2 % de aumento medio de resistencia para todo el bobinado. La parte del mismo alojada a las ranuras experimenta un incremento propio del 12,6 %.

La fig. 1.10.36 b, a que se hace referencia más adelante como solución gráfica para $\underset{\sim}{k}$, nos da también la cifra correspondiente a las ranuras, 12,6 %, al ser $\zeta = 0{,}518$ y $\nu = 4$.

1.10.28. Arrollamiento de doble capa y paso acortado (corrientes de ambas capas desfasadas en ciertas ranuras) — Conductores en serie

El efecto autoinductivo para cada conductor dentro de las ranuras es el mismo que en los casos anteriores, viniendo dada la resistencia relativa en corriente alterna por la función $\varphi(\zeta)$, [1.10.24 c)] que se simplifica $\left(1 + \dfrac{4}{45}\,\zeta^4\right)$ si $\zeta \leqslant 1$, [1.10.24 f]. El efecto adicional de inducción mutua sobre cada nivel p de conductores, debidos a los estratos x inferiores, responde entonces a la ecuación

$$\left[\left(\frac{I_x}{I_p}\right)^2 + \frac{I_x \cos\gamma}{I_p}\right]\psi(\zeta).$$

donde γ representa el ángulo eléctrico de desfase entre la corriente I_p y la resultante de los distintos vectores I_x. También para $\psi(\zeta)$, fórmula [1.10.26b], cabe tener en cuenta la simplificación, [1.10.26 c], $\psi(\zeta) = \dfrac{\zeta^4}{3}$ si $\zeta \leqslant 1$.

La expresión completa de $\underset{\sim}{k}$ como promedio de todo el bobinado es ahora, en correlación con [1.01.26 g], para $\zeta \leqslant 1$,

$$\boxed{\underset{\sim}{k}_m = (\underset{\sim}{K}_m - 1) = \left(\frac{4}{45} + \frac{\nu^2 - 1}{9}\,k_y\right)\zeta^4\,\frac{L_n}{l_m}} \qquad \text{[1.10.28 a]}$$

con los mismos significados de ν (fig. 1.10.26 b), L_n y l_m que en la ecuación similar para una capa [1.10.26 g]; el factor de corrección $k_y < 1$ se tomará de la figura 1.10.28 a en función del paso relativo de bobinas $\dfrac{y_n}{n_p}$ (y_n y n_p, paso de bobinas y paso polar respectivamente medidos en pasos de ranuras; n_p es también el número de ranuras por polo).

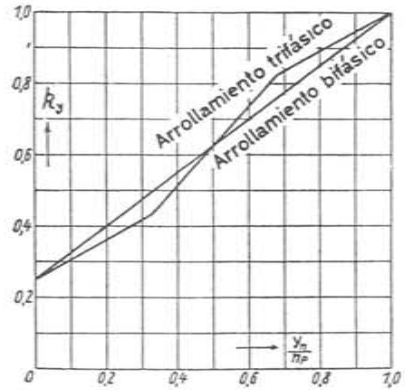


Fig. 1.10.28 a. Factor de corrección k_y para las perdidas adicionales en los devanados de dos capas con paso acortado

1.10.29. Ejemplo

El alternador trifásico de 2 000 kVA, $N = 500$ r/m, $f = 50$ Hz, 5 500 V del ejemplo 1.01.05, tiene $n = 117$ ranuras y se halla bobinado en dos capas con 8 conductores por ranura de $b_c \times h_c = 10 \times 5$ mm en $\nu = 8$ estratos, según la fig. 1.10.29 a. El paso de bobinas es $y_n = 8$ ranuras ($1 \div 9$). La longitud de inducido $L = 50$ cm; $n_c = 6$ canales de $\varepsilon_c = 10$ mm (fig. 1.09.13 a y tabla 1.09.13 a part. 2, 3, 4, 15 y 16). Desarrollo de un conductor, $l_m = 130$ cm.

Calcular el incremento relativo de pérdidas en el cobre.

Tenemos nuevamente, [1.10.26 h],

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\,\frac{a_c}{a}\,\frac{f}{10^3\ \rho}}$$

$H_c = \nu\, h_c = 8 \cdot 5 = 40$ mm

$H = 40 + 6 \cdot 1{,}7 + 9 = 59{,}2$ mm

$a_c = u\, b_c = 1 \cdot 10 = 10$ mm

$a = 16$ mm

$f = 50$ Hz

$$\rho = 0{,}0217\ \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}\ \text{a}\ 75\ ^{\circ}\text{C}$$

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{40}{59{,}2}\,\frac{10}{16}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217_6}} = 0{,}62\ \text{cm}^{-1}$$

De acuerdo con [1.10.24 d],

$$\zeta = \alpha\, h_c = 0{,}62 \cdot 0{,}5 = 0{,}31\ \text{cm}^0$$

El número de pares de polo de la máquina es

$$p = \frac{60\, f}{N} = \frac{60 \cdot 50}{500} = 6$$

y el número de ranuras por polo

$$n_p = \frac{n}{2p} = \frac{117}{12} = 9{,}75;$$

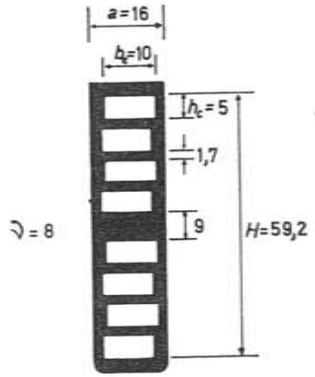


Fig. 1.10.29 a. Ranura de un alternador de 2000 kVA para el cálculo del efecto superficial en los conductores.

con el paso acortado y_n de 8 ranuras, el paso relativo vale

$$\frac{y_n}{n_p} = \frac{8}{9{,}75} = 0{,}82$$

para el cual la figura 1.10.28 a nos da un factor de corrección al incremento de resistencias $k_y = 0{,}9$.

Cuanto a $L_n = L - n_c\, \varepsilon_n$, [1.06.05 a], para $a = 16$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm, $\varepsilon_n = 1{,}8$ mm (fig. 1.06.05 b), y,

$$L_n = 500 - 6 \cdot 1{,}8 = 489{,}2\ \text{mm}.$$

Por tanto, [1.10.28 a],

$$k_m = \left(\frac{4}{45} + \frac{\nu^2 - 1}{9}\, k_y\right) \zeta^4\, \frac{L_n}{l_m} = \left(\frac{4}{45} + \frac{8^2 - 1}{9}\, 0{,}9\right) 0{,}31^4\, \frac{489{,}2}{1300} = 0{,}0588 \cdot 0{,}276 = 0{,}0221$$

o sea, el 2,21 % de aumento medio de pérdidas, por efecto superficial sobre las pérdidas óhmicas o por efecto JOULE. En las ranuras mismas este incremento asciende al 5,88 %.

1.10.30. Valores de ζ y de h_c en el caso conductores en paralelo

Si cada conductor se compone de varios hilos o barras, aisladas, en paralelo situados al mismo nivel, las fórmulas anteriores no sufren modificación alguna, como si se tratase simplemente de barras o hilos más gruesos pero no más altos, ya que la anchura individual no influye sobre estas pérdidas adicionales.

Si cada conductor subdividido lleva sus elementos componentes en niveles distintos sucesivos (fig. 1.10.30 a y b) habrá que añadir a los efectos estudiados cuando todos los elementos se hallaban en serie, las pérdidas suplementarias

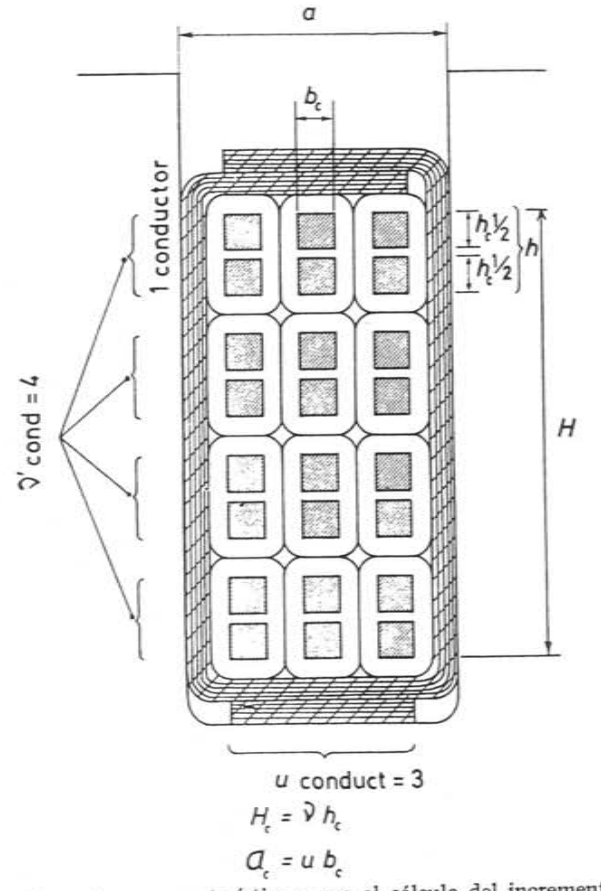


Fig. 1.10.30 a. Dimensiones características para el cálculo del incremento de resistencia por inducción mutua con c.a. Devanado en una capa. Conductores *subdivididos*; dos barras, a distinto nivel, en paralelo, por conductor.

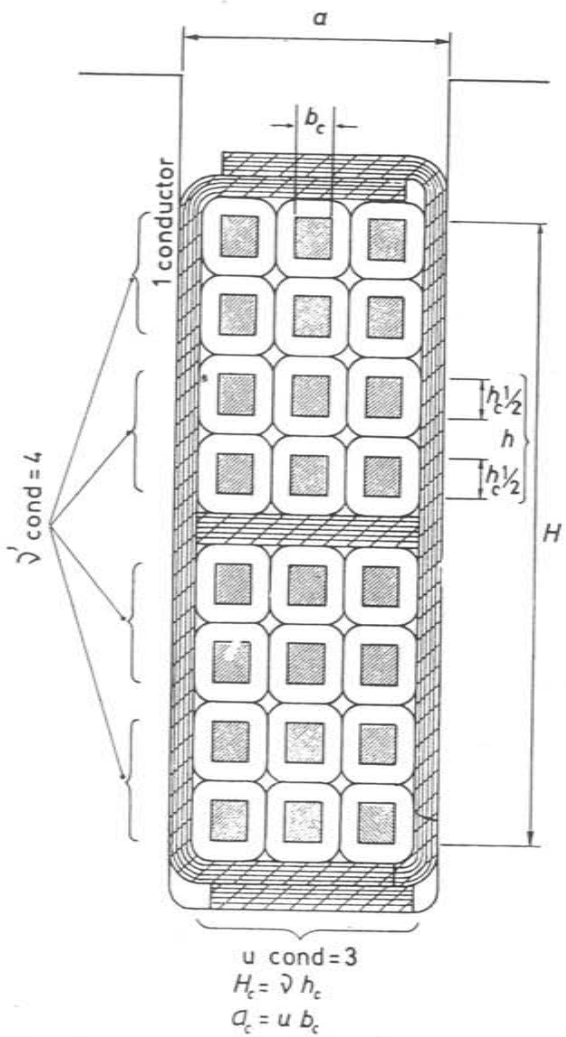


Fig. 1.10.30 b. Dimensiones características para el cálculo del incremento de resistencia por inducción mutua con c.a. Devanado en doble capa. Conductores subdivididos; dos barras, a distinto nivel en paralelo, por conductor.

por corrientes de compensación entre los diversos estratos de un mismo conductor. El término aditivo por este concepto se obtiene a base de considerar como una barra única el total de las que integran el conductor pero solamente a los efectos de la inducción mutua, es decir, del término afectado, por $\psi(\zeta)$. Ello nos da un nuevo valor de h_c que llamaremos h'_c y de ζ que distinguiremos

por ζ'; como quiera que las corrientes compensadoras han de cerrarse por el circuito inerte de las conexiones frontales, lo cual equivale a un aumento de la resistencia óhmica pasiva, se tomará para ϱ un valor modificado en consonancia: $\varrho \frac{l_m}{L_n}$.

Así

$$\alpha' = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3\,\varrho\,\frac{l_m}{L_n}}} \qquad [1.10.30\ a]$$

$$\zeta' = \alpha'\, h'_c \qquad [1.10.30\ b]$$

$$\underset{\sim}{k'}_m = \left(\frac{\nu'^2 - 1}{9}\, k_y\, \zeta'^4\right)\frac{L_n}{l_m} \qquad [1.10.30\ c]$$

incremento a sumar al valor de $\underset{\sim}{k}_m$ para una sola barra simple de altura h_c en ν estratos, a fin de llegar al resultado final.

Si se invierte el orden de los estratos en el codo de las cabezas de bobinas (fig. 1.10.23 c) el término $\underset{\sim}{k'}_m$ se anula. También se anula $\underset{\sim}{k'}_m$ si en lugar de poner los elementos en paralelo se conectan en serie y se disponen en paralelo las vías correspondientes. Es la solución más acertada.

1.10.31. Ejemplo

Un motor trifásico asíncrono de 700 CV, 1 000 r/m, 1 500 V, 50 Hz, 90 ranuras, requiere 4 conductores por ranura de 70 mm² que pueden disponerse de dos maneras: a) colocando 8 barras por ranura, todas en serie con dos vías en derivación; b) manteniendo una sola vía y formando cada conductor de ranura por dos de estas barras unidas en paralelo mediante los casquillos extremos en las cabezas de bobina.

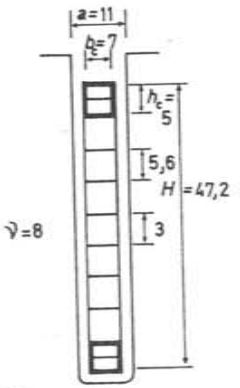


Fig. 1.10.31 a. Ranura de un motor asíncrono de 700 CV para el cálculo del efecto superficial en los conductores.

El devanado para ambas soluciones será de dos capas y paso acortado 1÷13, (y_n=12 ranuras). Las dimensiones de la ranura se dan esquemáticamente en la figura 1.10.31 a. La longitud del inducido es 540 mm con 8 canales de ventilación radial de 1 cm cada uno. La longitud media por conductor es l_m = 115 cm.

Calcular el aumento de resistencia en uno y otro caso a la temperatura normal de 75 °C.

a) 8 *conductores por ranura y dos vías en derivación*

Según [1.10.26 h],

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3\,\rho}}$$

$H_c = \nu\, h_c = 8 \cdot 5 = 40$ mm

$H = 8 \cdot 5{,}6 + 3 - (5{,}6 - 5) = 47{,}2$ mm

$a_c = u\, b_c = 1 \cdot 7 = 7$ mm

$a = 11$ mm

$f = 50$ Hz

$\rho = 0{,}0217 \dfrac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}$ a 75 °C.

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{40}{47{,}2}\,\frac{7}{11}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}7\ \text{cm}^{-1}$$

Según [1.10.21 d],

$$\zeta = \alpha\, h_c = 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}35\ \text{cm}^0$$

El número de polos de la máquina es $2p = 6$ el de ranuras por polo $n_p \geqq \dfrac{80}{6} = 15$ y con un paso de bobinas $y_n = 12$,

$$\frac{y_n}{n_p} = \frac{12}{15} = 0{,}8$$

para el cual la figura 1.10.28 a nos proporciona $k_y = 0{,}89$.

Para $a = 16$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm, $\varepsilon_n = 2{,}5$ mm, fig. (1.06.05 b) y $L_n = L - n_c\, \varepsilon_n = 540 - 8 \cdot 2{,}5 = 520$ mm, [1.06.05 a].

La ecuación [1.10.28 a] nos da ahora

$$\underset{\sim}{k}_m = \left(\frac{4}{45} + \frac{\nu^2 - 1}{9}\, k_y\right) \zeta^4\, \frac{L_n}{l_m}$$

$$= \left(\frac{4}{45} + \frac{8^2 - 1}{9}\, 0{,}89\right) 0{,}35^4\, \frac{52}{115} = 0{,}0942 \cdot 0{,}452 = 0{,}0426$$

es decir 4,26 % de incremento medio de resistencia y 9,42 % en la parte del cobre situado en las ranuras.

b) 4 *conductores dobles por ranura, y una sola vía.* A la cifra anterior de 4,26 % en el incremento hay que sumar la que se desprende del siguiente cálculo, [1.10.30 *a* a *c*],

$$\alpha' = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\,\frac{a_c}{a}\,\frac{f}{10^3\, \rho\, \dfrac{l_m}{L_n}}} = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{40}{47{,}2}\,\frac{7}{11}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217\, \dfrac{115}{52}}} = 0{,}47\ \text{cm}^{-1}$$

$h_c' = 2 \cdot 0{,}5 = 1$ cm

$\xi' = \alpha' h_c' = 0{,}47 \cdot 1 = 0{,}47$ cm

$\nu' = 4$ estratos por ranura

y [1.10.30 c]

$$\underset{\sim}{k}'_m = \left(\frac{\nu'^2 - 1}{9}\, k_y\, \zeta'^4\right) \frac{L_n}{l_m} = \left(\frac{4^2 - 1}{9}\, 0{,}89 \cdot 0{,}47^4\right) \frac{52}{115} = 0{,}0726 \cdot 0{,}452 = 0{,}0329$$

El término aditivo por compensación de corriente entre elementos de un mismo conductor asciende a 3,29 %. Sumando el 4,26 % anterior da 7,55 % de incremento total de resistencia, en vez de 4,26 % que resulta con dos vías en paralelo.

1.10.32. Altura crítica de un conductor h_{crit}

Ya hemos anunciado que al ir aumentando la sección del conductor a expensas de aumentar la altura de las barras, puede llegarse a un valor crítico a partir del cual la resistencia en corriente alterna, y con ella las pérdidas por efecto JOULE crezcan en vez de disminuir.

En efecto: limitándonos al caso de un devanado de paso diametral para el cual es válida la ecuación [1.10.26 g]

$$\underset{\sim}{k}_m = \frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\, \zeta^4\, \frac{L_n}{l_m}$$

identifiquemos numéricamente en un orden aproximado de valores ζ con h_c y notemos que, a igualdad de las restantes dimensiones, la resistencia en corriente continua R es inversamente proporcional a h_c, es decir, a ζ. Siendo k una constante, tendremos, pues,

$$R = \frac{k}{\zeta}$$

y en corriente alterna

$$\underset{\sim}{R}_m = R\,(1 + \underset{\sim}{k}_m) = \frac{k}{\zeta}\,(1 + \underset{\sim}{k}_m)$$

Poniendo en lugar de $\underset{\sim}{k}$ su expresión [1.10.26 g] y simplificado

$$\underset{\sim}{R}_m = k\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\, \zeta^3\, \frac{L_n}{l_m}\right]$$

Derivando $\underset{\sim}{R}_m$ respecto a ζ, igualando a cero y despejando ζ tendremos el valor de este parámetro que hace mínima a la resistencia en cuestión. Efectuando dichas operaciones resulta[1].

$$\boxed{h_{crit} \approx \zeta_{crit} = \sqrt[4]{\frac{3}{\nu^2 - 0{,}2}\,\frac{l_m}{L_n}}} \qquad \text{[1.10.32 a]}$$

Si es, por ejemplo $\nu = 1$ se deduce $\zeta_{crit} = 1{,}39 \sqrt[4]{\dfrac{l_m}{L_n}}$ pero como entonces ζ excede bastante de la unidad, límite hasta el cual es aplicable la ecuación original [1.10.26 g], el

(1) $\dfrac{d\underset{\sim}{R}_m}{\zeta\xi} = -\dfrac{1}{\zeta^2} + \dfrac{L_n}{l_m}\,\dfrac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\,3\,\zeta^2 = 0$

$\dfrac{L_n}{l_m}\,\dfrac{\nu^2 - 0{,}2}{3}\,\zeta^4 = 1$;

$$\zeta = \sqrt[4]{\frac{3}{\nu^2 - 0{,}2}\,\frac{l_m}{L_n}}$$

resultado no puede ser tomado en consideración. Se demuestra que para $\nu = 1$, no existe altura crítica: la resistencia $\underset{\sim}{R}_m$ a igualdad de anchura del conductor, disminuye constantemente a medida que aumenta ζ o h_c.

Si $\nu = 2$,

$$h_{crit} = 0{,}945 \sqrt[4]{\frac{l_m}{L_n}}$$

y con $\frac{l_m}{L_n} \leq 1{,}25$ la fórmula antedicha es ya aplicable por resultar $\xi_{crit} \leqslant 1$.

A partir de $\nu = 3$, valor particular para el cual

$$h_{crit} = 0{,}765 \sqrt[4]{\frac{l_m}{L_n}}$$

la fórmula propuesta es válida prácticamente sin limitaciones.

En la figura 1.10.32 a se da la curva de h_{crit} en función del número de estratos ν supuesto $\frac{l_m}{L_n} = 1$, condiciones que vienen a corresponder a los devanados de los transformadores y, en las máquinas rotatorias, a la parte del arrollamiento alojada en las ranuras

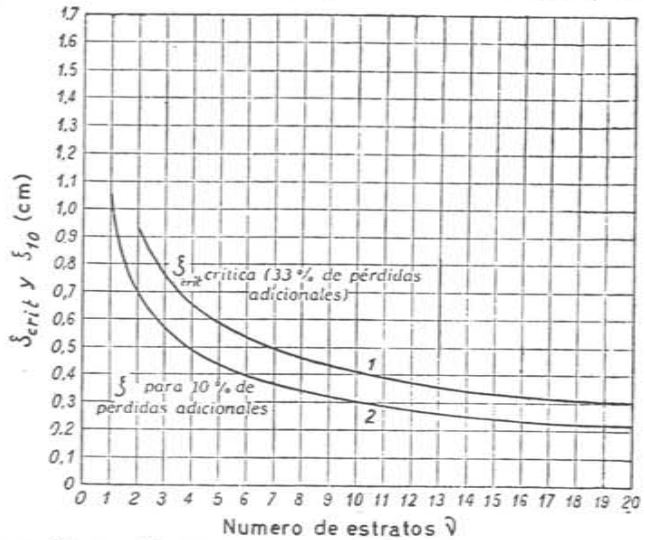


Fig. 1.10.32 a. Altura crítica h_{crit} y de pérdidas adicionales 10 %, en función del número de estractos ν para la parte de arrollamiento alojado en las ranuras.

Como complemento se ha añadido la curva de alturas h_c que en las mismas condiciones provocan unas pérdidas adicionales del 10 %. Para los transformadores, el bobinado de cada columna (primario y secundario independientemente) puede considerarse como alojado en una sola ranura constituida por la ventana del núcleo (ver párrafo 1.10.40 y siguientes).

1.10.33. Pérdidas adicionales con la altura crítica

Mientras la ecuación [1.10.32 a] sea válida por resultar $\zeta \leqslant 1$, el incremento de las pérdidas por corriente alterna alcanza el valor

$$\underset{\sim}{k}_m = 0{,}33 \quad \text{o} \quad 33\ \%$$

independientemente del número de capas radiales ν y de la relación $\frac{l_m}{L_n}$.

Para comprobarlo basta sustituir la expresión [1.10.32 a] en la [1.10.26 g]

$$\underset{\sim}{k}_m = \frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\left(\xi_{crit}\right)^4 \frac{L_n}{l_m} = \frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\left(\frac{3}{\nu^2 - 0{,}2}\frac{l_m}{L_n}\right)\frac{L_n}{l_m} = \frac{1}{3} \qquad [1.10.33\ a]$$

1.10.34 Estrato más desfavorable

El conocimiento del incremento medio de pérdidas, si bien es suficiente para hallar el rendimiento y el calentamiento medio de la máquina, no basta cuando se trata de analizar posibles elevaciones locales de temperatura.

Convendrá comprobar además las pérdidas adicionales en el estrato más afectado por dichos incrementos.

La expresión que nos da la relación máxima de pérdidas dentro de la ranura es, para $p = \nu$ en [1.10.26 e]

$$\underset{\sim}{K}_\nu = [\varphi(\zeta) + \nu\ (\nu - 1)\ \psi(\zeta)].$$

Si consideramos sólo valores de $\zeta \leqslant 1$ el incremento relativo máximo puede tomarse, [1.10.24 f] y [1.10.26 c],

$$\underset{\sim}{k}_\nu = \left[\frac{4}{45}\zeta + \nu(\nu - 1)\frac{\zeta^4}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{4}{45} + \frac{\nu\,(\nu - 1)}{3}\right]\zeta^4 \qquad [1.10.34\ a]$$

Por ejemplo: para un arrollamiento diametral de $\nu = 12$ estratos con una altura ficticia por estrato $\zeta = 0{,}25$ y $\frac{L_n}{l_m} = 0{,}5$ hallaríamos, [1.10.26 g],

$$\underset{\sim}{k}_m = \frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\zeta^4 \frac{L_n}{l_m} = \frac{12^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}25^4 \cdot 0{,}5 = 0{,}0321 \text{ o } 3{,}21\ \%$$

de incremento medio, mientras que el máximo, para las barras más próximas al entrehierro, dentro de las ranuras pasa a ser, [a],

$$\underset{\sim}{k}_\nu = \left(\frac{4}{45} + \frac{12 \cdot 11}{3}\right)0{,}25^4 = 0{,}172 \quad \text{o} \quad 17{,}2\ \%.$$

5,50 veces superior al valor medio.

Es fácil demostrar, sin embargo, que el incremento $\underset{\sim}{k}_\nu$ en la capa más desfavorable de la ranura no puede exceder del triple de valor medio $\underset{\sim}{k}$ referido a la longitud de con-

ductores *dentro de la ranura misma*. En efecto, según las expresiones dadas, poniendo en [1.10.26 g], al circunscribir $\underset{\sim}{k}$ exclusivamente a la ranura,

$$\frac{L_n}{l_m} = 1,$$

tendremos:

$$\frac{\underset{\sim}{k}_\nu}{\underset{\sim}{k}} = \frac{\left(\frac{4}{45} + \frac{\nu(\nu-1)}{3}\right)\zeta^4}{\frac{\nu^2 - 0{,}2}{9}\zeta^4}$$

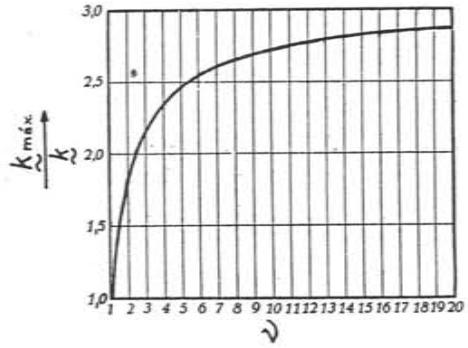


Fig. 1.10.34 a. Relación del incremento relativo de pérdidas por efecto pelicular en el estracto más desfavorable $\underset{\sim}{k}_\nu = \underset{\sim}{k}_{max}$ y el incremento medio $\underset{\sim}{k}$ para la ranura en función del número de estractos ν

En cuanto el número de capas pasa de 2 los términos aditivos $\frac{4}{45}$ en el numerador y 0,2 en el denominador ejercen poca influencia sobre la relación, y, entonces,

$$\frac{\underset{\sim}{k}_\nu}{\underset{\sim}{k}} = \frac{\nu^2 - \nu}{\nu^2}\frac{9}{3} = 3\frac{\nu - 1}{\nu}$$

valor que aumenta con ν y tiende hacia 3 para $\nu = \infty$.

La curva de la fig. 1.10.34 a muestra dicha relación $\frac{\underset{\sim}{k}_\nu}{\underset{\sim}{k}}$ en función del número de estratos.

1.10.35. Cabezas de bobinas

En las cabezas de bobina también se producen pérdidas adicionales de este género pero las dimensiones del circuito de dispersión son más inseguras de fijar y como el valor de las mismas con una máquina racionalmente proyectada no suele ser de gran importancia, se computa, junto con las restantes pérdidas adicionales en carga, tomando para ello una fracción experimental de la potencia de la máquina (Ver Normas VDE).

1.10.36. Curva de pérdidas adicionales en las máquinas rotatorias

En resumen dichas pérdidas sólo dependen de la altura equivalente ζ y del número de estratos superpuestos ν, valoradas debidamente ambas magnitudes según la disposición serie o paralelo de las barras.

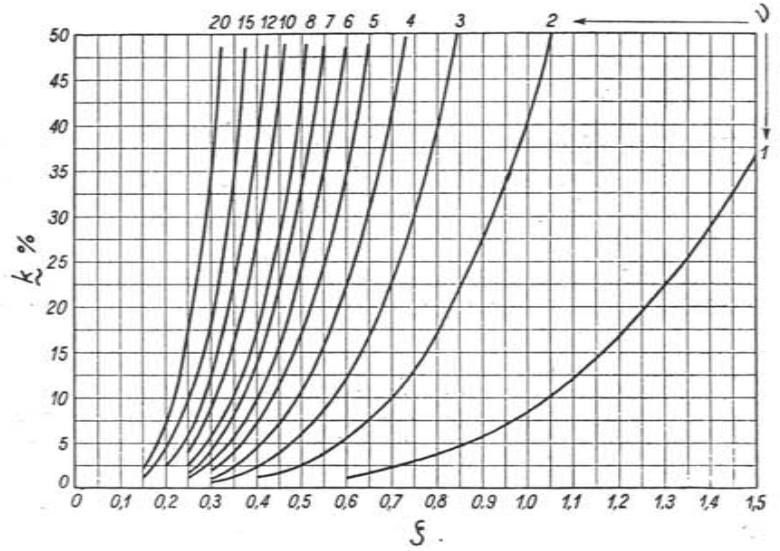


Fig. 1.10.36 a. Incremento relativo de resistencia por efecto pelicular, $\underset{\sim}{k}$ en % de la resistencia en corriente continua según la «altura equivalente» ζ y el número de estratos.

La figura 1.10.36 a muestra en un haz de curvas el incremento $\underset{\sim}{k}$ en % en función de ν y de ζ. Estas curvas son aplicables solamente a la parte de bobinado alojado en las ranuras y para extenderlas a todo el bobinado, el incremento $\underset{\sim}{k}$ habrá que multiplicarlo para la relación $\frac{L_n}{l_m}$. No tienen en cuenta tampoco el factor k_y del posible acortamiento del paso.

1.10.37. Pérdidas adicionales en las máquinas de corriente continua durante la conmutación

Por cada conductor del inducido circula en realidad una corriente alterna cuyo sentido se invierte durante el período de conmutación T_c (fig. 1.10.37 a). Como consecuencia durante este período, se desarrollan en las barras corrientes circulatorias, debidas al flujo de dispersión transversal de ranuras, de la misma naturaleza que las que hemos estudiado para las máquinas de corriente alterna

dando origen a las consiguientes pérdidas suplementarias. En el caso de las máquinas de corriente continua, prácticamente se tiene siempre el número de estratos $v = 2$ ya que los arrollamientos son de doble capa.

El proceso de estudio consiste en descomponer en sus varios armónicos la onda aproximadamente trapecial de corriente que circula por cada conductor

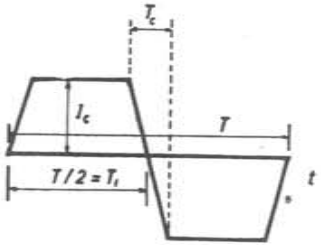


Fig. 1.10.37 a. Onda temporal de corriente por conductor en una máquina de corriente continua.

(fig. citada) y calcular el coeficiente de aumento de pérdidas, con respecto a las puramente óhmicas o para corriente continua que se deriva de la presencia de los mismos.

Efectuando dicho estudio se llega a las siguientes conclusiones:

El coeficiente de aumento de resistencia para la capa de orden p (prácticamente $p = 1$ o $p = 2$) es, por lo que respecta a la parte del bobinado alojada en la ranura

$$\underset{\sim}{k}_p = \frac{4}{3\pi}(3p^2 - 3p + 1)\,\zeta^2 \qquad [1.10.37\ a]$$

(esta expresión responde en realidad a una onda rectangular de corriente, es decir, a una inversión instantánea del sentido de la misma). El valor medio de $\underset{\sim}{k}$ para el arrollamiento completo, teniendo en cuenta la forma trapecial de onda viene dado por

$$\underset{\sim}{k} = \frac{4}{3\pi} v^2 \zeta^2 \frac{L_a}{l_m} k_T$$

con k_T como factor de corrección por la forma de onda

$$k_T = \frac{0{,}116}{0{,}13 + \sigma} \quad \text{y} \quad \boxed{\sigma} = \frac{1}{\zeta^2}\frac{T_c}{T_1} = \boxed{\frac{1}{\zeta^2}\frac{b_e + (u-1)\,\tau_E}{\tau_{pE}}} \qquad [1.10.37\ b]$$

para $v \geq 2$ y $0{,}065 < \sigma < 0{,}25$, como sucede de ordinario,

$$\boxed{\underset{\sim}{k} = \frac{v^2\zeta^2}{14{,}3}\frac{L_a}{l_m}\sqrt{\sigma}} \qquad [1.10.37\ c]$$

En esta expresión ζ es el parámetro característico de la altura de conductor h_c (cm), dado por mediación de [1.10.26 h] o [1.10.30 a] según se trate de barras simples o múltiples respectivamente, tal que,

$$\zeta = \alpha\, h_c \qquad (\text{cm}^0)$$

y

$$\alpha = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3\,\varrho}}\ (\text{cm}^{-1})$$

o

$$\alpha = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3\,\varrho\,\frac{l_m}{L_a}}}\ (\text{cm}^{-1})$$

Sobre H_c, H, a_c y a, ver fig. 1.10.26 b y 1.10.30 b; ρ es la resistividad a la temperatura de funcionamiento en $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

$$f = \frac{p\,N}{60}\ (\text{Hz})$$

(N; velocidad de giro en r/m; p, pares de polos)

esta frecuencia, en general, no será igual ahora a 50 Hz, normal para las máquinas de corriente alterna.

L_a es la longitud total activa de los paquetes de chapa a efectos de la dispersión de ranuras, [1.06.05 a], en cualquier unidad.

l_m la longitud media por conductor en la misma unidad que L_a.

Cuanto a k_T es, según se aprecia, un factor que depende de la relación entre el período de conmutación T_c y el tiempo $T_1 = T/2$ que cualquier punto de la periferia tarda en recorrer un paso polar (fig. 1.10.37 a), siendo por su parte, la relación $\frac{T_c}{T_1}$ igual a

$$\frac{T_c}{T_1} = \frac{b_e + (u-1)\,\tau_E}{\tau_{pE}}$$

b_e = longitud del arco abrazado por una sola escobilla del colector
τ_E = paso de delgas
τ_{pE} = » polar medido sobre el colector
Las tres magnitudes anteriores en la misma unidad
u = número de conductores de un estrato, por ranura.

Esta última fórmula es evidente: la relación de tiempos, a velocidad periférica constante, es igual a la relación de los arcos recorridos y $[b_e + (u-1)\,\tau_E]$ no es más que el arco en el colector medido desde el momento en que el borde anterior de una escobilla inicia el contacto con la arista de entrada a la primera delga de un grupo u de secciones por ranura, hasta que el borde posterior de dicha escobilla toca con la misma arista (arco b_e) más el recorrido del borde posterior en cuestión sobre las otras $(u-1)$ delgas del grupo.

1.10.38. Altura crítica para las máquinas de corriente continua h_{crit}

También existe un valor crítico de h_c por encima del cual las pérdidas totales aumentan con h_c en lugar de disminuir.

Aproximadamente,

$$h_{crit} = \frac{1{,}9 \sqrt[3]{\frac{l_m}{L_n}} \sqrt[6]{\frac{b_e + (u-1)\,\tau_K}{\tau_{pK}}}}{\alpha \sqrt[3]{v^2}} \quad \text{(cm)} \qquad [1.10.38\ a]$$

Para este valor h_{crit} de h_e es $k \approx 0{,}5$, o sea, el aumento total medio de resistencia en corriente alterna asciende a un 50 % y

$$\underset{\sim}{K}_{crit} = 1{,}5. \qquad [1.10.38\ b]$$

1.10.39. Ejemplo

Calcular las pérdidas por efecto pelicular durante la conmutación en la dinamo exapolar de 345 kW, 500 V, 985 r/m, estudiada en los párrafos 1.04.29 y 1.09.07, tabla 1.04.29 a.

De los datos de esta máquina expuestos en dicha tabla entresacamos los que nos interesan completándolos según se indica a continuación:

Longitud geométrica del inducido $L = 36$ cm
Canales de ventilación radial $n_c = 4$ de $\varepsilon_c = 10$ mm cada uno
Dimensiones de la ranura $h_t \times a = 35 \times 12$ mm (fig. 2.05.56 c)
Conductores por ranura: 8 en dos capas; $v = 2$; $u = 4$ cond/capa

Dimensiones por conductor $\frac{\text{desnudo}}{\text{aislado}} = \frac{13 \times 2{,}2}{13{,}3 \times 2{,}5}$ mm; $(h_c = 13$ mm, $b_c = 2{,}2)$

Aislamiento entre capas: 1,2 mm
Diámetro del colector: $D_K = 450$ mm
Número de delgas: $K = 300$
Escobilla: arco × longitud $b_e \times l_e = 16 \times 32$ mm (6 por fila)
Desarrollo de un conductor: $l_m = 80$ cm
De estos datos se deducen:
Altura neta de cobre en la ranura: $H_c = 2 \times 13 = 26$ mm
Altura entre caras extremas de conductores (fig. 2.05.56 c): $H = 2 \times 13{,}0 + 0{,}6 + 1{,}2 = 27{,}8$ mm
Anchura neta de cobre en la ranura: $a_c = 4 \times 2{,}2 = 8{,}8$ mm
Anchura de la ranura: $a = 12$

Frecuencia de la corriente: $f = \frac{p\,N}{60} = \frac{3 \cdot 985}{60} = 49{,}25$ Hz

Resistividad del cobre a 75 °C : $\varrho = 0{,}0217 \frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

Paso polar en el colector: $\tau_{pK} = \frac{\pi D_K}{2p} = \frac{\pi \cdot 45}{6} = 23{,}6$ cm

Paso de delgas: $\tau_K = \frac{\pi D_K}{K} = \frac{\pi \cdot 45}{300} = 0{,}471$ cm

Así, [1.10.26. h],

$$\alpha = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{H_c}{H}\frac{a_c}{a}\frac{f}{10^3 \varrho}} = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{26}{27{,}8}\frac{8{,}8}{12}\frac{49{,}25}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}785 \text{ cm}^{-1}$$

y, [1.10.24 d],

$$\zeta = \alpha\, h_c = 0{,}785 \cdot 1{,}3 = 1{,}02 \text{ cm}^0$$

Según [1.10.37 b],

$$\sigma = \frac{1}{\zeta^2}\frac{b_e + (u-1)\tau_K}{\tau_{pK}} = \frac{1}{1{,}02^2}\frac{1{,}6 + (4-1)\ 0{,}471}{23{,}6} = 0{,}1\,225$$

Con $a = 12$ mm y $\varepsilon_c = 10$ mm, es $\varepsilon_n = 2{,}4$ mm, (fig. 1.06.05 b) y, [1.06.05 a],

$$L_n = L - n_c\ \varepsilon_n = 360 - 4 \cdot 2{,}4 = 350{,}4$$

y de acuerdo con [1.10.37 c],

$$\underset{\sim}{k} = \frac{v^2\,\zeta^2}{14{,}3} \cdot \frac{L_n}{l_m}\sqrt{\sigma} = \frac{2^2 \cdot 1{,}02^2}{14{,}3}\frac{350{,}4}{800}\sqrt{0{,}1225} = 0{,}0446$$

El incremento de pérdidas en el cobre del inducido a 75 °C es, pues, por término medio de un 4,5 %. En las ranuras propiamente dichas este incremento llega al $4{,}46 \times \frac{800}{350{,}4} = 10{,}2$ %

Para la capa superior, $p = 2$ y en la zona de las ranuras, supuesta una onda de inversión de corriente rectangular, [1.10.37 a],

$$\underset{\sim}{k}_2 = \frac{4}{3\,\pi}(3\,p^2 - 3\,p + 1)\,\zeta^2 = \frac{4}{3 \cdot \pi}(3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1)\ 1{,}02^2 = 3{,}09$$

o 309 % de aumento de resistencia.

Aplicándole el mismo factor de corrección medio k_T [1.10.37 c] lo cual servirá sólo para darnos una idea de magnitudes

$$k_T = \frac{0{,}116}{0{,}13 + \sigma} = \frac{0{,}116}{0{,}13 + 0{,}1225} = 0{,}455$$

el efecto se reduce a

$$\underset{\sim}{k}_2 = 0{,}455 \cdot 3{,}09 = 1{,}4$$

o 140 % de incremento de pérdida para la zona de las barras superiores dentro de las ranuras. En realidad, el valor de $\underset{\sim}{k}_2$ para la capa superior no puede exceder del doble de la media, o sea 2.10,2 = 20,4 %, lo cual correspondería ya a un incremento nulo en la capa inferior.

Si queremos saber la altura crítica h_{crit} para esta máquina aplicaremos la ecuación [1.10.38 a]

$$h_{crit} = \frac{1{,}9 \sqrt[3]{\frac{l_m}{L_n}} \sqrt[6]{\frac{b_e + (u-1)\,\tau_K}{\tau_{pK}}}}{\alpha \sqrt[3]{v^2}}$$

$$= \frac{1{,}9 \sqrt[3]{\frac{800}{350{,}4}} \sqrt[6]{\frac{1{,}6 + (4-1)\ 0{,}471}{23{,}6}}}{0{,}785 \cdot \sqrt[3]{2^2}} = 1{,}42 \text{ cm}$$

valor para el cual las pérdidas adicionales durante la conmutación alcanzarían el 50 % de las pérdidas por efecto JOULE en el bobinado del inducido, [1.10.38 b].

1.10.40. Pérdidas adicionales en las bobinas de los transformadores

El estudio relativo a los transformadores se equipara al de las máquinas rotatorias con sólo imaginar que el núcleo magnético forma alrededor de los devanados a manera de una gran ranura, cruzada también por las líneas de

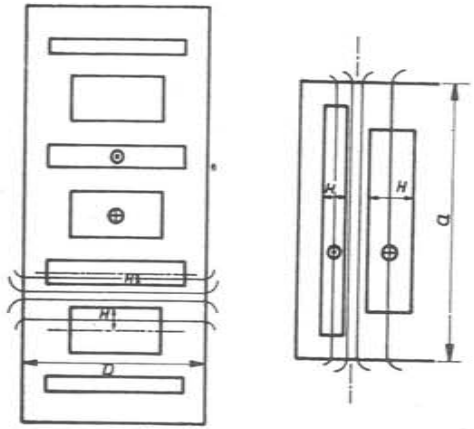


Fig. 1.10.40 a. El núcleo de los transformadores como ranura de una bobina.
a = anchura de ranura
H = altura de las bobinas a los efectos de las pérdidas adicionales

dispersión (primarias y secundarias), siguiendo las entrecaras de ambos arrollamientos enfrentados y el grueso del cuerpo de las bobinas (fig. 1.10.40 a).

Son estas últimas líneas, las que atraviesan la masa conductora, las que dan origen a las pérdidas adicionales.

1.10.41. Cálculo de las pérdidas adicionales en los arrollamientos de los transformadores

Correlativamente a las expresiones dadas para las pérdidas de este género en las máquinas rotatorias, pueden establecerse, en el caso de los transformadores, otras fórmulas similares que se resumen a continuación[1]. Los símbolos se hallan expuestos en la fig. 1.10.41 a. El cálculo se efectúa independientemente para cada uno de los devanados, primario y secundario, que se distinguen por los subíndices adicionales 1 y 2. Daremos las ecuaciones para el primario y son aplicables al otro devanado con sólo sustituir por 2 los subíndices 1.

(1) Para más detalles véase nuestra obra «Teoría Cálculo y Construcción de Transformadores». Edit. Labor Barcelona.

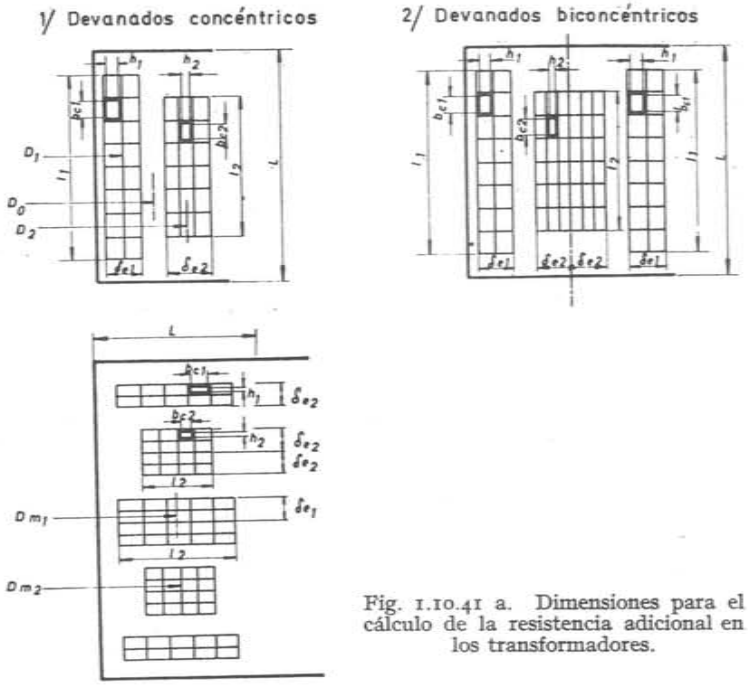


Fig. 1.10.41 a. Dimensiones para el cálculo de la resistencia adicional en los transformadores.

a) *«Altura» ficticia o equivalente*

$$\boxed{\zeta_1 = \alpha_1 \, h_1} \ (\text{cm}^0) \qquad [1.10.41\ a]$$

$$\boxed{\alpha_1 = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{l_{c1}}{L_1}\,\frac{\delta_{c1}}{\delta_{e1}}\,\frac{f}{10^3\,\varrho}}} \ (\text{cm}_1) \qquad [1.10.41\ b]$$

l_{c1} es la longitud total neta de conductores medida paralelamente a las líneas de dispersión

$$l_{c1} = \Sigma\, b_{c1} \quad (\text{cm}) \qquad [1.10.41\ c]$$

b_{c1}, altura individual de las barras conductoras según la dirección de las líneas mencionadas, en cm

L_1 Longitud equivalente del circuito de dispersión en el aire

$$L_1 \approx l_1 + 2\,\delta_{e1} \quad (\text{cm}) \qquad [1.10.41\ d]$$

tomando como máximo $L_1 = L$ (L es la abertura de la ventana paralelamente a las líneas de dispersión; con bobinas alternadas, en transformadores de columnas, la mitad de dicha abertura).

l_1 es la longitud de bobina entre caras extremas, siempre paralelamente a las líneas de flujo disperso, en cm

δ_{e1}, grosor de la bobina *por entrecara*, en cm

δ_{c1}, altura neta de conductores *por entrecara*,

$$\delta_{c1} = \Sigma\, h_1 \text{ (cm)} \qquad \text{[I.10.41 e]}$$

h_1, altura individual de los conductores perpendicularmente a la dirección del flujo disperso, en cm.

Si los conductores están formados por una barra única, h_1 no ofrece duda posible. Si el conductor se halla constituido por varias barras en paralelo, h_1 es la altura total del conductor múltiple como si se tratase de una sola barra, es decir, la simple subdivisión de las barras no altera prácticamente las pérdidas adicionales. Cuando al subdividir los conductores se efectúan transposiciones completas sobre todas las barras en paralelo que lo constituyen, la altura h_1 queda reducida de nuevo para estos efectos, a la de un solo elemento o barra componente.

Supuesto que en vez de acudir a barras múltiples se conecten en paralelo las bobinas individuales, el resultado depende del acierto en la elección de estas bobinas acopladas y de la regularidad en su colocación con respecto al núcleo. Los elementos que quedan en derivación han de permanecer exacta y simétricamente situados con respecto a las líneas de fuerza dispersas. En tal caso cabe tomar para h_1 al menos teóricamente, la altura de una sola barra. En caso contrario h_1 puede llegar a representar el producto de esta altura por el número de vías en paralelo y ya sabemos la gran influencia que h_1 ejerce sobre las pérdidas adicionales.

f es la frecuencia de la corriente en Hz y

ϱ la resistividad del material a la temperatura considerada en $\dfrac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$

I.10.42. **Incremento de pérdidas o de resistencia $\underset{\sim}{k}$, cuando solo existen dos devanados:** primario y secundario.

Para el primario, por ejemplo, la relación de pérdidas viene dada por

$$\underset{\sim}{K}_1 = \varphi(\zeta_1) + \frac{\nu_{e1}^2 - 1}{3}\,\psi(\zeta_1) \qquad \text{[I.10.42 a]}$$

Las funciones $\varphi(\zeta_1)$ y $\psi(\zeta_1)$ son las mismas ya estudiadas al tratar de las máquinas rotatorias (figs. I.10.24 b y I.10.26 c), pero en los transformadores

todavía es más raro rebasar los valores de $\zeta = 1$ por lo cual ya hemos visto que puede escribirse, [I.10.24 f] y [I.10.26 c],

$$\varphi(\zeta) = 1 + \frac{4}{45}\,\xi_1^4 \qquad \text{[I.10.42 b]}$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\xi_1^4}{3} \qquad \text{[I.10.42 c]}$$

ν es el número de estratos o capas de altura h (h_1 para el primario h_2 para el secundario) por entrecara.

En resumen, pues,

$$\boxed{\underset{\sim}{k}_1} = \underset{\sim}{K}_1 - 1 = \left(\frac{4}{45} + \frac{\nu_{e1}^2 - 1}{9}\right)\zeta_1^4 = \boxed{\frac{\nu_{e1}^2 - 0,2}{9}\,\zeta_1^4} \qquad \text{[I.10.42 d]}$$

similar a la [I.10.26 g].

Los valores de $\underset{\sim}{k}$ en función de ζ y ν se representan gráficamente en la fig. I.10.36 a.

I.10.43. **Incremento de pérdidas o de resistencia $\underset{\sim}{k}$ con un número cualquiera de arrollamientos:** primario, secundario, terciario, cte.

Refiriéndonos ahora a cualquier devanado q^{mo} contado a partir del núcleo,

$$\boxed{\underset{\sim}{K}_q = 1 + \underset{\sim}{k}_q = \varphi(\zeta_q) + \left[\left(\frac{(\Sigma_q P_0)^2 + (\Sigma_q P_j)^2}{P_q^2} + \frac{\Sigma_q P_0}{P_q}\right)\nu_{eq}^2 + \frac{\nu_{eq}^2 - 1}{3}\right]\psi(\zeta_q)} \qquad \text{[I.10.43 a]}$$

En esta ecuación, es de nuevo

ζ_q la «altura ficticia» del conductor para el devanado q^{mo} en cuestión, dada por [I.10.41 a]. Según lo expuesto más arriba, se deducirá tomando por altura geométrica del conductor, perpendicularmente a las líneas de dispersión, h_q, la altura de una sola barra si se trata de conductores únicos; la altura total de conductor o suma de las alturas parciales medida según la dirección mencionada, si el conductor va subdividido pero sin transposiciones; o la altura de un solo elemento o barra cuando la subdivisión va acompañada de transposiciones circulares completas referidas siempre a la dimensión perpendicular al flujo disperso. En correspondencia,

ν_{eq} es el número de estratos conductores, por entrecara del arrollamiento q^{mo}, tal y como se desprende de considerar la altura h_q de un estrato según acabamos de decir.

Valen también las consideraciones expuestas anteriormente respecto a la conexión de bobinas en paralelo.

P_q es la potencia aparente del bobinado en estudio

$\sum_{>q} P_q$ indica la suma algebraica de las potencias aparentes que totalizan el conjunto de arrollamientos *exteriores* al q^{mo} valoradas por sus proyecciones sobre el eje vectorial que representaría a la potencia P_q

$\sum_{>q} P_f$ representa la suma algebraica de las potencias aparentes que totalizan los arrollamientos *exteriores* al q^{mo} valoradas por sus proyecciones sobre un eje normal al de la potencia P_q.

Todas las potencias mencionadas expresadas en la misma unidad: kVA, por ejemplo.

Como en general los parámetros ζ para cada bobinado deben mantenerse inferiores a 1, las funciones $\varphi(\zeta)$ y $\psi(\zeta)$ adoptarán estas expresiones sencillas, [1.10.24 f] y [1.10.26 c],

$$\varphi(\zeta) = 1 + \frac{4}{45}\zeta^4$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\zeta^4}{3}$$

Las componentes de las potencias anteriormente señaladas intervienen con signo propio, positivo o negativo, según el de las proyecciones sobre los ejes citados.

1.10.44. Ejemplos (1)

Ejemplo 1. Un transformador de dos arrollamientos concéntricos lleva el devanado interior de B.T. constituido por pletina de cobre de 9 × 4,6 mm aislada a 9,8 × 5,4 mm y bobinada de canto, es decir, en la posición más desfavorable para las pérdidas adicionales ($h_1 = 0{,}9$ cm). La columna consta de 59 espiras helicoidales en una sola capa que ocupan una longitud axial $l_1 = 32$ cm.

Calcular el incremento de resistencia por corriente alterna a 50 Hz y 75 °C.

Según [1.10.41 b],

$$\alpha_1 = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{l_{c1}}{L_1}\frac{\delta_{c1}}{\delta_{e1}}\frac{f}{10^3\varrho}}$$

De acuerdo con los datos, tendremos

Longitud axial de cobre en la bobina $l_{c1} = 59$ espiras × 0,46 cm = 27,2 cm

Grueso de la bobina $\delta_{e1} = 0{,}9$ cm

Longitud axial del circuito de dispersión L_1, [1.10.41 d],

$$L_1 = l_1 + 2\cdot\delta_{e1} = 32 + 2\cdot 0{,}9 = 33{,}8 \text{ cm}$$

Grueso de cobre en sentido transversal al flujo de dispersión. En este caso, con un solo estrato.

$$\delta_{c1} = \delta_{e1} = 0{,}9 \text{ cm}$$

$$f = 50 \text{ Hz} \quad ; \quad \varrho = 0{,}0217\,\frac{\Omega\cdot\text{mm}^2}{\text{m}} \text{ a } 75\ ^\circ\text{C}$$

$$\alpha_1 = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{27{,}2}{33{,}8}\frac{0{,}9}{0{,}9}\frac{50}{10^3\cdot 0{,}0217}} = 0{,}863 \text{ cm}^{-1}$$

$$\zeta_1 = \alpha_1 h_1 = 0{,}863\cdot 0{,}9 = 0{,}776 \text{ cm}^0$$

(1) Los ejemplos siguientes están basados en la obra del mismo autor «Teoría Cálculo y Construcción de Transformadores», Edit. Labor, Barcelona.

de donde, [1.10.42 d], y con un número de estratos por entrecara $r_{e1} = 1$,

$$k_{c1} = \frac{r_{e1}^2 - 0{,}2}{9}\zeta_1^4 = \frac{1^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}776^4 = 0{,}0323$$

O sea, 3,23 % de incremento de resistencia. El gráfico de la fig. 1.10.36 a nos da, con difícil lectura, el mismo resultado.

Ejemplo 2. Un transformador de arrollamientos biconcéntricos presenta sus devanados en la siguiente disposición.

Fracción interior del primario, de B.T. 107 espiras en otras tantas galletas de 12 cobres en paralelo, $\frac{3{,}05\times 14}{3{,}55\times 14{,}5}$ mm. $\frac{\text{desnudo}}{\text{aislado}}$ cada cobre, bobinados de plano, superpuestos en una sola capa; con transposiciones. Longitud de la bobina $l_1 = 218$ cm.

Fracción exterior del primario; 68 espiras en galletas por columna, de 20 cobres en paralelo, de plano, 10, transversalmente al núcleo; 2, longitudinalmente; con transposiciones; dimensiones de cada cobre:

$$\frac{\text{desnudo}}{\text{aislado}}\ \frac{3{,}18\times 8{,}3}{3{,}68\times 8{,}8}\ \text{mm}.$$

Longitud axial de la bobina, $l_1 = 218$ cm

Arrollamiento central secundario de A.T. En hélice, 2 vías por columna, cada vía en media columna, perfectamente simétricas axialmente para evitar corrientes compensadoras suplementarias. Composición de una sola vía: 37 bobinas o galletas, de 11 capas en espiral por bobina y 3 cobres en paralelo por capa o conductor, de $\frac{2{,}8\times 12{,}7}{3{,}7\times 13{,}6}$ mm bobinados de plano y transpuestos; más 2 bobinas extremas de choque de 8 capas en espiral con 4 cobres en paralelo $\frac{2{,}03\times 12{,}7}{3{,}95\times 14{,}6}$ mm $\frac{\text{desnudo}}{\text{aislado.}}$ Longitud axial de la bobina, $l_2 = 218$ cm.

Calcular el incremento de resistencia para cada bobinado a 50 Hz y 75 °C.

Primario interior, [1.10.41 b],

$$\alpha_1 = 0{,}2\,\pi\sqrt{\frac{l_{c1}}{L_1}\frac{\delta_{c1}}{\delta_{e1}}\frac{f}{10^3\varrho}} \quad (\text{cm}^{-1})$$

Longitud axial de cobre con 107 espiras de 1,4 cm de alturas individual

$$l_{c1} = 107\cdot 1{,}4 = 150 \text{ cm}$$

Grueso radial del cobre; una sola capa de 12 pletinas a 0,305 cm por pletina

$$\delta_{c1} = 12\cdot 0{,}305 = 3{,}66 \text{ cm}$$

Grueso radial de bobina: Análogamente

$$\delta_{e1} = 12\cdot 0{,}355 = 4{,}26 \text{ cm}$$

Longitud axial del circuito de dispersión, [1.10.41 d],

$$L_1 = l_1 + 2\,\delta_{e1} = 218 + 2 \cdot 4{,}26 = 226{,}5 \text{ cm};$$

$$f = 50 \text{ Hz} \quad \varrho = 0{,}0217 \frac{\Omega \text{ mm}^2}{\text{m}} \text{ a } 75\ ^\circ\text{C}$$

$$\alpha_1 = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{150}{226{,}5}\,\frac{3{,}66}{4{,}26}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}72 \text{ cm}^{-1}$$

Como las 12 barras van en transposición completa, a los efectos de pérdidas adicionales sólo cabe contar con una de ellas de 0,305 cm de grueso h_1 y 12 estratos. Según [1.10.41 a]

$$\zeta_1 = \alpha_1 h_1 = 0{,}72 \cdot 0{,}305 = 0{,}22 \text{ cm}^0 \ ; \quad \nu_{e1} = 12$$

y, [1.10.42 d],

$$\underset{\sim}{k}_1 = \frac{\nu_{e1}^2 - 0{,}2}{9}\,\zeta_1^4 = \frac{12^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}22^4 = 0{,}0375 \text{ o } 3{,}75\ \%$$

Las curvas de la fig. 1.10.36 a, para $\nu = 12$ y $\zeta = 0{,}22$, dan en lectura más confusa por su reducido valor, la misma cifra $\underset{\sim}{k}$ para esta fracción del bobinado.

Primario exterior

Longitud axial de cobre

$$l_{e1} = 68 \text{ espiras} \times (2 \times 0{,}83 \text{ cm por galleta}) = 113 \text{ cm}$$

Grueso radial de cobre

$$\delta_{e1} = 10 \text{ cobres} \times 0{,}318 \text{ cm por cobre} = 3{,}18 \text{ cm}$$

Grueso radial de bobina

$$\delta_{e1} = 10 \text{ barras aisladas} \times 0{,}368 \text{ cm por barra aislada} = 3{,}68 \text{ cm}$$

Longitud axial del circuito de dispersión, [1.10.41 d],

$$L_1 = l_1 + 2\,\delta_{e1} = 218 + 2 \cdot 3{,}68 = 225{,}4 \text{ cm}$$

y, [1.10.41 b],

$$\alpha_1 = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{l_{e1}}{L_1}\,\frac{\delta_{e1}}{\delta_{e1}}\,\frac{f}{10^3 \varrho}} = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{113}{225{,}4}\,\frac{3{,}18}{3{,}68}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}628 \text{ cm}^{-1}$$

Estando los cobres transpuestos hay que tomar como grueso h_1 el de una sola barra 0,318 cm y el número de estratos $\nu_{e1} = 10$.

De [1.10.41 a],

$$\zeta_1 = \alpha_1 h_1 = 0{,}628 \cdot 0{,}318 = 0{,}2 \text{ cm}^0$$

y, [1.10.42 d],

FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

$$\underset{\sim}{k}_1 = \frac{\nu_{e1}^2 - 0{,}2}{9}\,\zeta_1^4 = \frac{10^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}2^4 = 0{,}0176 \text{ o } 1{,}756\ \%$$

Las curvas de la fig. 1.10.36 a ya no alcanzan para tan reducidos valores de $\underset{\sim}{k}$.

Secundario central. Las bobinas de choque se identifican con las principales a los efectos del cálculo presente.

Longitud axial de cobre:

l_{e2} = 2 vías (37 galletas por vía × 1,27 cm por galleta + 2 galletas de choque por vía × 1,27 cm por galleta) = 2 (39 × 1,27) = 99 cm

Grueso radial de cobre:

11 espiras × 3 cobres por espira × 0,28 cm por cobre = 9,23 cm; y por entrecara, ya que el arrollamiento central hace frente a dos de éstas,

$$\delta_{e2} = \frac{9{,}23}{2} = 4{,}62 \text{ cm}$$

Grueso radial de bobina: análogamente, para una galleta,

$$11 \times 3 \times 0{,}37 = 12{,}2 \text{ cm}$$

y por entrecara

$$\delta_{e2} = \frac{12{,}2}{2} = 6{,}1 \text{ cm}$$

Longitud axial del circuito de dispersión, [1.10.41 d],

$$L_2 = l_2 + 2\,\delta_{e2} = 218 + 2 \cdot 6{,}1 = 230{,}2 \text{ cm}$$

y, [1.10.41 b],

$$\alpha_2 = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{l_{e2}}{L_2}\,\frac{\delta_{e2}}{\delta_{e2}}\,\frac{f}{10^3 \varrho}} = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{99}{230{,}2}\,\frac{4{,}62}{6{,}1}\,\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}02117}} = 0{,}544 \text{ cm}^{-1}$$

Como antes, las transposiciones reducen el valor de h_2 al de una sola barra, 0,28 cm, y aumentan el número de estratos hasta el de barras por entrecara

$$\nu_{e2} = \frac{11 \text{ espiras} \times 3 \text{ barras}}{2} = 16{,}5$$

De [1.10.41. a],

$$\zeta_2 = \alpha_2 h_2 = 0{,}544 \cdot 0{,}28 = 0{,}152 \text{ cm}^0$$

y según [1.10.42 d],

$$\underset{\sim}{k}_2 = \frac{\nu_{e2}^2 - 0{,}2}{9}\,\zeta_2^4 = \frac{16{,}5^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}152^4 = 0{,}017 \text{ ó } 1{,}7\ \%,$$

también ilegible en la fig. 1.10.36 a.

Este transformador se distingue por sus escasas pérdidas adicionales, si bien a expensas de una subdivisión quizás excesiva del cobre y continuas transposiciones.

Ejemplo 3. Un transformador monofásico acorazado de bobinas alternadas tiene sus arrollamientos constituidos de la siguiente forma:

Devanado de B.T.: 6 bobinas idénticas de galleta de 18 espiras por galleta y conductor formado de 4 cobres en paralelo de $\frac{3{,}15 \times 10}{3{,}60 \times 10{,}6}$ mm cada barra, bobinados de plano, en sentido, pues, desfavorable con respecto a las pérdidas adicionales.

Devanado de A.T.: 6 bobinas idénticas de galleta en espiral con 90 espiras por galleta, de cobre $\frac{2 \times 12{,}5}{2{,}78 \times 13{,}3}$ mm también de plano.

Las 12 bobinas se hallan intercaladas de dos en dos con una de baja tensión en cada extremo presentando 6 entrecaras activas según muestra esquemáticamente la

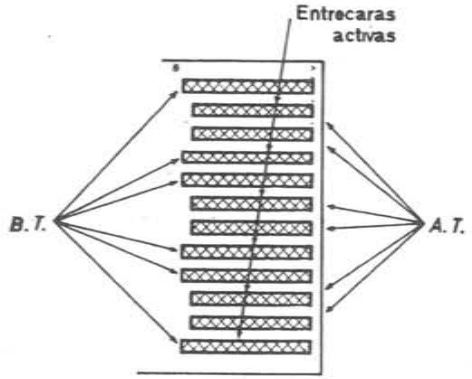


Fig. 1.10.44 a. Esquema de los arrollamientos de un transformador de bobinas alternadas

fig. 1.10.44 a. Los cobres individuales tanto del primario como del secundario, van convenientemente transpuestos.

Calcular los incrementos de resistencia a 50 Hz y 75 °C.

Las alturas h_1, h_2 de los conductores y de las bobinas, δ_{c1}, δ_{c2}, por entrecara activa se han de contar ahora en sentido axial, transversalmente a las líneas de dispersión y las longitudes l_{c1}, l_1 y L_1; l_{c2} l_2 y L_2 radialmente, en dirección paralela a dichas líneas.

Devanado de B.T. Con transposiciones, $h_1 = 1$ cm y $\nu_{e1} = 1$ estrato;
$l_{c1} = 18$ espiras $\times$ 4 cobres por espira $\times$ 0,315 cm = 22,7 cm,
$\delta_{c1} = 1$ estrato $\times$ 1 cm por estrato = 1 cm; $\delta_{e1} = \delta_{c1} = 1$ cm;
$l_1 = 18$ espiras $\times$ 4 barras por espira $\times$ 0,36 cm = 25,9 cm; $L_1 = 25{,}9 + 2 \times 1 = 27{,}9$ cm [1.10.41 d].

Según [1.10.41 b y a],

$$\alpha_1 = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{l_{c1}}{L_1}\frac{\delta_{c1}}{\delta_{e1}}\frac{f}{10^3\,\varrho}} = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{22{,}7}{27{,}9}\frac{1}{1}\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}86 \text{ cm}^{-1}$$

$$\zeta_1 = \alpha_1 h_1 = 0{,}86 \cdot 1 = 0{,}86 \text{ cm}^0$$

y de [1.10.42 d]

$$\underset{\sim}{k}_1 = \frac{\nu_{e1}^2 - 0{,}2}{9}\zeta_1^4 = \frac{1^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}86^4 = 0{,}049 \text{ o } 4{,}9\ \%$$

La fig. 1.10.36 a para $\nu = 1$ y $\zeta = 0{,}86$ da $h_1 = 5\ \%$

Devanado de A.T. Aquí se trata constructivamente de una sola barra por conductor y un estrato por entrecara activa

$$h_2 = 1{,}25 \text{ cm} \qquad \nu_{e2} = 1$$

$$\delta_{c2} = 1{,}25 \text{ cm} \qquad \delta_{e2} = 1{,}25 \text{ cm}$$

La longitud de cobre paralelamente al flujo de dispersión es

$$l_{c2} = 90 \text{ espiras} \times 0{,}2 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

la de bobina

$$l_2 = 90 \text{ espiras} \times 0{,}278 = 25 \text{ cm}$$

la de las líneas de fuerza en el aire, por término medio, [1.10.41 d],

$$L_2 = l_2 + 2\,\delta_{e2} = 25 + 2 \cdot 1{,}25 = 27{,}5 \text{ cm}$$

y según [1.10.41 b y a] y [1.10.42 d],

$$\alpha_2 = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{l_{c2}}{L_2}\frac{\delta_{c2}}{\delta_{e2}}\frac{f}{10^3\,\varrho}} = 0{,}2\,\pi \sqrt{\frac{18}{27{,}5}\frac{1{,}25}{1{,}25}\frac{50}{10^3 \cdot 0{,}0217}} = 0{,}771 \text{ cm}^{-1}$$

$$\zeta_2 = \alpha_2 h_2 = 0{,}771 \cdot 1{,}25 = 0{,}965 \text{ cm}^0$$

$$\underset{\sim}{k}_2 = \frac{\nu_{e2}^2 - 0{,}2}{9}\zeta_2^4 = \frac{1^2 - 0{,}2}{9}\,0{,}965^3 - = 0{,}08$$

El incremento de resistencia experimentado por este arrollamiento asciende al 8 %.

Para $\zeta = 0{,}965$ y $\nu_e = 1$ la figura 1.10.36 a, nos da $\underset{\sim}{k} = 7{,}5\ \%$

Ejemplo 4. Un banco trifásico de transformadores de 80 MVA 50 Hz está compuesto por tres unidades monofásicas equipada cada una con tres devanados concéntricos, a saber: secundario (interior de B.T.), primario (central de A.T.) y terciario (exterior para compensación de fase).

Los primarios en estrella reciben la energía de la línea y la ceden a los secundarios acoplados también en estrella. Los terceros arrollamientos, en triángulo, constituyen un segundo primario alimentado localmente por un generador sincrónico de corriente reactiva (compensador de fase) con el fin de descargar de tal suministro a la línea primaria de larga distancia.

Los datos constructivos de los tres arrollamientos conducen a los siguientes valores característicos de los parámetros ζ y ν que intervienen en las pérdidas adicionales por efecto pelicular, calculables siguiendo el método expuesto en los ejemplos anteriores

Devanado	ζ	ν_e
Primario (central)	0,265	14 estratos
Secundario (interior)	0,377	8 »
Terciario (exterior)	0,287	9 »

De aquí se deduce inmediatemente los valores de las funciones $\varphi(\zeta)$ y $\psi(\zeta)$ que precisamos para determinar aquellas pérdidas adicionales, [1.10.24 f] y [1.10.26 c], (ver también párr. 1.10.43). Ambas funciones las damos ya multiplicadas por 100 con lo cual $\underset{\sim}{k}$ lo obtendremos directamente en %

Devanado	$100[\varphi(\zeta) - 1] = 100\,\frac{4}{45}\,\zeta^4$	$100\,[\psi(\zeta)] = 100\,\frac{\zeta^4}{3}$
Primario central	$\frac{400}{45}\,0{,}265^4 = 0{,}0438\ \%$	$\frac{100}{3}\,0{,}265^4 = 0{,}165\ \%$
Secundario interior	$\frac{400}{45}\,0{,}377^4 = 0{,}18\ \%$	$\frac{100}{3}\,0{,}377^4 = 0{,}675\ \%$
Terciario exterior	$\frac{400}{45}\,0{,}287^4 = 0{,}062\ \%$	$\frac{100}{3}\,0{,}287^4 = 0{,}226\ \%$

Propongámonos calcular el incremento relativo de pérdidas en cada devanado cuando el sistema trabaja a P.C. y cos $\varphi = 0{,}66$ en la red secundaria suministrando el primario toda la potencia activa y el arrollamiento terciario toda la potencia reactiva.

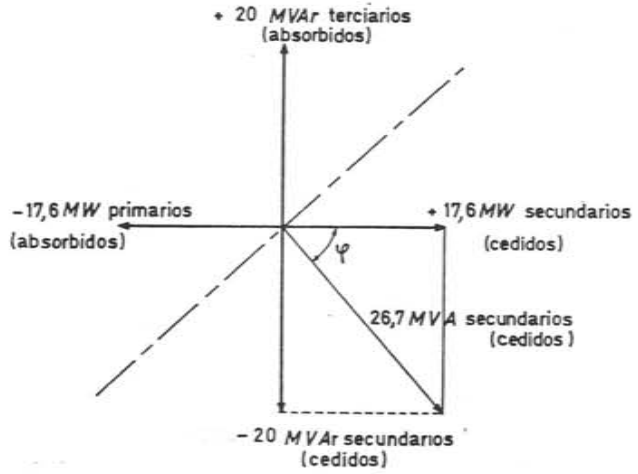


Fig. 1.10.44 b. Diagrama de potencias para el cálculo de las pérdidas adicionales en un transformador de 3 arrollamientos

A estas condiciones corresponderá el siguiente diagrama vectorial de potencias por transformador (fig. 1.10.44 b).

Potencia aparente secundaria:

$$\frac{80\ \text{MVA}}{3} = 26{,}7\ \text{MVA}$$

Potencia activa secundaria con cos $\varphi = 0{,}66$:

$$26{,}7 \cdot 0{,}66 = 17{,}6\ \text{MW}$$

Potencia reactiva secundaria (sen $\varphi = 0{,}75$).

$$26{,}7 \cdot 0{,}75 = 20\ \text{MVAr}$$

Según lo dicho, el primario cederá 17,6 MW al secundario y el terciario cederá a su vez al secundario 20 MVAr.

Asignemos el signo (+) a las potencias activas cedidas y (−) a las absorbidas e inversamente para las potencias reactivas, serán negativas las potencias cedidas y positivas las tomadas lo cual hará similar el diagrama de potencias al de corrientes.

Así (fig. 1.10.44 b) el devanado secundario *cede* 17,6 MW *(positivo)* y *da* también 20 MVAr *(negativos)*. El primario *toma* 17,6 MW *(negativos)* y el terciario *absorbe* 20 MVAr *(positivos)*.

La ecuación que nos indica el porcentaje de incremento de pérdidas en cada arrollamiento será, [1.10.43 a],

$$\underset{\sim}{k}_g = 100\,[\varphi(\zeta_g) - 1] + \left[\left(\frac{(\Sigma_g P_0)^2 + \Sigma_g P_j)^2}{P_g^2} + \frac{\Sigma_g P_0}{P_g}\right) \nu_{cg}^2 + \frac{\nu_{cg}^2 - 1}{3}\right] 100\,[\psi(\zeta_g)]$$

Empecemos por el *devanado interior*, el *secundario*, para el cual son exteriores los otros dos.

Potencia aparente del secundario: $P_g = +\,26{,}7$ MVA (cedida).

$$P_g^2 = 710\ \text{MVA}^2$$

Potencia de los devanados exteriores «en fase» con P_g. Proyectando sobre este eje,

Primario	$-\,17{,}6$ MW $\cdot\,0{,}66 =$	$-\,11{,}7$ MVA
Terciario	$-\,20$ MVar $\cdot\,0{,}75 =$	$-\,15$ »
	$\Sigma_g P_0 =$	$-\,26{,}7$ MVA

Potencia de los devanados exteriores «en cuadratura». Proyectando sobre un eje perpendicular a P_0

Primario	$-\,17{,}6$ MW $\cdot\,0{,}75 =$	$-\,13{,}2$ MVA
Terciario	$+\,20$ MVAR $\cdot\,0{,}66 =$	$+\,13{,}2$ »
		0 MVA

Luego, para este arrollamiento

$$\underset{\sim}{k}_g = 0{,}18 + \left[\left(\frac{710}{710} - \frac{26{,}7}{26{,}7}\right) 8^2 + \frac{8^2 - 1}{3}\right] 0{,}675$$

$$= 0{,}18 + 14{,}17 = 14{,}35\ \%.$$

Pasemos ahora al *devanado medio (primario)* que tiene por único arrollamiento exterior a él, el terciario.

Potencia aparente del primario $P_g = -\,17{,}6$ MVA (absorbida)

$$P_g^2 = 310\ \text{MVA}^2$$

Potencia de los devanados exteriores «en fase» con P_g

Terciario	0
$\Sigma_g P_0 =$	0

Potencia de los devanados exteriores en cuadratura con P_q

$$\text{Terciario} \qquad \frac{+\,20 \text{ MVA}}{\sum_q P_j = 20 \text{ MVA}}$$

$$\left(\sum_q P_j\right)^2 = 400 \text{ MVA}^2$$

Aplicando de nuevo la fórmula [1.10.43 a],

$$\underset{\sim}{k}_q = 0{,}0438 + \left[\left(\frac{0+400}{310} + \frac{0}{20}\right) 14^2 + \frac{14^2-1}{3}\right] 0{,}165 = 52{,}54\ \%$$

Obsérvese la influencia enormemente desfavorable de 3.er devanado sobre el primario.

Para el devanado terciario el cálculo es muy simple al no existir otro alguno exterior a él.

$$\sum_q P_0 = 0 \qquad \sum_q P_j = 0$$

$$\underset{\sim}{k}_q = 0{,}062 + \frac{9^2-1}{3}\, 0{,}226 = 6{,}09\ \%$$

1.10.45. Devanados pasivos

Las pérdidas adicionales por corrientes parásitas se presentan en cualquier devanado, aun cuando se halle fuera de servicio, mientras por los arrollamientos exteriores al mismo circule corriente, es decir, mientras los filamentos conductores de aquel devanado se hallen concatenados con cualquier flujo alterno procedente de las restantes bobinas.

En este aspecto se comportan lo mismo que otros elementos estructurales metálicos alcanzados por los flujos de dispersión, con la única diferencia de que la posición y configuración geométrica mejor definida de los bobinados respecto al recorrido del flujo disperso hace posible el cálculo numérico de estas pérdidas adicionales.

La ecuación que nos da el valor relativo $\underset{\sim}{k}$ de las mismas para el devanado en las condiciones propuestas es la siguiente:

$$\underset{\sim}{k}_q = \left[\frac{\left(\sum_q P_0\right)^2 + \left(\sum_q P_j\right)^2}{P_q^2} + \frac{\sum_q P_0}{P_q}\right] \nu_{eq}^2 \cdot \psi(\zeta_q) \qquad [1.10.45\ a]$$

y con $\zeta_q < 1$, es $\psi(\zeta_q) = \dfrac{\zeta_q^4}{3}$

Los símbolos tienen la misma significación que el del párrafo 1.10.43.

Comparando la primera de estas fórmulas con la [1.10.43 a] notaremos que incluye simplemente el término referente a los devanados exteriores al que se ha tomado en consideración. En concreto, desaparecen el término autoinductivo $\varphi(\zeta_q)$ y el de inducción mutua de las restantes capas del propio devanado, $\dfrac{\nu_{eq}^2-1}{3}\,\psi(\zeta)$, como es lógico esperar ya que, por hipótesis, el arrollamiento en cuestión se supone en vacío, es decir, sin corriente propia de carga.

1.10.46. Ejemplo (1)

Calcular las pérdidas que se producen en el devanado primario (central) del transformador estudiado en el párrafo 1.10.44 ejemplo 4.º cuando el sistema deja de suministrar potencia activa a la red y pasa a funcionar exclusivamente como compensador de fase de otro sistema interconectado como el mismo.

Según [1.10.45 a]

$$\underset{\sim}{k}_q = \left[\frac{\left(\sum_q P_0\right)^2 + \left(\sum_q P_j\right)^2}{P_q^2} + \frac{\sum_q P_a}{P_o}\right] \nu_{eq}^2\, \frac{\zeta_q^4}{3}$$

Como en este caso (ver ejemplo citado)

$$\sum_q P_0 = 0 \quad , \quad \sum_q P_j = +\,20 \text{ MVA} \qquad P_q = -\,17{,}6 \text{ MVA}$$

$$\nu_{eq} = 14 \text{ estratos}, \qquad \zeta_q = 0{,}265\,0;\ 100\,\frac{\zeta_q^4}{3} = 0{,}165$$

$$\underset{\sim}{k}_q = \left[\frac{0+20^2}{(-\,17{,}6)^2} + 0\right] 14^2 \cdot 0{,}165 = 41{,}7\ \%$$

de las pérdidas en corriente continua a P.C.

Nótase el resultado tan desfavorable que produce la simple presencia de un devanado inactivo.

1.10.47. Efecto pelicular de la componente transversal de dispersión

En los transformadores, las líneas de fuerza de dispersión se incurvan al llegar al final de las bobinas, fig. 1.10.47 a, sobre todo si la dimensión del primario y la del secundario paralelamente a dichas líneas es muy distinta ya sea por construcción o bien por eliminación de espiras como consecuencia de poseer tomas de regulación situadas de modo que se produzcan estas diferencias de longitudes activas.

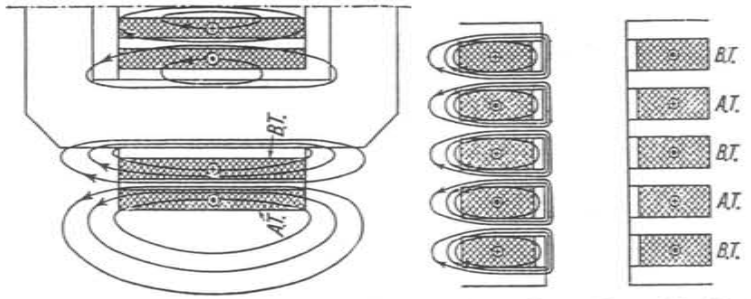


Fig. 1.10.47 a. Flujos de dispersión en los transformadores de arrollamientos concéntricos y de bobinas alternadas.

(1) Basado también en los del libro citado del autor.

En dichas zonas aparecerá entonces una componente transversal del flujo de dispersión paralela a la altura h_1 o h_2 del conductor (fig. 1.10.47 a) en virtud de lo cual el grueso que llega a ser determinante de las pérdidas adicionales para tales espiras es b_{c1} o b_{c2} en lugar de las alturas h respectivas. Al mismo tiempo, el número de estratos ν_{tr} que actúa por inducción mutua sobre dichas espiras, contribuyendo a aumentar aquellas pérdidas, se extiende sobre toda la zona de componente transversal de la dispersión. De este modo, tanto b como ν_{tr}, fig. 1.10.47 b, pueden superar considerablemente a h y ν_e provocando una concentración imprevista de pérdidas adicionales en estas bobinas asimétricas. Como medida prudente debe evitarse también el disponer conductores de lado b superior a 1,5 cm en las zonas de desequilibrio magnético, es decir, frente a los llamados «huecos» del bobinado contrario.

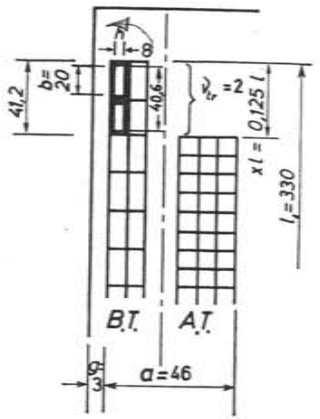


Fig. 1.10.47 b. Cálculo del incremento de pérdidas por dispersión transversal.

El cálculo aproximado de las pérdidas adicionales en las zonas afectadas puede efectuarse como para el cuerpo principal de los bobinados sin más que dar a h y ν_e en las ecuaciones y gráficos correspondientes los valores de b y ν_{tr} respectivamente.

Al mismo tiempo hay que tener en cuenta que el flujo transversal es debido tan solo a una fracción x del bobinado, multiplicándose por x el valor de $\underset{\sim}{k}$ que resulte de aplicar normalmente el cálculo cual si se tratase del arrollamiento completo. Con respecto al resto de este último el incremento de pérdidas se reduce aún en la proporción $\frac{1-x}{x}$.

La longitud equivalente L_{tr} del circuito magnético transversal puede tomarse, figura 1.10.47 b,

$$L_{tr} = \frac{l_1}{2\pi} + \frac{a}{2} + g \qquad [1.10.47\ a]$$

Así, por ejemplo en el caso del transformador mostrado en la figura citada

$$L_{tr} = \frac{330}{2\pi} + \frac{46}{2} + 3 = 78{,}5 \text{ mm}$$

y a 75 °C, [1.10.41 b y a],

$$\alpha_{tr} = 0{,}2\pi \sqrt{\frac{2\times 8}{78{,}5}\,\frac{2\times 20}{41{,}2}\,\frac{50}{10^3\cdot 0{,}0217}} = 0{,}424 \text{ cm}^{-1}$$

$$\zeta_{tr} = 0{,}424 \cdot 2 = 0{,}848 \text{ cm}^0, \quad \nu_{tr} = 2$$

Según la figura 1.10.36 a, $\underset{\sim}{k} = 22\ \%$. Para las espiras en cuestión

$$\underset{\sim}{k}_{tr} = x\ \underset{\sim}{k} = 0{,}125 \cdot 22 = 2{,}75\ \%.$$

y referido al conjunto del arrollamiento interior, el efecto del flujo transversal asciende a

$$\Delta\ \underset{\sim}{k}_{tr} = x\ \underset{\sim}{k}_{tr} = 0{,}125 \cdot 2{,}75 = 0{,}34\ \%.$$

a añadir al porcentaje deducido del cálculo normal que prescinde del efecto ahora considerado.

1.10.48. Pérdidas adicionales en el hierro en carga

La corriente de carga en el inducido de las máquinas de alterna promueve una reacción definida por la onda de f.m.m.m. asociada a las espiras del bobinado. Esta onda es alterna en las máquinas monofásicas y giratoria en las polifásicas, pero siempre de forma escalonada y curso medio poligonal que se acerca, por lo general, a la figura de un trapecio (Capít. 1.07).

La presencia del escalonado por una parte y la forma geométrica de su onda media son el origen de abundantes armónicos, lo cual supone otras tantas ondas extendidas sobre el desarrollo del entrehierro, con más corto período espacial ($\frac{1}{\nu}$ del doble paso polar para el armónico de orden ν). Los armónicos espaciales son alternos en vista de su evolución temporal y de frecuencia f igual a la de la red y estacionarios respecto al inducido en las máquinas monofásicas o giratorios con respecto al mismo órgano en las máquinas polifásicas, siendo su velocidad de rotación igual a (N/ν), si designamos por N la velocidad de giro de la fundamental. Por consiguiente, con respecto al órgano opuesto, la velocidad en cuestión será precisamente N en las máquinas monofásicas y $N \pm \frac{N}{\nu}$ en las polifásicas, tomando el signo (—) para aquellos armónicos que avanzan en el sentido de giro del rotor y el signo (+) para los que progresan en sentido contrario.

Estos armónicos de f.m.m. debidos a la corriente de carga crean otros tantos campos armónicos alternos y fijos en un caso, constantes y giratorios en el otro que son fuentes de nuevas pérdidas en las superficies adyacentes al entrehierro, es decir, en las cabezas de dientes y en las superficies polares. Sin embargo, su importancia práctica sólo se manifiesta en los turboalternadores de rotor macizo.

El estudio analítico del fenómeno conduce a una expresión racional para dichas pérdidas, incluido el efecto de todos los armónicos, de la misma naturaleza que la de las pérdidas superficiales debidas al campo principal, [1.10.10 c] y [1.10.10 e]; traducidas en la forma más adecuada para los turboalternadores, máquinas donde cabe tenerlas en cuenta, y, con cierta aproximación, también para las máquinas de polos salientes macizos,

$$\boxed{p_{SI} = \zeta\, k_s\, f\, p\, L_{Fe} \left(\frac{q\,\tau_1}{1000}\right)^2} \quad \text{(kW)} \qquad [1.10.48\ a]$$

f = frecuencia principal en Hz
p = pares de polos
L_{fe} = longitud neta de hierro rotórico en metros
τ = paso polar en metros
q = carga lineal específica en $\frac{\text{Ac}}{\text{cm}}$
ζ = una serie de términos cuya suma puede tomarse de la fig. 1.10.48 a en función de $\left(\frac{\delta}{\tau_p}\,100\right)$ con δ, entrehierro, y τ_p, paso polar, en las mismas unidades.
k_y = factor que depende del acortamiento del paso de bobinado, según la fig. 1.10.48 b; k_y en dicha figura viene dado en función de $\frac{y_n}{n_p}$

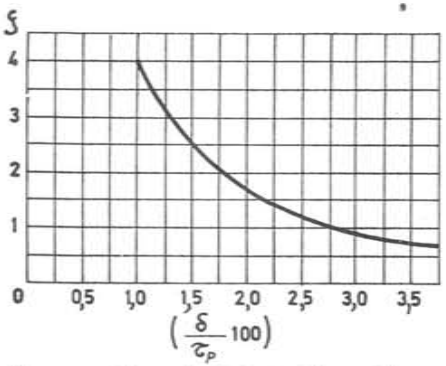


Fig. 1.10.48 a. Coeficientes de perdidas superficiales en el hierro debidas a la corriente de carga, en función de la relación del entrehierro δ al paso polar τ_p expresada en %.

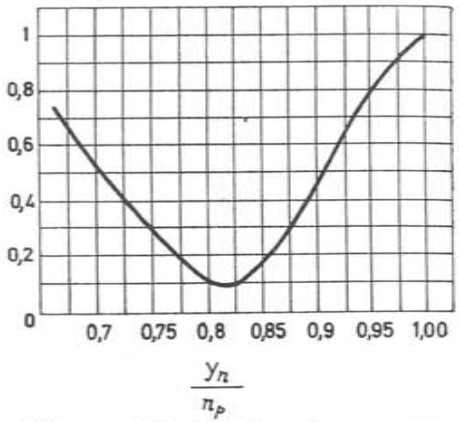


Fig. 1.10.48 b. Coeficiente de corrección k_y de las pérdidas superficiales en el hierro en carga, en función del paso relativo de bobinado $\frac{y_n}{n_p}$

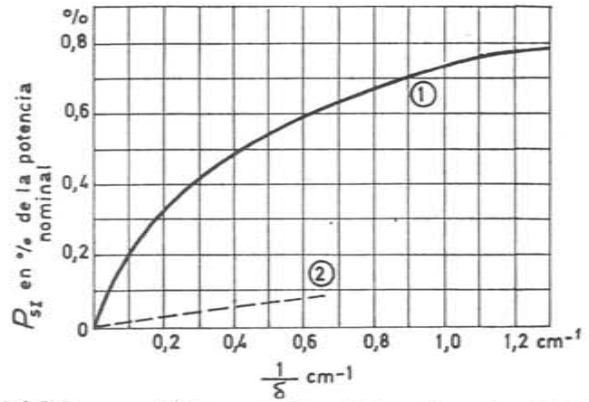


Fig. 1.10.48 c. Pérdidas superficiales en el hierro de los alternados debidas a la corriente de carga, en % de la potencia nominal de la máquina, en función del entrehierro.

y_n = paso de bobina medido en ranuras
n_p = número de ranuras por polo

Las fórmulas anteriores presuponen unos valores medios de las constantes del material, a saber: resistividad del hierro polar $\varrho = 0{,}1\ \frac{\Omega\ \text{mm}^2}{\text{m}}$; permeabilidad relativa $\mu = 3000\ \frac{\text{G}}{\text{O}_e}$. Sin embargo, desviaciones importantes de estas magnitudes no alteran sustancialmente los resultados.

Nótese, curva 1.10.48 b, la influencia considerable que ejerce el acortamiento del paso de bobina. El mínimo de pérdidas se obtiene con un paso de bobinado igual al 81 % del paso polar.

A título de orientación se facilita también el gráfico de la fig. 1.10.48 c, curvas medias de pérdidas adicionales en el hierro en carga en % de la potencia nominal de los turboalternadores, según el entrehierro δ, cm, tanto para el caso de arrollamientos de paso diametral (1) como para arrollamientos de paso acortado óptimo (2) ($y_n/n_p = 0{,}81$).

1.10.49. **Ejemplo**

Calcular las pérdidas adicionales en el hierro, en carga, para un turboalternador de $P = 40$ MVA, $U = 10$ kV, $N = 3\,000$ r/m, $f = 50$ Hz $\cos\varphi = 0{,}8$, con los siguientes datos

Conexión: en estrella
Diámetro del entrehierro $D = 1\,000$ mm
Longitud axial del rotor neto $L_{fe} = 2\,800$ mm
Pares de polos $p = 1$
Número de ranuras del estator $n = 84$
Conductores por ranura $Z_n = 1$
Paso de bobina $y_n = 35$ $(1 \div 36)$ ranuras
Entrehierro $\delta = 3{,}5$ cm
La corriente de línea vale

$$I = \frac{P}{\sqrt{3}\,U} = \frac{40000}{\sqrt{3}\cdot 10} = 2\,310\ \text{A}$$

y como la conexión es en estrella, esta misma será la corriente por fase.

La carga lineal específica,

$$q = \frac{n\,Z_n\,I}{\pi\,D} = \frac{84\cdot 1\cdot 2310}{\pi\cdot 100} = 616\ \frac{\text{Ac}}{\text{cm}}$$

El paso polar

$$\tau_p = \frac{\pi\,D}{2_p} = \frac{\pi\cdot 100}{2\cdot 1} = 157\ \text{cm}$$

Las ranuras por polo

$$n_p = \frac{n}{2p} = \frac{84}{2} = 42$$

y el paso relativo de bobinas

$$\frac{y_n}{n_p} = \frac{35}{42} = 0{,}835$$

próximo al valor óptimo, de acuerdo con lo cual la curva de la fig. 1.10.48 b nos da $k_y = 0{,}1$

Para $\frac{\delta}{\tau_p} 100 = \frac{3,5}{157} 100 = 2,27$ %, la fig. 1.10.48 a nos proporciona $\zeta = 1,4$.
Aplicando ahora la fórmula [1.10.48 a]

$$p_{s1} = \zeta \, k_y \, f \, p \, L_{fe} \left(\frac{q \, \tau_p}{1000}\right)^2$$

$$= 1.4 \cdot 0,1 \cdot 50 \cdot 1 \cdot 2,8 \left(\frac{616 \cdot 1.57}{1000}\right)^2 = 18,3 \text{ kW}$$

Referidas a la potencia aparente del alternador

$$\frac{18,3}{40000} 100 = 0,046 \text{ \%}$$

La curva (2) de la fig. 1.10.48 c para $\frac{1}{\delta} = \frac{1}{3,5} = 0,286$ señala unas pérdidas de este género iguales al 0,04 % de la potencia nominal de la máquina.

Obsérvese que si en lugar del paso relativo próximo al óptimo 0,81 se hubiera adoptado un paso diametral $\frac{y_n}{n_p} = 1$ estas pérdidas serían 10 veces mayores.

1.10.50. Pérdidas adicionales en carga debidas al flujo de las cabezas de bobinas

El flujo de las cabezas de bobinas se cierra por los elementos estructurales de la máquina, platos o escudos frontales, aros de apriete del paquete de chapa, pernos de sujección de las cabezas de bobina, deflectores de aire, ventiladores, casquetes de protección y de zunchado en el rotor, etc., provocando pérdidas locales que, si el proyecto no ha sido bien resuelto, pueden alcanzar una magnitud insospechada. Conviene evitar en lo posible las gruesas piezas metálicas en el ámbito de este flujo de dispersión y sobre todo las piezas magnéticas por lo cual se recurre con frecuencia a tipos de acero inoxidable, latón o bronce y laminados aislantes, todos ellos materiales diamagnéticos, y estos últimos, además, eficaces contra las corrientes circulatorias; su elección no se hallaría justificada de otro modo por razones mecánicas.

Tales pérdidas son difícilmente calculables y sólo la experiencia constructiva puede dar idea de su valor y de los métodos para mantenerlas por bajo de un cierto nivel aceptable.

Digamos que, con soluciones impropias, ellas solas alcanzan magnitudes de un orden múltiple, doble o triple, de las meras pérdidas por efecto JOULE en el devanado, con lo cual superan todas las demás pérdidas debidas a la corriente de carga. Estas cifras se obtienen por medio de ensayos en corto circuito, después de descontar todas las demás pérdidas calculables o medibles en tales condiciones.

1.10.51. Pérdidas por caída de tensión en las escobillas

En las máquinas de corriente continua, en los motores trifásicos de colector y en los de anillos rozantes con escobillas fijas se produce una pérdida constante por efecto JOULE en el contacto de las escobillas cuya expresión depende de la caída de tensión u_e por escobilla y la corriente I de la máquina. Como esta caída suele ser bastante independiente de la carga se adoptan en el cálculo valores fijos de la misma.

En el párrafo 1.01.19 se dieron ya las expresiones de estas pérdidas para los distintos tipos de máquinas.

1.10.52. Pérdidas mecánicas

Son las que se producen por rozamiento en los cojinetes $p_{c\mu}$ y en las escobillas $p_{e\mu}$ y por ventilación p_v; el cálculo de las mismas no se diferencia en nada del de las pérdidas mecánicas de semejante naturaleza en cualquier otra clase de máquinas aunque la mayor parte de las veces ofrece ciertas dificultades el poder precisar bien los datos y coeficientes de pérdidas, sobre todo cuando se trata de la ventilación, y es necesario entonces recurrir a ensayos previos o a resultados similares puramente empíricos.

1.10.53. Pérdidas en los cojinetes deslizantes

En el rozamiento con engrase intermedio las pérdidas son independientes de la presión específica y proporcionales a la proyección diametral de la superficie de rozamiento. Experimentalmente, dentro de la gama de velocidades tangenciales propias de los cojinetes en las máquinas eléctricas se halla que varían como la potencia 3/2 de la velocidad de resbalamiento. Por cojinete, y con aceites medios vienen a resultar

$$\boxed{p_{c\mu} = \frac{d_c \, l_c}{2} \sqrt{v_c^3}} \quad \text{(W)} \qquad [1.10.53 \text{ a}]$$

Aproximadamente,

$$d_c = 2,6 \ \ldots \ 3 \sqrt[4]{\frac{P}{N}} \quad \text{(cm)} \qquad [1.10.53 \text{ b}]$$

$$l_c = 1,5 \ \ldots \ 2 \ d_c \quad \text{(cm)} \qquad [1.10.53 \text{ c}]$$

siendo d_c el diámetro del muñón en cm

l_c la longitud del manguito en cm
N la velocidad de giro en r/m
v_c la velocidad lineal del muñón en m/s
P la potencia útil de la máquina en W.

1.10.54. **Ejemplo**

El alternador de 2 000 kVA 500 r/m del párrafo 1.09.13 lleva un cojinete lado acople de 200 mm Φ por 250 mm de longitud y otro de 170 mm Φ × 220 mm de longitud en el lado opuesto.

Calcular las pérdidas en los mismos.

Las velocidades tangenciales son respectivamente

$$v_c = \frac{\pi\, d_c\, N}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}2 \cdot 500}{60} = 5{,}23 \text{ m/s}$$

y

$$v_c = \frac{\pi \cdot 0{,}17 \cdot 500}{60} = 4{,}45 \text{ m/s}$$

Aplicando la fórmula [1.10.53 a] tendremos:

$$\text{lado acople} \quad p_{c\mu} = \frac{d_c\, l_c}{2}\sqrt{v_c^3} = \frac{20 \cdot 25}{2}\sqrt{5{,}23^3} = 3000 \text{ W}$$

$$\text{lado excitatriz } p_{c\mu} = \frac{17 \cdot 22}{2}\sqrt{4{,}45^3} = \underline{1\,750 \text{ W}}$$

$$\text{Total} = p_{c\mu} = 4\,750 \text{ W}$$

o

$$\frac{4{,}75}{2000}\,100 = 0{,}38\ \%$$ de la potencia aparenteen bornes.

En esta máquina, se midieron unas pérdidas mecánicas incluidos cojinetes, ventilación y frotamiento de escobillas, de 7 100 W que armonizan bastante con la cifra hallada sólo para los cojinetes.

1.10.55. Pérdidas en los cojinetes de rodamiento

En igualdad de condiciones, las pérdidas en estos cojinetes vienen a ser de 1/3 a 1/10 de las que se producen en los cojinetes de deslizamiento. Como fórmula empírica puede adoptarse la siguiente

$$\boxed{p_{c\mu} = 0{,}15\left(\frac{1000}{N}\right) d_c^{\,3}} \quad \text{(W/cojinete)} \qquad [1.10.55 \text{ a}]$$

N = velocidad de giro en r/m
d_c = diámetro del eje en cm

1.10.56. **Ejemplo**

Un motor trifásico asincrónico de 15 CV, 2 930 r/m., rendimiento $\eta = 0{,}87$ y $\cos\varphi = 0{,}91$ lleva en cada extremo de eje un cojinete de bolas. tipo 6 308-Z cuyo diámetro interior es de 40 mm. Calcular las pérdidas en los mismos.

Según la ecuación [1.10.55 a], para el conjunto de los dos cojinetes,

$$p_{c\mu} = 2\left[0{,}15\,\frac{N}{1000}\,d_c^{\,3}\right]$$

$$= 2 \cdot 0{,}15\,\frac{2930}{1000}\,4^3 = 54{,}5 \text{ W}$$

o

$$\frac{0{,}0545}{15 \cdot 0{,}736}\,100 = 0{,}49\ \%$$

de la potencia útil del motor. Con respecto a la potencia aparente en bornes

$$p_{c\mu} = 0{,}49 \cdot \eta \cos\varphi = 0{,}49 \cdot 0{,}87 \cdot 0{,}91 = 0{,}39\ \%.$$

1.10.57. Pérdidas por rozamiento de las escobillas

El rozamiento en este caso se produce entre cuerpos sólidos y las pérdidas son proporcionales simplemente a la presión y a la velocidad lineal del colector

$$\boxed{p_{e\mu} = 9{,}81 \cdot \mu_e\, f_e\, S_e\, v_K} \quad \text{(W)} \qquad [1.10.57 \text{ a}]$$

μ_e = coeficiente de rozamiento de las escobillas sobre el colector (ver tabla 1.01.18 b). En los casos corrientes suele tomarse $\mu = 0{,}2$, y $\mu = 0{,}25$ en las máquinas de difícil conmutación (carbones duros),

f_e = presión específica de contacto en $\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ (tabla 1.01.18 b),

Acostumbra ser de unos 0,2 kg/cm²

S_e = superficie total de contacto de las escobillas en cm²

v_K = velocidad periférica del colector en m/s

1.10.58. Pérdidas combinadas en las escobillas

Hemos visto que las pérdidas por efecto JOULE valen para las máquinas de continua, [1.01.19 a],

$$p_{eJ} = 2u_e\, I \text{ (W)}$$

($2\,u_e$) caída de tensión por par de carbones en V; y las de rozamiento, [1.10.57 a],

$$p_{e\mu} = 9{,}81\ \mu_e f_e S_e v_K \qquad \text{(W)}$$

dando, pues, un total de

$$p_e = p_{eJ} + p_{e\mu} = 2u_e\ I + 9{,}81\ \mu_e f_e S_e v_K \quad \text{(W)}$$

la superficie de contacto S_e (cm²) viene determinada por la corriente de carga I (A) y la densidad de corriente admisible $\Delta_0 \left(\frac{\text{A}}{\text{cm}^2}\right)$

Entre las escobillas de entrada y salida,

$$S_e = 2\,\frac{I}{\Delta_e}\ (\text{cm}^2)$$

Luego,

$$p_e = I(2\ u_e + 19{,}62\,\frac{\mu_e f_e}{\Delta_e}\,v_K)\ \text{(W)}$$

En realidad, elegido el tipo de escobillas queda fijada la densidad de corriente admisible Δ_e, la caída por par de carbones 2 μ_e, la presión admisible f_e y el coeficiente de frotamiento μ_e de tal modo que

$$p_e = C_e\ I \quad \text{(W)} \qquad [1.10.58\ a]$$

siendo

$$C_e = 2\ \mu_e + k v_K \left(\frac{\text{W}}{\text{A}}\right)$$

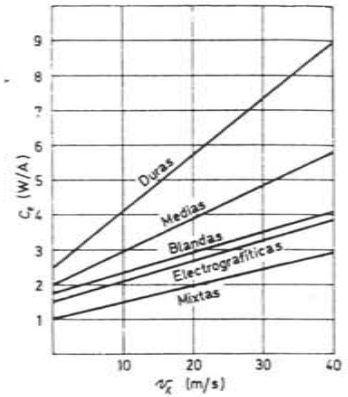


Fig. 1.10.58 a. Pérdidas combinadas en las escobillas (efecto Joule + rozamiento).

una función lineal de la velocidad del colector v_K (m/s) para cada calidad de carbones. Dividiremos todas estas calidades en 5 categorías, según el cuadro a continuación, tomadas, como base, de la tabla 1.01.18 b

Escobillas	$\Delta_e \left(\frac{\text{A}}{\text{cm}^2}\right)$	$2\,u_e$ (por par de carbones)	μ_e	$f_e \left(\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}\right)$	$C_e \left(\frac{\text{W}}{\text{A}}\right)$
Duras	6	2,5	0,25	0,20	$(2{,}5 + 0{,}16\,v_K)$
Medias	8	2,0	0,2	0,20	$(2 + 0{,}096\,v_K)$
Blandas	10	1,75	0,15	0,20	$(1{,}75 + 0{,}058\,v_K)$
Electrografíticas	10	1,5	0,15	0,20	$(1{,}5 + 0{,}058\,v_K)$
Mixtas	15	1,0	0,25	0,15	$(1 + 0{,}048\,v_K)$

La fig. 1.10.58 a muestra los valores de $C_e \left(\frac{\text{W}}{\text{A}}\right)$ en función de la velocidad del colector v_K (m/s).

Para las máquinas de alterna, véase párrafo 1.01.19.

1.10.59. **Ejemplo**

La dinamo de $p = 345$ kW, $U = 500$ V, $I = 690$ A, $N = 985$ r/m, $2p = 6$ polos estudiada en el párrafo 1.09.07, va equipada con 6 filas de escobillas electrografíticas, calidad EG 99, de 6 escobillas por fila y sección 1,6 × 3,2 cm por escobilla. El diámetro del colector es $D_K = 450$ mm.

Calcular las pérdidas en los carbones

Tomando una caida $2\,u_e = 2{,}0$ V por par de carbones, las pérdidas por efecto JOULE ascienden a

$$P_{eJ} = 2u_e\ I = 2{,}0 \cdot 690 = 1\,380\ \text{W}$$

Las pérdidas por rozamiento que se desprenden de [1.10.57 a] tienen por expresión

$$P_{e\mu} = 9{,}81 \cdot \mu_e\ f_e\ S_e\ v_K \qquad \text{(W)}$$

La superficie de contacto de los $6 \times 6 = 36$ carbones vale

$$S_e = 36 \times 1{,}6 \times 3{,}2 = 185\ \text{cm}^2$$

la velocidad periférica del colector

$$v_K = \frac{\pi\, D_K\, N}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}45 \cdot 985}{60} = 23{,}2\ \text{m/s}$$

Suponiendo, además, una presión unitaria en las escobillas $fe = 0{,}15\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ y un coeficiente de rozamiento $\mu_e = 0{,}22$

$$p_{e\mu} = 9{,}81 \cdot 0{,}22 \cdot 0{,}15 \cdot 185 \cdot 23{,}2 = 1382\ \text{W};$$

en total,

$$p_e = 1\,380 + 1\,382 = 2\,762\ \text{W}$$

o

$$\frac{2{,}76}{345}\ 100 = 0{,}80\ \%$$

de la potencia en bornes de la máquina.

Si acudimos a la fig. 1.10.58 a hallamos que para escobillas electrografíticas y $v_K = 23{,}2$ m/s es $C_e = 2{,}9 \left(\frac{\text{W}}{\text{A}}\right)$ de donde, [1.10.58 a],

$$p_e = C_e\ I = 2{,}9 \cdot 690 = 2000\ \text{W}.$$

La discrepancia proviene de que el gráfico está calculada con un coeficiente $\mu = 0{,}15$ y una densidad de corriente de 10 A/cm² para escobillas electrografíticas mientras que esta máquina en realidad trabaja sólo a $\frac{690\ \text{A}}{(185/2)\ \text{cm}^2} = 7{,}5\ \frac{\text{A}}{\text{cm}^2}$, lo cual conduce a una superficie de rozamiento más elevada. La disminución de la densidad de corriente viene justificada por la clase de servicio (laminación) causa de frecuentes e intensas sobrecargas.

1.10.60. Pérdidas por ventilación

Son las más difíciles e inseguras de evaluar. Cuando la circulación del aire es ordenada y prevista mediante ventiladores de modo que el caudal y la presión puedan llegar a conocerse dentro de unos límites de error aceptables, cabe admitir que las pérdidas por ventilación p_v son proporcionales a las pérdidas p_a (W) a disipar por el aire y al cuadrado de la velocidad tangencial del ventilador v_v (m/s).

El coeficiente de proporcionalidad ν_v es absolutamente empírico escribiéndose así,

$$\boxed{p_v = \nu_v\, p_a\, v_v^2} \text{ (W)} \qquad \text{[1.10.60 a]}$$

p_a incluye solamente, según decimos, las pérdidas a evacuar a través del aire lanzado por el ventilador lo que suele excluir las de los cojinetes y anillos exteriores rozantes, según sea el tipo constructivo de la máquina: ν_v varía enormemente con la solución adoptada y es preciso crear un sistema de experimentación previa sobre elementos de construcción análogos. Si no se dispone de otros datos, tómese en primera aproximación

$$\nu_v = \frac{1}{20000}$$

La fórmula anterior se deduce como sigue:

La potencia p_a (W) que puede absorber un caudal de aire $Q_a \left(\frac{m^3}{s}\right)$ de peso específico γ_a kg/m³ y calor específico $c_a \left(\frac{J}{kg\ ^oC}\right)$ al sufrir un aumento de temperatura $\Delta\theta_a$ (°C) viene dada por

$$p_a = (Q_a\, \gamma_a)\, c_a\, \Delta\theta_a \text{ (W)}$$

de donde el caudal de aire necesario es

$$\boxed{Q_a = \frac{p_a}{\gamma_a\, c_a\, \Delta\theta_a}} \left(\frac{m^3}{s}\right) \qquad \text{[1.10.60 b]}$$

la masa de aire M_a puesta en movimiento por la ventilación durante un intervalo t asciende a

$$M_a = \frac{Q_a\, \gamma_a}{g}\, t \left(\frac{kg}{m/s^2}\right)$$

g = aceleración de la gravedad = 9,81 $\frac{m}{s^2}$

Para acelerar esta masa desde el estado de reposo hasta una velocidad v_a a la salida del ventilador es preciso aplicarle una impulsión total ($F_a\ t$) dada por

$$F_a t = M_a v_a = \frac{Q_a\, \gamma_a}{g}\, t\, v_a \text{ (kg·m·s)}$$

de donde, el esfuerzo necesario

$$F_a = \frac{Q_a\, \gamma_a}{g}\, v_a \quad \text{(kg)} \qquad \text{[1.10.60 c]}$$

y la potencia a aplicar, transformada así en cinética, en W,

$$p_{ac} = 9{,}81\ F_a\, v_a = 9{,}81\, \frac{Q_a\, \gamma_a}{g}\, v_a^2 = Q_a\, \gamma_a\, v_a^2 \text{ (W)} \qquad \text{[1.10.60 d]}$$

o también, introduciendo la expresión de Q_a, [b],

$$p_{ac} = \left(\frac{p_a}{\gamma_a\, c_a\, \Delta\theta_a}\right) \gamma_a\, v_a^2 = \frac{p_a\, v_a^2}{c_a\, \Delta\theta_a} \text{ (W)} \qquad \text{[1.10.60 e]}$$

La velocidad media de la masa de aire a la salida del ventilador v_a (m/s) depende de la presión creada por el mismo f_a (kg/m²) y ésta, a su vez, de la velocidad periférica del ventilador $v_v \left(\frac{m}{s}\right)$ y del trazado de los álabes.

Si designamos por S_a (m²) la sección útil de salida del ventilador normal a v_a

$$F_a = f_a\, S_a = f_a\, \frac{Q_a}{v_a} \text{ (kg)}$$

e igualando a [c]

$$f_a\, \frac{Q_a}{v_a} = \frac{Q_a\, \gamma_a}{g}\, v_a$$

de donde la presión del aire

$$f_a = \frac{\gamma_a}{g}\, v_a^2 \left(\frac{kg}{m^2}\right) \qquad \text{[1.10.60 f]}$$

(la misma cifra se obtiene en mm de columna de agua); a esta presión media de salida del aire, f_a, le corresponde una presión periférica del ventilador dada idénticamente por la expresión análoga

$$\boxed{f_v = \frac{\gamma_a}{g}\, v_v^2\, \frac{kg}{m^2}} \qquad \text{[1.10.60 g]}$$

y la relación entre f_a y f_v depende del trazado del ventilador.

Poniendo

$$\boxed{\frac{f_a}{f_v} = \frac{v_a^2}{v_v^2} = \eta_f} \qquad \text{[1.10.60 h]}$$

la ecuación [d] de la potencia cinética del caudal de aire se transforma en

$$p_{ac} = \eta_f\, Q_a\, \gamma_a\, v_v^2 \quad \text{(W)}$$

o la [e] en

$$p_{ac} = \frac{\eta_f}{c_a\, \Delta\theta_a}\, (p_a\, v_v^2)$$

Para llegar a la potencia absorbida por la ventilación deberemos considerar aún el rendimiento energético del ventilador η_v escribiendo en definitiva

$$p_v = \frac{p_{ac}}{\eta_v} = \left(\frac{\eta_f}{\eta_v}\frac{1}{c_a\,\Delta\theta_a}\right) p_a\, v_v^2 = \nu_v\, p_a\, v_v^2 \text{ (W)}$$

tal como aparece en [a].

El cálculo deberá asegurar que circula en efecto el caudal de aire previsto para lo cual se dispone de las ecuaciones de presión [f] y [h],

$$\boxed{f_a = \eta_f \frac{\gamma_a}{g} v_v^2 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right) \text{ (mm de columna de agua)}} \qquad [1.10.60\ \text{i}]$$

y de caudal [h]

$$\boxed{Q_a = v_a\, S_a = \sqrt{\eta_f}\, v_v\, S_a} \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right) \qquad [1.10.60\ \text{j}]$$

para S_a puede tomarse

$$\boxed{S_a = 0{,}8\ (\pi\ D_v\ l_v)\ (\text{m}^2)} \quad \text{en los ventiladores centrífugos} \qquad [1.10.60\ \text{k}]$$

$$\boxed{S_a = 0{,}67 \left(\frac{\pi\ D_v^2}{4}\right)\ (\text{m}^2)} \quad \text{en los axiales} \qquad [1.10.60\ \text{l}]$$

D_v = diámetro exterior del ventilador en m
l_v = longitud axial del mismo, también en m
De los factores que intervienen en la expresión de

$$\nu_v = \frac{\eta_f}{\eta_v}\frac{1}{c_a\,\Delta\theta_a}$$

conocemos de antemano c_a, el calor específico del aire.

A presión constante de 1 atmósfera, entre cero y 100 °C, es de 0,242 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg. °C}}$ (HÜTTE), o sea, $0{,}242 \cdot \frac{\text{kcal}}{\text{kg. °C}} \times 4{,}18\ \frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \approx 1\ \frac{\text{kJ}}{\text{kg. °C}}$

$$c_a = 1000\ \frac{\text{J}}{\text{kg. °C}} \qquad [1.10.60\ \text{m}]$$

Admitiremos un calentamiento medio del aire en la máquina de $\Delta\theta = 20$ °C.

Cuanto a los rendimientos manométricos η_f y en energía η_v son muy variables e inseguros. En primera aproximación, cabe tomar para los ventiladores centrífugos $\eta_f = \frac{1}{3{,}5}$ y $\eta_v = \frac{1}{3{,}5}$ lo cual conduce a la cifra

$$\nu_v = \frac{1/3{,}5}{1/3{,}5}\frac{1}{1000 \cdot 20} = \frac{1}{20.000}$$

citada anteriormente.

Detallando un poco más estas características pueden adoptarse las siguientes cifras.

Ventiladores centrífugos radiales:

$$\eta_f = \frac{1}{3{,}5} \qquad (v = \sqrt{\eta_f}\, v_v \approx 0{,}53\ v_v)$$

$$\eta_v = \frac{1}{3{,}3}$$

Ventiladores axiales con inclinación de, aproximadamente, 25°.

6 polos: $\eta_f = \frac{1}{12{,}5}$ $\qquad (v_a \approx 0{,}28\ v_v)$

$$\eta_v = \frac{1}{4}$$

4 polos: $\eta_f = \frac{1}{17}$ a $\frac{1}{22{,}5}$ $\qquad (v_a \approx 0{,}24 \ldots 0{,}21\ v_v)$

$$\eta_v = \frac{1}{4}$$

El valor de γ_a a la temperatura prevista θ °C se deducirá partiendo de la fórmula

$$\boxed{\gamma_a = 1{,}292\ \frac{273}{273 + \theta}} \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \qquad [1.10.60\ \text{n}]$$

1.292 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ es el paso específico del aire a cero °C y presión atmosférica de 760 mm y $273 + \theta$ la temperatura absoluta a θ °C.

No es preciso corregir por la presión, con altitudes normales.

1.10.61. **Ejemplos**

Ejemplo 1.º

Una dinamo de $P = 333$ kW y $N = 214$ r/m tiene unas pérdidas totales, a eliminar por el aire, $p_a = 28500$ W y va provista de un ventilador de diámetro exterior $D_v = 1\,600$ mm y longitud $l_v = 65$ mm.

Calcular la potencia absorbida por el ventilador y comprobar si el caudal y la presión de aire son suficientes.

Utilizando la fórmula simplificada [1.10.60 a],

$$p_v = \nu_v\, p_a\, v_v^2 \text{ (W)}$$

tomemos, como antes se ha indicado, para el ventilador centrífugo

$$\nu_v = \frac{1}{20000}$$

Con

$$p_a = 28\,500 \text{ W y } v_v = \frac{\pi D_v N}{60} = \frac{\pi \cdot 1{,}6 \cdot 214}{60} = 18 \text{ m/s},$$

resulta

$$p_v = \frac{28500 \cdot 18^2}{20000} = 460 \text{ W}$$

supuesto que el caudal de aire no se aumente en exceso voluntariamente.

La presión del aire será, [1.10.60 i],

$$f_a = \eta_f \frac{\gamma_a}{g} v_v^2 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$$

Suponiendo una temperatura ambiente de 40 ºC y 10 ºC de calentamiento del aire en su recorrido, muy corto, por el interior de la máquina, o sea $\theta = 50$ ºC de temperatura de salida del ventilador, tendremos, [1.10.60 n],

$$\gamma_a = 1{,}292 \frac{273 + 50}{273} = 1{,}09 \frac{\text{m}^3}{\text{kg}};$$

$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, y poniendo para un ventilador centrífugo

$\eta_f = \frac{1}{3{,}5}$ (véase párr. 1.10.60),

$$f_a = \frac{1}{3{,}5} \frac{1{,}09}{9{,}81} 18^2 = 11 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = 11 \text{ mm de col. de agua}$$

Es prácticamente imposible calcular las pérdidas manométricas en el interior de las máquinas debiendo aceptarse que la presión es suficiente; se procura hacer el ventilador del máximo diámetro posible.

El caudal de aire lanzado por éste viene dado según [1.10.60 j], por

$$Q_a = \sqrt{\eta_f}\, v_v\, S_a$$

y con [1.10.60 ú],

$$S_a = 0{,}8\, \pi D_v l_v = 0{,}8\, \pi \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}065 = 0{,}261 \text{ m}^2,$$

$$Q_a = \sqrt{\frac{1}{3{,}5}}\, 18 \cdot 0{,}261 = 2{,}51 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

La ecuación [1.10.60 b] nos permite deducir el calentamiento del aire sabiendo, además, que $c_a = 1000 \frac{\text{J}}{\text{kg ºC}}$ [1.10.60 m],

$$\Delta\theta = \frac{p_a}{\gamma_a\, c_a\, Q_a} = \frac{28500}{1{,}09 \cdot 1000 \cdot 2{,}51} = 10{,}4 \text{ ºC}$$

lo que indica que el caudal y las pérdidas consiguientes por ventilación p_v son mucho mayores de las que corresponderían a una elevación de temperatura normal de 20 ºC para el aire; en razón inversa, es decir, aproximadamente el doble de los calculados o sea $p_v \approx 2 \times 460 = 920$ W

La velocidad de salida del aire, [1.10.60 h], viene a ser

$$v_a = \sqrt{\eta_f}\, v_v = \sqrt{\frac{1}{3{,}5}}\, 18 = 0{,}535 . 18 = 9{,}6 \text{ m/s}$$

Ejemplo 2.º

Calcular las pérdidas por ventilación y el calentamiento medio del aire para el motor de 15 CV, 2930 r/m, rendimiento $\eta = 0{,}87$, $\cos\varphi = 0{,}91$ cuyas pérdidas mecánicas estudiadas en el ejemplo 1.10.56 ascendían a 54,5 W. Se trata de un motor cerrado con carcasa de aletas, ventilación exterior. Las dimensiones del ventilador son 240 mm de diámetro por 27 mm de longitud axial.

Designando por P_u la potencia útil, por P_a la potencia absorbida y por p la potencia total perdida a P.C.,

$$\eta = \frac{P_u}{P_a} = \frac{P_u + p}{P_u} = \frac{1}{1 + \frac{p}{P_u}}$$

o

$$\frac{p}{P_u} = \frac{1}{\eta} - 1$$

de donde las pérdidas totales

$$p = \left(\frac{1}{\eta} - 1\right) P_u = \left(\frac{1}{0{,}87} - 1\right) 15 \cdot 0{,}736 = 1660 \text{ W}$$

La velocidad tangencial del ventilador, es

$$v_v = \frac{\pi\, D_v\, N}{60} = \frac{\pi \cdot 0{,}24 \cdot 2930}{60} = 36{,}9 \text{ m/s}$$

la presión del ventilador, [1.10.60 g],

$$f_v = \frac{\gamma_a}{g} v_v^2 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$$

con el aire a 40 °C máxima temperatura ambiente, que en este caso es la misma de salida del ventilador, puesto que la aspiración se realiza directamente de la atmósfera; y el peso específico γ_a, [1.10.60 m],

$$\gamma_a = 1{,}292\ \frac{273}{273 + 40} = 1{,}13\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3},$$

es

$$f_v = \frac{1{,}13}{9{,}81}\ 36{,}9^2 = 15{,}7\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

La velocidad del aire a la salida del ventilador, [1.10.60 h],

$$v_a = \sqrt{\eta_l}\ v_v$$

y admitiendo $\eta_l = \frac{1}{3{,}5}$, (párr. 1.10.60),

$$v_a = \sqrt{\frac{1}{3{,}5}}\ 36{,}9 = 19{,}7\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La sección útil de salida, [1.10.60 k],

$$S_a = 0{,}8\ \pi D_v l_v = 0{,}8\ \pi \cdot 0{,}24 \cdot 0{,}027 = 0{,}0163\ \text{m}^2$$

y el caudal de aire, [1.10.60 j],

$$Q_a = v_a\ S_a = 19{,}7 \cdot 0{,}0163 = 0{,}321\ \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

La potencia que podría absorber este caudal de aire por cada grado de elevación de temperatura se deduce partiendo de la ecuación 1.10.69 b

$$\dot{p}_a = \gamma_a\ c_a\ Q_a\ \Delta\theta_a\ \text{(W)}$$

teniendo en cuenta que el valor de γ_a habrá descendido algo por efecto del calentamiento podemos poner si admitimos de promedio $\Delta\theta_a = 10$ °C o $\theta_a = 40 + 10 = 50$ °C, [1.10.60 n],

$$\gamma_a = 1{,}292\ \frac{273}{273 + 50} = 1{,}09\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

y para $\Delta\theta_a = 1$ °C y $c_a = 1000\ \frac{\text{J}}{\text{kg °C}}$

$$\dot{p}_a = 1{,}09 \cdot 1000 \cdot 0{,}321 \cdot 1 = 350\ \frac{\text{W}}{\text{°C}}$$

Como las pérdidas totales a disipar son 1 660 W, si todas ellas fuesen absorbidas por el aire el calentamiento promedio del mismo ascendería a $\frac{1660}{350} = 4{,}7$ °C

En realidad una cierta fracción de aquellas pérdidas, aunque no muy importante se disipan directamente, radiadas por la carcasa.

1.10.62. Refrigeración por hidrógeno

En los turboalternadores, que son máquinas de gran potencia y velocidades de giro muy elevadas, las pérdidas ocasionadas por el rozamiento con el aire llegan a alcanzar una magnitud considerable y constituyen a veces el renglón más importante de las pérdidas. Para reducirlas se acude entonces a la refrigeración por hidrógeno, que ofrece las ventajas de una menor densidad, mayor conductividad térmica y calor específico más elevado. Además, evita la oxidación de los aislantes, mejora las condiciones respecto a los efluvios y proporciona una marcha mucho más silenciosa.

Por la tabla 1.11.01 a podemos ver que a igualdad de volumen, el hidrógeno pesa

$$\frac{0{,}09}{1{,}292} = \frac{1}{14{,}4}$$

casi 15 veces menos que el aire; su conductividad térmica es

$$\frac{0{,}00145}{0{,}00022} = 6{,}6$$

veces mayor, y el calor específico por m³

$$\frac{165000\ \frac{\text{J}}{\text{kg °C}} \times 0{,}09\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}{1000\ \frac{\text{J}}{\text{kg °C}} \times 1{,}292\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} = 1{,}15$$

15 % más elevado. El hidrógeno se mantiene dentro de la máquina, mediante juntas de estanqueidad, a una presión ligeramente superior a la atmosférica a fin de evitar la penetración de aire que podría provocar una mezcla explosiva (eventualidad que hay que prever, de todos modos, llegando entonces la presión hasta unos 5 kg/cm²; esta posibilidad de explosión se halla latente en cuanto la concentración de aire accede de un 5 %). La pequeña sobrepresión del hidrógeno en servicio y algunas impurezas que pueda contener hacen que la energía perdida por ventilación no se reduzca en la proporción teórica de 1 a 14,5 como correspondería a su densidad normal con respecto a la del aire pero sí se puede contar en cualquier caso con una reducción a la décima parte lo cual supone ya para un condensador síncrono de 50 MVA 600 r/m, por ejemplo, rebajar esta pérdida desde 200 kW a 20.

Las mejores condiciones de refrigeración que proporciona el hidrógeno permiten aumentar la potencia de los turboalternadores, a igualdad de peso, en un 20 y hasta un 33 %.

Las dificultades de estanqueidad y las complicaciones que lleva consigo la refrigeración por este sistema limitan su empleo al caso de grandes máquinas.

1.11 EL CIRCUITO TÉRMICO

1.11.01. Coeficiente de dilatación térmica β

Ya hemos aludido a ello al tratar de la variación de resistencia con la temperatura. En la zona de temperaturas donde suelen trabajar las máquinas eléctricas pueden tomarse unos coeficientes de dilatación media β según la tabla 1.11.01 a.

Un aumento de temperatura de 100 °C provoca el alargamiento de 1,7 mm por cada metro de longitud de cobre y 2.4 mm por cada metro de longitud de aluminio. Los 80 °C de incremento admisibles con aislamientos clase B originan, pues, un alargamiento de $\frac{80}{100} \times 1{,}7 = 1{,}35$ mm/m, o sea, aproximadamente de 4 mm en las barras de ranura de un turbo alternador de 3 m de longitud. Las diferencias de dilatación entre los distintos elementos estructurales es un punto a tener siempre en cuenta al proyectar las máquinas eléctricas (estrella de aluminio sobre eje de acero, asientos de cojinetes, escudos de aluminio o de zincal con carcasas de fundición, o directamente sobre las chapas, etc.).

El incremento de longitud Δl de una barra por efecto de un incremento de temperatura $\Delta\theta$ viene dado por

$$\Delta l = \beta \cdot l \cdot \Delta\theta \quad \text{(m)} \qquad [1.11.01\ a]$$

$$\left(l \text{ en metros, } \Delta\theta \text{ en } ^\circ\text{C y } \beta \text{ en } \frac{\text{m}}{\text{m } ^\circ\text{C}}\right)$$

Siendo β una magnitud de orden muy pequeño, puede escribirse también
para la dilatación superficial $\Delta S = (2\beta)\ S\,\Delta\theta$
» » » cúbica $\Delta v = (3\beta)\ v\,\Delta\theta$

En la tabla 1.11.01 a se dan algunos valores de los coeficientes de dilatación que interesan para la construcción de máquinas eléctricas.

Tabla 1.11.01 a. — Características térmicas de algunos materiales.

Material	γ $\left(\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}\right)$	$(\beta \times 10^6)$ $\frac{\text{m}}{\text{m } ^\circ\text{C}}$	c $\left(\frac{\text{J}}{\text{kg. } ^\circ\text{C}}\right)$	λ $\left(\frac{\text{W cm}}{\text{cm}^2\ ^\circ\text{C}}\right)$
Cobre electrolítico	8,9	17	400	3,80
Aluminio para hilos	2,7	24	950	2,20
Aluminio fundido para rotores	2,6	—	870	—
Hierro	7,8	12	470	0,45
Latón 1/3 conductividad (21 % de Zn)	8,6	18	380	1,35
Bronces	8,7	17	370	0,60
Bronce fosforoso	8,4	17	380	—
Aceite clorado de transformador	1,56	0,000855 cúbico	1080	0,00100
Aceite de transformador	0,9	0,000700 $\frac{\text{m}^3}{\text{m}^3\ ^\circ\text{C}}$	1880	0,00150
» lubricante	0,9	0,0008	1700	0,00115
Agua	1,0	0,000434	4180	0,00600
Aire a 0° y 760 torr	1,29 $\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$	cúbico	1000	0,00022
Aire a 60° y 760 torr	1,06 (»)	$\frac{1}{273} = 0{,}00385$	1000	0,00028
Hidrógeno a 0° y 760 torr	0,09 (»)		16500	0,00145
Anhídrido carbónico a 0° y 760 torr	1,98 (»)	$\frac{\text{m}^3}{\text{m}^3\ ^\circ\text{C}}$	770	0,00014
Oxígeno a 0° y 760 torr	1,43 (»)		900	0,00235
Algodón sin impregnar	0,7		1500	0,0006
» impregnado con goma laca	1,2			0,0025
Papel sin impregnar	0,9		1700	0,00115
» en aceite	1,4			0,00450
» impregnado con goma laca	1,15			0,00170
Tela barnizada (Excelsior)	1,25			0,00140
Batista impregnada con goma laca	1,2			0,00240
Cinta negra diagonal	1,2			0,00240
Amianto	2,2		800	0,00200
Micafolio al compound	1,5	13		0,00200
Cinta de mica	2,2			0,00260
Prespán al aire	1,2			0,00170
» en aceite	1,45			0,00700
Leatheroid	1,2			0,00180
Papel bakelizado	1,3	20		0,00250
Tela bakelizada	1,3	20		0,00300
Carbón (grafito)	2,2		800	0,050
Madera $=/\perp$ (haya), seca	0,8	(2 =) (3 $\perp$)	2400	0,00160
Madera en aceite mineral	0,88		2000	0,00350/201
Porcelana	2,4	4	880	0,01500
Vidrio	2,4	9	800	0,00800
Betún	1,2		2000	0,00700
Mica	2,2		800	0,00300

Tabla 1.11.01 a. — (continuación)

Material	γ $\left(\frac{kg}{dm^3}\right)$	$(\beta \times 10^6)$ $\frac{m}{m\ ^\circ C}$	c $\left(\frac{J}{kg.\ ^\circ C}\right)$	λ $\left(\frac{W\ cm}{cm^2\ ^\circ C}\right)$
Chapa magnética tipo dinamo	7,75		460	0,45
» » » transformador	7,6			0,30
» » » grano orientado	7,65			0,30
Chapa magnética 0,5 empapelada				0,0075
» » 0,5 esmaltada				0,0125
» » 0,35 empapelada				0,0050
» » 0,35 esmaltada				0,0080

1.11.02. Ejemplo

Para prever un encaje suficiente entre el eje y el cubo del inducido de una máquina, se prevé que la interferencia entre ambos diámetros d, antes del montaje, debe ser del 1 ‰. Se efectúa el acople por dilatación térmica. ¿Cuál ha de ser la diferencia mínima entre las temperaturas de ambas piezas y cuál será el esfuerzo de compresión entre las superficies después del montaje? Determinar también el grueso radial mínimo del cubo.

De [1.11.01 a],

$$\frac{\Delta l}{l} = \beta\, \Delta\, \theta = \frac{1}{1000}$$

o sea

$$\Delta\theta = \frac{1}{1000\ \beta}$$

para el hierro $\beta \approx 12 \cdot 10^{-6}\ \frac{m}{m\ ^\circ C}$ (tabla 1.11,01 a); luego,

$$\Delta\theta = \frac{1}{1000 \cdot 12 \cdot 10^{-6}} = 83\ (^\circ C)$$

hay que prever un cierto huelgo durante el calado, creando una diferencia de temperatura aproximadamente doble: 150 °C.

Tomando para el módulo de elasticidad del acero $E = 2 \cdot 10^6\ \frac{kg}{cm^2}$ y supuesta repartida la deformación por partes iguales entre eje y cubo como correspondería a piezas sólidas del mismo material sin deformaciones adicionales por flexión $\left(\epsilon = \frac{\Delta d}{d} = \frac{1}{2}\ \frac{\Delta l}{l} = \frac{0,5}{1000}\right)$, resulta la presión de apriete entre superficies de encaje, σ,

$$\sigma = E\,\epsilon = 2 \cdot 10^6\ \frac{0,5}{1000} = 1000\ \left(\frac{kg}{cm^2}\right)$$

absolutamente normal.

El coeficiente de interferencia del $\frac{1}{1000}$ es, pues, una cifra corriente alrededor de la cual giran las diversas recomendaciones de ajuste para el calado de piezas fijas entre sí.

Si $\sigma = 1\,000$ kg/cm² de presión interna, la fuerza diametral asciende a $F = \sigma\, d = 1\,000\, d$ (kg/cm de longitud axial, con el diámetro d en cm). Esta fuerza será soportada entre los lados de la sección longitudinal del cubo. Admitiendo también 1000 kg/cm² de coeficiente de tracción

$$F = (2\ e)\ 1000 = 1000\ d\ \text{(kg por cm de long. axial)}$$

de donde resulta un espesor radial del cubo, $e = \frac{d}{2}$; es decir, que el espesor en cuestión debe ser igual, como mínimo, al radio [1].

1.11.03. Calor específico

Es una medida de la capacidad de cualquier sustancia para almacenar energía térmica en su masa a expensas de una elevación de temperatura. Se expresa en $\frac{k\ cal}{kg\ ^\circ C}$ y, dentro de las aplicaciones electrotécnicas, en $\frac{W \cdot s}{kg\ ^\circ C}$ o $\frac{J}{kg\ ^\circ C}$.

(1 k cal = 4180 J; 1 kWh = 3600 kJ = 860 k cal)

En unidades eléctricas, el calor específico c de un material será el número de joules (J) o vatios · segundos (Ws) que se necesita acumular en 1 kg del material para elevar su temperatura θ en 1 °C

$$c = \frac{J_\theta}{G \cdot \Delta\theta} \quad \left(\frac{J}{kg\ ^\circ C}\right) \qquad [1.11.03\ a]$$

J_θ = energía térmica acumulada en J
G = peso del cuerpo en kg
$\Delta\theta$ = aumento de temperatura sufrido por el mismo, en °C.

La tabla 1.11.01 a muestra también los valores de c para los materiales que más nos interesan.

1.11.04. Ejemplo

Calcular el caudal de aire necesario para refrigerar la caseta de un transformador de 500 kVA 30 kV sin que el aumento de temperatura ambiente exceda de 10 °C. Las pérdidas del transformador son: en el hierro, 1620 W y en el cobre a P.C., 7810 W.

Las pérdidas totales a disipar ascienden, pues, a

$$p_t = 1620 + 7810 = 9430 \quad W$$

(1) Para el estudio más a fondo de estos problemas véase «Cálculo mecánico de Maquinas Electricas», del mismo autor.

El calor específico del aire a presión constante de 1 atmósfera, entre cero y 100 °C, es de 0,242 $\frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$ (HÜTTE), o sea

$$0{,}242 \cdot 4{,}18 = 1 \ \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot {}^\circ\text{C}}$$

Para absorber los 9,43 kW con 10 °C de aumento de temperatura se necesitarán, así,

$$\left(\frac{9{,}43}{10}\right) : 1 = 0{,}943 \text{ kg de aire por segundo}$$

Es más corriente expresar el caudal en m³/s. El metro cúbico de aire a cero °C pesa 1,292 kg (HÜTTE). Se admite que la temperatura ambiente pueda llegar a 40 °C (tabla 1.01.16 a) y en estas condiciones la refrigeración ha de ser todavía suficiente; debemos contar con la disminución consiguiente de la densidad del aire. Su peso específico a 40 °C desciende a

$$1{,}292 \ \frac{273 \ {}^\circ\text{C}}{273 + 40 \ {}^\circ\text{C}} = 1{,}13 \text{ kg/m}^3$$

Los 0,943 kg de aire por segundo equivalen, pues, a

$$\frac{0{,}943}{1{,}13} = 0{,}835 \text{ m}^3\text{/s}$$

o sea

$$0{,}835 \cdot 60 = 50 \text{ m}^3\text{/minuto}$$

a la temperatura de 40 °C. Tal es el caudal que hay que prever para la refrigeración del transformador. Notemos que viene a ser

$$\frac{50 \text{ m}^3\text{/min.}}{9{,}43 \text{ kW}} = 5{,}3 \ \frac{\text{m}^3\text{/min}}{\text{kW}}$$

Se suele calcular, en efecto, con un caudal de aire necesario 4 a 5 m³/minuto por cada kilovatio de pérdidas a disipar.

Si el aire caliente de las máquinas se descarga en la sala, como sucede en las pequeñas centrales, hay que contar con la renovación del mismo a razón, pues, de unos $5 \times 60 = 300$ m³/hora y por kW de pérdidas. Suponiendo una instalación de 1000 kW con 90 % de rendimiento global, los 100 kW pérdidas requerirán $300 \times 100 = 30000$ m³/h. Si la sala tiene $(10 \times 7) \times 7 \approx 500$ m³, se precisa una renovación total del aire cada minuto, lo cual es considerable. Se ve, pues, la conveniencia de poder disponer la descarga parcial del aire caliente hacia el exterior.

1.11.05. Capacidad térmica de un conductor

Es importante calcular el incremento de temperatura que sufrirá un conductor, por efecto JOULE, durante cortos períodos de carga o sobrecarga que no den tiempo a una disipación apreciable del calor desarrollado, empleándose prácticamente toda esta energía en elevar la temperatura del conductor (arranque de motores, cortos circuitos).

Para hallar el resultado, basta igualar la energía térmica producida por efecto JOULE a la energía acumulada en el conductor. Con una corriente constante I en amperios, la resistencia R en ohmios, el peso G del conductor en kilogramos, el calor específico c supuesto invariable, en $\frac{\text{J}}{\text{kg} \ {}^\circ\text{C}}$, la temperatura θ en °C y el tiempo t en segundos, la expresión diferencial de esta igualdad es

$$R \ I^2 \ dt = c \ G \ d\theta \qquad \text{[1.11.05 a]}$$

Si la resistencia permaneciera también constante durante el calentamiento, la ecuación anterior se podría escribir directamente en términos finitos.

$$R \ I^2 \ \Delta t = c \ G \ \Delta\theta \qquad \text{[1.11.05 b]}$$

y el ritmo de calentamiento sería en grados centígrados por segundo

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{R \ I^2}{c \ G} \ \left(\frac{{}^\circ\text{C}}{\text{s}}\right) \qquad \text{[1.11.05 c]}$$

Designando por ϱ la resistividad del material en $\frac{\Omega \ \text{mm}^2}{\text{m}}$ y por χ su conductividad en $\frac{\text{S} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$ supuestas, de momento, invariables; por Δ la densidad de corriente en $\frac{\text{A}}{\text{mm}^2}$ a través de la sección s mm² del conductor cuya longitud en metros representaremos por l; y el peso específico, en $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ por γ, la ecuación [c] se transforma en

$$\left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right] = \frac{\varrho}{s} \frac{l}{c \frac{l \cdot s}{1000} \gamma} \frac{I^2}{} = \left[\frac{1000 \ \varrho}{c \ \gamma} \Delta^2\right] = \left[\frac{1000}{c \ \gamma \ \chi} \Delta^2\right] \ \left(\frac{{}^\circ\text{C}}{\text{s}}\right)$$

Para el cobre, $c = 400 \ \frac{\text{J}}{\text{kg. } {}^\circ\text{C}}$; $\gamma = 8{,}9 \ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$; $\left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta^2}{3{,}56 \ \chi}\right] \ \left(\frac{{}^\circ\text{C}}{\text{s}}\right)$

Para el aluminio, $c = 950$ » $\gamma = 2{,}7$ » ; $\left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta^2}{2{,}56 \ \chi}\right] \ \left(\frac{{}^\circ\text{C}}{\text{s}}\right)$ [1.11.05 d]

Otros valores, en la tabla 1.11.01 a.

Esta fórmula puede emplearse, no obstante la inconstancia de ϱ, introduciendo para la resistividad, o para la conductividad, un valor intermedio entre el inicial, que correspondería a la temperatura de partida θ_1 y el final, que alcanzaría al cabo del intervalo Δt, con la temperatura última θ_2. Es un método de aproximaciones sucesivas, a pesar de todo bastante rápido. Inmediatamente veremos un ejemplo.

El cálculo directo del aumento de temperatura final $\Delta\theta$ requiere el uso de una ecuación logarítmica, a saber

$$\left[\log_{10} \frac{T_2}{T_1} = \left| \log_{10} \frac{T_0 + \theta_2}{T_0 + \theta_1} = K \ \Delta t\right.\right] \qquad \text{[1.11.05 e]}$$

donde T_0 es la temperatura «eléctrica» absoluta del conductor correspondiente a los cero °C ($T_0 = 235°$ para el *Cu* y $T_0 = 230°$ para el *Al*. Ver párr. 1.01.12).

$$\boxed{K = \frac{434}{c\,\gamma\,\chi_{20}\,(T_0 + 20)}\,\Delta^2} \qquad [1.11.05\ f]$$

en las mismas unidades indicadas anteriormente, es decir: χ_{20} = conductividad del material a 20 °C ($56\ \frac{S \cdot m}{mm^2}$ para el cobre comercial y $33\ \frac{S \cdot m}{mm^2}$ para el aluminio inyectado, párr. 1.01.06); c = calor específico en $\frac{J}{kg\,°C}$ (400 para el *Cu* y 950 para el *Al*, tabla 1.11.01 a); γ = peso específico en $\frac{g}{cm^3}$ (8,9 para el *Cu* y 2,7 para el *Al*).

Así, para el *Cu*, $K = \frac{434}{400 \cdot 8{,}9 \cdot 255}\,\frac{\Delta^2}{\chi_{20}} = \frac{\Delta^2}{2{,}1\,\chi_{20}}\,10^{-3}$,

con $\chi = 56$ a 20 °C, $\boxed{K = \frac{\Delta^2}{116}\,10^{-3}}$ [1.11.05 g]

y para el *Al*,

$$K = \frac{434}{950 \cdot 2{,}7 \cdot 250}\,\frac{\Delta^2}{\chi_{20}}$$

lo cual da con $\chi_{20} = 33\ \frac{S \cdot m}{mm^2}$, $\boxed{K = \frac{\Delta^2}{53{,}2}\,10^{-3}}$

y con $\chi_{20} = 36\ \frac{S \cdot m}{mm^2}$, $\boxed{K = \frac{\Delta^2}{48{,}7}\,10^{-3}}$ [1.11.05 h]

En efecto: escribiendo la ecuación [d] en términos diferenciales tendremos el ritmo instantáneo de incremento de la temperatura, variable con ϱ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1000\,\varrho}{c \cdot \gamma}\,\Delta^2 \qquad \left(\frac{°C}{s}\right) \qquad [1.11.05\ i]$$

Pero a cualquier temperatura θ y con respecto a la de 20 °C, [1.01.12 b], incluido ya el efecto de dilatación térmica,

$$\frac{\varrho}{\varrho_{20}} = \frac{T_0 + \theta}{T_0 + 20}$$

luego,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1000}{c \cdot \gamma}\,\varrho_{20}\,\frac{T_0 + \theta}{T_0 + 20}\,\Delta^2 = k\ (T_0 + \theta)$$

siendo

$$k = \frac{1000}{c\,\gamma}\,\frac{\varrho_{20}}{T_0 + 20}\,\Delta^2$$

La ecuación diferencial [i] toma así la forma conocida

$$\frac{d\theta}{dt} - k\ \theta = k\ T_0$$

cuya solución es

$$\theta = -\,T_0 + \frac{\alpha_0}{k}\,e^{kt} \quad \text{o} \quad k\theta = \alpha_0\,e^{kt} - k\ T_0 \qquad [1.11.05\ j]$$

La constante de integración α_0 se desprende de las condiciones iniciales. Para $t = 0$, $\theta = \theta_1$

$$k\ \theta_1 = \alpha_0 - k\ T_0; \quad \alpha_0 = k\ (T_0 + \theta_1) = k\ T_1$$

designando por T_1 la temperatura «eléctrica» absoluta correspondiente a la inicial centígrada θ_1.

Sustituyendo en [j],

$$k\ \theta = k\ T_1\,e^{kt} - k\ T_0 \quad , \quad T_1\,e^{kt} = T_0 + \theta = T$$

siendo a su vez $T = T_0 + \theta$ la temperatura absoluta (eléctrica) del conductor al cabo del tiempo t. La temperatura alcanzada T_2 después del intervalo Δt de conexión será, pues, tal que

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{k\Delta t}$$

o en forma logarítmica,

$$\log_{10}\frac{T_2}{T_1} = k \cdot \Delta t \log_{10} e = 0{,}434\ k \cdot \Delta t = \left(\frac{434}{c \cdot \gamma}\,\frac{\varrho_{20}}{T + 20}\,\Delta^2\right)\Delta t = K\ \Delta t.$$

tal como habíamos anunciado: [e] y [f].

Adoptando la fórmula indirecta [d]

$$\frac{\Delta\,\theta}{\Delta\,t} = \frac{1000}{c\,\gamma\,\chi}\,\Delta^2 \ (°C/s)$$

tendremos:

para el *Cu* con $c = 400\ \frac{J}{kg\ °C}$ y $\gamma = 8{,}9\ \frac{g}{cm^3}$

y si en un orden medio de valores introducimos la conductividad del cobre 56 a 100 °C, o sea $\chi_{100} = 42{,}6\ \frac{S \cdot m^2}{mm^2}$ (tabla 1.01.16 b)

$$\boxed{\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta^2}{150}} \qquad \left(\frac{°C}{s}\right) \qquad [1.11.05\ k]$$

lo que nos da una densidad de 12,3 A/mm² (12 A/mm² en cifras redondas) para que el incremento de temperatura del conductor se produzca a razón de 1 °C/s.

Análogamente para el aluminio, con $c = 950\ \frac{J}{kg\ °C}$ y $\gamma = 2{,}7\ \frac{g}{cm^3}$, si tomamos ahora como promedio para rotores la resistividad a 100 °C que valdrá (párr. 1.01.06),

$$\frac{1}{\chi_{100}} = \frac{1}{33}\,\frac{230 + 100}{230 + 20} = \frac{1}{25}$$

resulta

$$\boxed{\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta^2}{64}} \qquad [1.11.05\ l]$$

La densidad de corriente en el aluminio capaz de elevar la temperatura a razón de 1 °C/s viene a ser, pues, de 8 A/mm².

A igualdad de densidad de corriente la elevación de temperatura del aluminio es mucho más rápida que la del cobre, pero a igualdad de pérdidas, resulta en cambio algo más lenta como veremos en el problema siguiente.

1.11.06. Ejemplos

Ejemplo 1.º Un motor de inducción con rotor en cortocircuito previsto para frecuentes arranques, durante los cuales la ventilación no llega a sentirse eficazmente, alcanza en las varillas rotóricas de cobre una temperatura de 105 °C sobre el ambiente. Para disminuir el calentamiento en estas condiciones, se decide cambiar el tipo de rotor por otro con jaula, de aluminio sin alterar prácticamente el rendimiento ni el deslizamiento a P.C. así como tampoco el par o la corriente de arranque. Calcular en cuanto puede reducirse el calentamiento a la puesta en marcha.

El mantener invariable las características citadas equivale a conservar sin alteración la resistencia de la jaula rotórica al pasar de cobre a aluminio. Como la conductividad de este último viene a ser de $\frac{33}{56} = 0{,}59$ la del cobre normal, para mantener la misma resistencia habrá que aumentar las secciones de la jaula de aluminio en la relación inversa $\frac{56}{33}$ o sea un 70 %, lo que equivale a reducir la densidad de corriente admisible a la cifra indicada del 59 %. El ritmo de calentamiento que para el cobre era aproximadamente

$$\frac{\Delta^2}{152} \qquad \left(\frac{°C}{s}\right)$$

pasará a ser en el aluminio

$$\frac{(0{,}59\ \Delta)^2}{64} = \frac{\Delta^2}{184} \qquad \left(\frac{°C}{s}\right)$$

En las mismas condiciones de arranque (duración t idéntica), el calentamiento final del aluminio sólo será

$$\frac{152}{184} \approx 0{,}83$$

el del cobre; en este caso, 105.0,83 = 87 °C. En cifras redondas, un 15 % inferior.

Cuando se quiere hacer frente con motores de jaula a condiciones de arranque difíciles, sobre todo por la inercia de la máquina movida (período de puesta en marcha muy largo), se acude a soluciones de este género aún más enérgicas, empleando en el rotor, sobre todo para los anillos exteriores, en lugar de cobre o aluminio inyectado, latones o bronces de resistividad entre el doble y el cuádruple de la del cobre electrolítico lo que exije como contrapartida, si se han de conservar las restantes características, aumentar las secciones de barras y anillos en la misma proporción que la resistividad, con lo cual la masa conductora aumenta, y por tanto su capacidad térmica para almacenar la misma energía perdida, sufriendo en consecuencia un incremento de temperatura menor.

Ejemplo 2. Las Normas VDE estipulan que el primario de un transformador de intensidad debe ser de tal sección que, en caso de cortocircuito de la línea, la densidad de corriente llegue como máximo a 180 A/mm².

En tales condiciones, las mismas Normas consideran satisfecha la exigencia de que el primario en cuestión podrá soportar térmicamente la presencia del cortocircuito durante un segundo para dar tiempo al disparo de los disyuntores.

Calcular la temperatura alcanzada por el devanado en tales circunstancias despreciando toda disipación de energía, a) con el arrollamiento de cobre de la máxima conductividad y partiendo de la temperatura normal del ambiente; b) con cobre comercial y partiendo de la temperatura máxima de trabajo admisible para un aislamiento clase B.

a) Estos datos corresponden a un cobre de calidad patrón $\chi_{20} = 58\ \frac{S \cdot m}{mm^2}$ y temperatura inicial $\theta_1 = 20$ °C. Utilicemos, de momento el método de aproximaciones sucesivas [fórmula 1.11.05 d]:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta^2}{3{,}56\ \chi} \qquad \left(\frac{°C}{s}\right)$$

Supongamos en primera aproximación que la temperatura final llegase a 250°; la temperatura media durante el período de cortocircuito sería $\frac{20 + 250}{2} = 135$ °C y la conductividad del cobre patrón a esta temperatura media, χ_{135} tal que, [1.01.12 b],

$$\frac{\frac{1}{\chi_{135}}}{\frac{1}{\chi_{20}}} = \frac{235 + 135}{235 + 20}; \quad \chi_{135} = \chi_{20}\,\frac{255}{370} = 58 \cdot 0{,}69 = 40 \qquad \frac{S \cdot m}{mm^2}$$

de donde, [1.11.05 d],

$$\frac{\Delta\theta}{\theta t} = \frac{\Delta^2}{3{,}56 \cdot 40} = \frac{180^2}{142} = 228 \qquad \frac{°C}{s}$$

Por tanto, el incremento de temperatura pasado 1 segundo sería de 228 °C y la temperatura final $\theta_2 = 20 + 228 = 248$ °C, casi lo que habíamos admitido en principio. No necesitamos, pues, rectificar el valor supuesto de χ. El cobre alcanzará unos 250 °C al cabo de 1 segundo.

b) Las condiciones en el otro caso corresponden a un *Cu* de conductividad $\chi_{20} = 56 \frac{S \cdot m}{mm^2}$, a 20 °C, y a una temperatura inicial de 40 °C, ambiente, más 80 °C admisibles para el aislamiento tipo B (Ejemplo 1.01.16) o sea $\theta_1 = 40 + 80 = 120$ °C.

Admitiendo, de momento, que se llegase a los 390 °C, temperatura final, lo cual supone una media de

$$\frac{120 + 390}{2} = 255\ ^\circ C,$$

le corresponde una conductividad, media también, χ_{255}, [1.01.12 b]

$$\chi_{255} = \chi_{20} \frac{235 + 20}{235 + 255} = 56 \cdot 0{,}52 = 29{,}1 \quad \frac{S \cdot m}{mm^2}$$

y entonces, [1.11.05 d],

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta^2}{3{,}56 \cdot 29{,}1} = \frac{180^2}{103{,}5} = 313 \quad \frac{^\circ C}{s}$$

o sea $\Delta\theta = 313$ °C después de 1 segundo y $\theta_1 = 313 + 120 = 433$ °C.

Como habíamos admitido en principio sólo 390 °C deberemos corregir el valor de χ supuesto. Partiendo ahora de la hipótesis $\theta_2 = 435$ °C lo que da $\frac{120 + 435}{2} = 277{,}5$ de media y $\chi_{250} = 56 \frac{235 + 70}{235 + 277{,}5} = 27{,}9$, se obtiene $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{180^2}{3{,}56 \cdot 27{,}9} = 325$ °C y

$\theta_2 = 325 + 120 = 445$ °C.

Coincide bastante bien con los 435 °C supuesto y podemos dar ya por bueno este resultado para la temperatura final.

Según SKIRL, («Elektrische Messungen»), las prescripciones alemanas han sido establecidas con el propósito de que la temperatura, al cabo de 1 s no rebase los 200 °C. La densidad de corriente límite (180 A/mm²) parece entonces demasiado elevada aun en las condiciones óptimas (caso a).

Como complemento, calculemos los calentamientos por la fórmula directa, [1.11.05 e],

$$\log_{10} \frac{T_2}{T_1} = K \cdot \Delta t$$

con, [1.11.05 f],

$$K = \frac{434}{c\ \gamma\ \chi_{20}\ (T_0 + 20)}\ \Delta^2$$

para el cobre.

En el caso a)

$$K = \frac{434}{400 \cdot 8{,}9 \cdot 58\ (235 + 20)}\ 180^2 = 0{,}267.$$

$$T_1 = T_0 + \theta_1 = 235 + 20 = 255^0$$

FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

$\Delta t = 1$ s

de donde,

$$\log_{10} \frac{T_2}{T_1} = \log_{10} \frac{T_2}{255} = 0{,}267 \cdot 1\ ; \ \frac{T_2}{255} = 1{,}85$$

$$T_2 = 255 \cdot 1{,}85 = 472\ ^\circ C$$

y

$$\theta_2 = T_2 - T_0 = 472 - 235 = 237\ ^\circ C$$

en lugar de los 250 °C hallados antes.

En el caso b)

$$K = \frac{434}{400 \cdot 8{,}9 \cdot 56 \cdot (235 + 20)}\ 180^0 = 0{,}277$$

$$T_1 = 235 + 120 = 355\ ^\circ C$$

$$\log_{10} \frac{T_2}{T_1} = \log_{10} \frac{T_2}{355} = 0{,}277 \cdot 1\ ; \ \frac{T_2}{355} = 1{,}89$$

$$T_2 = 355 \cdot 1{,}89 = 670\ ^\circ C$$

y

$$\theta_2 = 670 - 235 = 435\ ^\circ C$$

en lugar de 445 °C calculados anteriormente.

1.11.07. Conductividad térmica

El concepto define la mayor o menor aptitud de los materiales para permitir el paso del calor a través de su masa bajo la acción de una diferencia de temperaturas; de la misma manera que la conductividad eléctrica es un índice de la aptitud del conductor para dejar que circule la corriente bajo la acción de una diferencia de potencial.

Se observa experimentalmente que la potencia térmica $\dot{p}_\lambda$ que puede transmitir por conducción una sustancia homogénea depende de la naturaleza de la sustancia misma y es proporcional a la diferencia de temperatura $\Delta\theta$ entre los extremos del conductor térmico y a la sección de paso s_λ e inversamente proporcional a la distancia τ entre dichos extremos

$$\boxed{\dot{p}_\lambda = \lambda\ \Delta\theta_\lambda \frac{s_\lambda}{\tau}} \quad (W) \qquad [1.11.07\ a$$

Con $\dot{p}_\lambda$ en W, s_λ en cm², τ en cm e $\Delta\theta_\lambda$ en °C, resulta el coeficiente de proporcionalidad λ en $\frac{W \cdot cm}{cm^2\ ^\circ C}$.

La ecuación [a] puede escribirse de esta forma

$$\left.\begin{aligned} p_\lambda &= \Delta\theta_\lambda \left(\lambda \frac{s_\lambda}{\tau}\right) = \Delta\theta_\lambda\, G_\lambda \qquad \text{(W)} \\ &= \frac{\Delta\theta_\lambda}{\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\tau}{s_\lambda}\right)} = \frac{\Delta\theta_\lambda}{R_\lambda} \qquad \text{(W)} \end{aligned}\right\} \quad [1.11.07\ b]$$

siendo

$$\left.\begin{aligned} G_\lambda &= \lambda \frac{s_\lambda}{\tau} = \frac{1}{R_\lambda} \qquad \left(\frac{\text{W}}{^\circ\text{C}}\right) \\ R_\lambda &= \frac{\tau}{\lambda\, s_\lambda} = \frac{1}{G_\lambda} \qquad \left(\frac{^\circ\text{C}}{\text{W}}\right) \end{aligned}\right\} \quad [1.11.07\ c]$$

y

G_λ y R_λ presentan los caracteres respectivos de una *conductancia* y de una *resistencia térmica* análogas en su función a las mismas características de un circuito eléctrico, pudiéndose hablar idénticamente de «circuitos térmicos» a los cuales son aplicables correlativamente las mismas leyes fundamentales de aquellos otros circuitos (Ley de OHM, leyes de KIRCHHOFF, acoplamientos en serie, en paralelo, etc.); la diferencia de temperaturas $\Delta\theta_\lambda$ (°C) sustituye a la d.d.p. U (V) y la potencia térmica p_λ (W o cal/s) a la corriente eléctrica I (A).

En particular, para el montaje en serie de resistencias térmicas individuales $R_{\lambda i}$ (o conductancias $G_{\lambda i}$) la resistencia R_λ (o la conductancia G_λ) combinada viene dada por

$$\left.\begin{aligned} R_\lambda &= \Sigma\, R_{\lambda i} \qquad \frac{1}{G_\lambda} = \Sigma \frac{1}{G_{\lambda i}} \\ &\text{o para el montaje en paralelo} \\ \frac{1}{R_\lambda} &= \Sigma \frac{1}{R_{\lambda i}} \qquad G_\lambda = \Sigma\, G_{\lambda i} \end{aligned}\right\} \quad [1.11.07\ d]$$

De estas últimas leyes se hace frecuente uso en la previsión de la elevación de temperatura cuando se trata de nuevas máquinas eléctricas aunque para el cálculo normal conviene partir de otros índices de calentamiento más prácticos que pueden obtenerse experimentalmente por medio de ensayos directos; sobre ellos volveremos en el momento oportuno.

La tabla 1.11.01 a da los valores de la *conductividad térmica* λ para los materiales que intervienen en la construcción de máquinas eléctricas. Retengamos aquí algunas cifras muy significativas

$\lambda = 3{,}8$	$\frac{\text{W}\cdot\text{cm}}{\text{cm}^2\cdot{}^\circ\text{C}}$	para el *Cu*
$\lambda = 2{,}2$	»	para el *Al*
$\lambda = 0{,}45$	»	para el *Fe*
$\lambda = 0{,}0026$	»	para la cinta de micanita
$\lambda = 0{,}00028$	»	para el aire a 60 °C

En números redondos el cobre es, térmicamente, 8 veces más conductor que el hierro y la cinta de micanita 10 veces más conductora que el aire; a su vez el cobre es unas 1500 veces más conductor que la cinta de micanita. Nótese la baja conductividad térmica de los materiales dieléctricos y en especial la inconveniencia de las capas de aire intercaladas en los recubrimientos aislantes porque hacen más difícil la evacuación del calor. Basta, a veces, un simple encintado flojo sobre las cabezas de bobina para elevar en 10 a 20 °C la temperatura media de un arrollamiento. Una buena impregnación contribuye siempre a mejorar la conductividad térmica de los aislantes reduciendo el calentamiento del bobinado. El cobre no es sólo el material industrial de mejor conductividad eléctrica sino, también, térmica.

1.11.08. Coeficientes de conducción térmica combinados

Si varias capas conductoras de la misma sección se presentan en serie, cabe calcular la resistencia o la conductancia térmica del conjunto mediante una ecuación simple de la forma

$$R_\lambda = \frac{\tau}{\lambda\, s_\lambda} \qquad G_\lambda = \frac{\lambda\, s_\lambda}{\tau} \qquad [1.11.08\ a]$$

tomando para τ el espesor total

$$\tau = \Sigma\, \tau_i$$

y para λ un valor combinado que viene dado por

$$\lambda = \frac{\tau}{\Sigma \frac{\tau_i}{\lambda_i}} \qquad [1.11.08\ b]$$

En efecto; siendo la sección de paso s_λ común a todas las capas, pongamos

$$R_\lambda = \frac{1}{s_\lambda} \Sigma \frac{\tau_i}{\lambda_i} = \frac{1}{s_\lambda} \frac{\tau}{\lambda}$$

de donde

$$\lambda = \frac{\tau}{\Sigma \frac{\tau_i}{\lambda_i}}$$

1.11.09. **Ejemplo**

Calcular la diferencia de temperaturas entre las caras internas y externas del aislamiento en las ranuras de un alternador de 5 kV. Este aislamiento alcanza un espesor de 2 mm. a base de cinta de micanita. Las dimensiones del cobre en sección son de 10 × 20 mm y trabaja con una densidad de corriente de 4 A/mm².

Las pérdidas por kg de cobre 56 a 75 °C vienen dadas por [1.01.15 c]

$$p_{J\vartheta} = 2{,}44 \cdot k_\vartheta \, \Delta^2 \qquad \left(\frac{W}{kg}\right)$$

Si suponemos que la temperatura del conductor en servicio es de 120 °C (aislamiento clase B), $k_\vartheta = 1{,}14$ (tabla 1.01.16 b).

$$p_{J\vartheta} = 2 \cdot 44 \cdot 1{,}14 \cdot 4^2 = 44{,}5 \qquad \left(\frac{W}{kg}\right)$$

y con un peso específico γ de 8,9 $\frac{kg}{dm^3}$

$$p_{J\vartheta} = 44{,}5 \; \gamma = 44{,}5 \cdot 8{,}9 = 396 \qquad \frac{W}{dm^3}$$

es decir, 0,396 $\frac{W}{cm^3}$

Puesto que la sección del cobre es de 1 × 2 cm = 2 cm², cada cm³ de conductor se extenderá en una longitud de 0,5 cm de barra con una superficie de refrigeración de (1 + 2) 2 × 0,5 = 3 cm². La potencia a disipar por cm² es , pues, de

$$\frac{p_\lambda}{s_\lambda} = \frac{0{,}396}{3} = 0{,}132 \qquad \frac{W}{cm^2}$$

(1,32 kW/m², que viene a ser una cifra media bastante normal).

De (1.11.07 a), contando con una conductividad térmica λ de 0,0026 $\frac{W \cdot cm}{cm^2 \cdot {}^\circ C}$ para la cinta de micanita (tabla 1.11.01 a) y siendo $l = 0{,}2$ cm

$$\Delta \vartheta_\lambda = \frac{p_\lambda}{s_\lambda} \frac{\tau}{\lambda} = 0{,}132 \; \frac{0{,}2}{0{,}0026} \approx 10 \; {}^\circ C$$

Esta diferencia de temperatura es la necesaria para vencer solamente la resistencia de la pared aislante (efecto de conducción) sin incluir el salto térmico entre la superficie del conductor y la cara interna de la pared y el que aparece entre la superficie exterior de la pared aislante y el medio inmediato de refrigeración. Uno y otro son, sin embargo, despreciables a condición de que el contacto del encintado con el cobre y con la chapa sean perfectos. Queda aún la resistencia térmica de las chapas donde va alojado el arrollamiento, ya más apreciable y las condiciones de radiación y convección de la superficie de las mismas en contacto con el aire, sobre lo cual volveremos enseguida.

La presencia de una simple película de aire de 0,1 mm en el interior del recubrimiento aislante hará subir la diferencia de temperatura por efecto de conducción según el cálculo siguiente.

La resistencia del aislamiento de cinta de micanita (subíndice c) que rodea a un cm³ de conductor vale, [1.11.07 c],

$$R_{\lambda c} = \frac{\tau_c}{\lambda_c \, s_\lambda} = \frac{0{,}2}{0{,}0026 \cdot 3} = 25{,}6 \qquad \frac{{}^\circ C}{W}$$

y la de la película de aire

$$R_{\lambda a} = \frac{\tau_a}{\lambda_a \, s_\lambda} = \frac{0{,}01}{0{,}00022 \cdot 3} = 15{,}1 \qquad \frac{{}^\circ C}{W}$$

la resistencia combinada, de los dos en serie

$$R_\lambda = R_{\lambda c} + R_{\lambda a} = 25{,}6 + 15{,}1 = 40{,}7 \qquad \frac{{}^\circ C}{W}$$

y la diferencia de temperaturas requerida por ambas capas conjuntas, [1.04.07 b],

$$\Delta\vartheta_\lambda = R_\lambda \cdot p_\lambda = 40{,}7 \cdot 0{,}396 \approx 16 \; {}^\circ C$$

60 % más que anteriormente.

En este caso podríamos haber usado también la ecuación directa [1.04.08] con los valores combinados de τ y λ [1.04.08 b], a saber:

$$\tau = \Sigma \, \tau_i = 0{,}2 + 0{,}01 = 0{,}21 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{\tau}{\Sigma \frac{\tau_i}{\lambda_i}} = \frac{0{,}21}{\frac{0{,}2}{0{,}0026} + \frac{0{,}01}{0{,}00022}} = 0{,}00171 \qquad \frac{W \cdot cm}{cm^2 \; {}^\circ C}$$

y

$$R_\lambda = \frac{\tau}{\lambda \, s_\lambda} = \frac{0{,}21}{0{,}00171 \cdot 3} = 40{,}7 \qquad \frac{{}^\circ C}{W}$$

según acabamos de hallar.

En este ejemplo se ha supuesto implícitamente que no existe conducción axial a lo largo de la barra, es decir, que el equilibrio térmico se establece a través, únicamente, de la propia superficie del conductor donde se originan las pérdidas.

1.11.10. Conducción térmica longitudinal en los conductores

Así como la conducción a través de los aislamientos se produce atravesando el calor unos materiales pasivos (prescindiendo de las pérdidas dieléctricas, por lo regular despreciables), la conducción térmica longitudinal, en cambio, se desarrolla a lo largo de una zona metálica en la cual nace al mismo

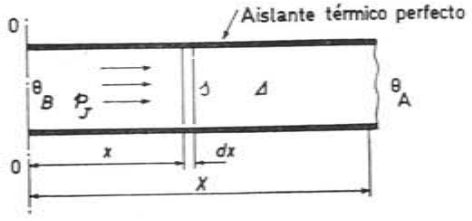


Fig. 1.11.10 a. Conducción térmica a lo largo de un donductor eléctrico.

tiempo un cierto caudal de energía que debe ser transmitido a su vez por las zonas inmediatas no siendo entonces aplicable la simple ecuación de conductividad [I.II.07 a].

Prescindiendo en este caso de la disipación transversal a través de los aislantes, es fácil establecer la ecuación de equilibrio térmico en un conductor supuesto en condiciones térmicas simétricas respecto al eje transversal, oo (fig. I.II.10 a). Dicho eje podría ser el del estator de una máquina simétricamente refrigerada y la hipótesis de conducción puramente longitudinal equivale a considerar el recubrimiento de los conductores como aislantes térmicamente perfecto. La ecuación propuesta es, en este caso,

$$\boxed{\Delta\theta_M = \frac{\varrho_m}{2\,\lambda}\,\Delta^2\,X^2} \quad (^oC)$$

o bien

$$\boxed{\Delta\theta_M = \frac{p_j\,\gamma}{2000\,\lambda}\,X^2} \quad (^oC) \qquad \text{[I.II.10 a]}$$

p_j = pérdidas específicas en $\frac{W}{kg}$

$\Delta\theta_M$ = diferencia de temperatura en °C entre el centro del conductor y un punto situado a la distancia de X cm según su eje

ϱ_m = resistividad media del material en $\frac{\Omega\ mm^2}{m}$ a lo largo de esta distancia x tomadas una y otra a partir del eje oo de simetría térmica del conductor (fig. I.II.10 a)

λ = conductividad térmica del material en $\frac{W \cdot cm}{cm^2\ ^oC}$

La ecuación [a] se deduce como sigue: la potencia p_J (en W), pérdidas por efecto JOULE, que transcurre a través de un prisma elemental de sección s (cm^2) y altura dx (cm) provocará una diferencia de temperatura $d\theta$ (°C) entre las bases del prisma tal que, [I.II.07 a],

$$p_J = -\frac{d\theta}{\left(\frac{dx}{\lambda\,s}\right)} \quad (W) \qquad \text{[I.II.10 b]}$$

El signo (−) proviene de que contadas las distancias x como positivas a partir del eje oo en el sentido de transmisión de la energía, a un incremento positivo de x le corresponde una disminución de la temperatura. En función de las dimensiones del conductor, si designamos por G_x el peso del mismo (kg) correspondiente a la longitud x (cm), las pérdidas p_J vendrán dadas por, [I.01.15 b],

$$p_J = \frac{1000\ \varrho}{\gamma}\,G_x\,\Delta^2 \quad (W)$$

$$= \frac{1000\ \varrho}{\gamma}\left(\frac{s\,x}{1000}\,\gamma\right)\Delta^2 = \varrho\,s\,x\,\Delta^2 \quad (W)$$

Sustituyendo en [b]

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{p_J}{\lambda\,s} = -\frac{\varrho}{\lambda}\,\Delta^2\,x \qquad \text{[I.II.10 c]}$$

Como ϱ es distinta en cada sección transversal de acuerdo con su temperatura, función también de x, la introducción de estas condiciones en la ecuación anterior hace más difícil la solución del problema. Soslayaremos esta dificultad adoptando para ϱ un valor constante igual a la media aritmética ϱ_m de los valores correspondientes al centro y al extremo de la barra, valor que puede ser rectificado en una segunda aproximación si las temperaturas previstas a este fin, para uno y otro punto, discrepasen considerablemente de las deducidas luego de la misma ecuación [c].

En beneficio de la uniformidad de procedimiento cabe también partir siempre de la resistividad constante a 75 °C y aplicar a los resultados el coeficiente de corrección k_θ, [I.01.14 a], comprobando luego el valor de θ como temperatura media.

De [c]

$$d\theta = -\frac{\varrho_m}{\lambda}\,\Delta^2\,x\,dx$$

y

$$\theta_A - \theta_B = -\Delta\theta_M = \int_{\theta_B}^{\theta_A} d\theta = -\frac{p_m}{\lambda}\,\Delta^2\int_0^X x\,dx = -\frac{\varrho_m}{\lambda}\,\frac{\Delta^2}{2}\,x^2$$

y teniendo en cuenta la ecuación [I.01.15 a],

$$\Delta\theta_M = \frac{p_J\,\gamma}{2000\,\lambda}\,X^2$$

que es lo que se trataba de demostrar, [a].

Veamos, pues, que la diferencia de temperatura a partir del centro térmico de la barra es *proporcional al cuadrado* de la densidad de corriente y crece proporcionalmente también con *el cuadrado* de la longitud de la barra misma.

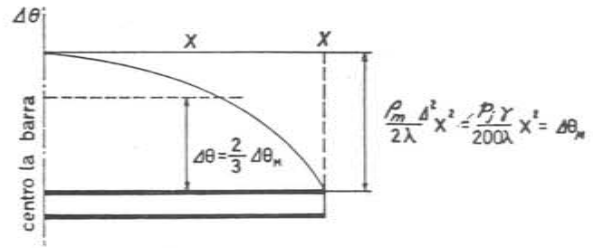


Fig. I.II.10 b. Curva de calentamiento a lo largo de la barra conductora

Interesa también el calentamiento medio que es el que se mide por aumento de resistencia. Según la ecuación anterior, la curva axial de temperaturas es una parábola, fig. I.II.10 b. Si referimos estas temperaturas a la de la sección extrema A del conductor poniendo para ella $\Delta\theta$ = o, la ecuación de la curva pasa a ser

$$\Delta\theta = \frac{\varrho_m \Delta^2}{2\lambda}(X^2 - x^2)$$

y su valor medio

$$\Delta\theta_m = \frac{\varrho_m \Delta^2}{2\lambda}\frac{1}{X}\int_0^X (X^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{\varrho_m \Delta^2}{2\lambda}\frac{1}{X}\left(X^3 - \frac{X^3}{3}\right)$$

El calentamiento medio, es, pues,

$$\boxed{\Delta\theta_m = \frac{\varrho_m \Delta^2}{3\lambda}X^2 = \frac{p_j\,\gamma}{3000\,\lambda}X^2} \quad (°C) \qquad [1.11.10\ d]$$

igual a $\frac{2}{3}$ del máximo $\Delta\theta_M$.

1.11.11. Ejemplo

Calcular la diferencia de temperatura $\Delta\theta$ entre el centro y la salida de ranuras para las barras de un inducido de $2X = 30$ cm de longitud refrigerado prácticamente sólo por las conexiones frontales suponiendo que la densidad de corriente con que trabaja la máquina sea de 4 A/mm² y la temperatura media de la zona considerada, 100 °C.

La fórmula [1.11.10 a] nos da directamente, para $\varrho_m = 0{,}0217 \cdot 1{,}08$, (tabla 1.11.16 b), y $\lambda = 3{,}8\ \frac{W \cdot cm}{m^3 \cdot °C}$ (tabla 1.11.01 a),

$$\Delta\theta_M = \frac{\varrho_m}{2\lambda}\Delta^2 X^2 = \frac{(0{,}0217 \cdot 1{,}08)}{2 \cdot 3{,}8}\,4^2 \cdot 15^2 = 11{,}1\ °C$$

$$\Delta\theta_m = \frac{2}{3} \cdot 11{,}1 = 7{,}5\ °C$$

Si la longitud del inducido fuese doble (60 cm) la diferencia de temperatura máxima se haría cuatro veces mayor, 44,4 °C, lo que aconsejaría disponer canales radiales intermedios de refrigeración. El resultado es de todos modos exagerado porque las paredes laterales del conductor, aunque aisladas, contribuyen a la disipación del calor a través de la chapa magnética casi siempre menos caliente que el bobinado.

1.11.12. Calentamiento del paquete de chapas de las máquinas rotatorias

El paquete magnético sometido a un flujo alterno trabaja desde el punto de vista térmico en condiciones similares a las de los conductores, atendiendo a que su masa es a la vez asiento de pérdidas a disipar y medio conductivo para la eliminación de dichas pérdidas hasta la superficie.

En los conductores, estrechos y largos, hemos prescindido de la resistencia térmica transversal de la masa, admitiéndose, pues, que la temperatura dentro de la misma sección era constante; la única diferencia de temperatura, si existe, aparecerá entonces en sentido longitudinal.

En cambio, las proporciones normales de los paquetes de chapas, provistos o no de canales radiales de ventilación, no permiten admitir aquella hipótesis; con la particularidad adicional de que la conductividad térmica radial, λ_y puramente metálica, es muy superior a la conductividad axial λ_x entorpecida por las capas aislantes que separan a las planchas individuales.

La relación entre ambos coeficientes de conducción varía entre 30 y 60 según la naturaleza de la chapa aleada y la del aislamiento (papel, esmalte; véase tabla 1.11.01 a); como promedio podemos tomar en las máquinas rotativas $\lambda_y = 0{,}45$ y $\lambda_x = 0{,}0075$ para las planchas aisladas con papel o $\lambda_x = 0{,}0125$, $\frac{W \cdot cm^2}{cm \cdot °C}$ para la chapa esmaltada, de donde

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \frac{0{,}45}{0{,}0075} = 60 \text{ para chapas empapelados}$$

$$\frac{\lambda_y}{\lambda_x} = \frac{0{,}45}{0{,}0125} = 36 \quad » \quad » \quad \text{barnizadas}$$

A primera vista esta gran diferencia de conductividades no justificaría la disposición de canales de ventilación radial puesto que para obtener una eficacia de refrigeración parecida en ambos sentidos la longitud de cada paquete de chapas debería ser del orden de $\frac{1}{60}$ o $\frac{1}{36}$ del grueso medido radialmente, relación prácticamente inalcanzable en las máquinas rotatorias; los canales de esta naturaleza sólo cabría utilizarlos, si acaso, en el núcleo de los transformadores. Pero si se tiene en cuenta además el efecto de ventilación superficial de cada paquete situado entre dos canales, recorridos éstos por aire a gran velocidad que barre eficazmente las caras accesibles al mismo, se comprende que el incremento de temperatura en estas superficies puede ser relativamente bajo con respecto al aire de ventilación. Las superficies cilíndricas no se hallan sometidas a una refrigeración tan enérgica.

De todos modos, las complicaciones constructivas de tales canales de ventilación hacen que se prescinda de ellos en todas las máquinas pequeñas, y aún medianas, estableciéndose una circulación del aire puramente axial.

Tratemos de formarnos una idea sobre la magnitud de las diferencias de temperaturas en un paquete de chapas.

1.11.13. Conducción térmica radial del paquete

Imaginando un paquete cilíndrico de radio R cm y gran longitud, donde *la transmisión axial fuese despreciable*, la diferencia de temperaturas entre la periferia y el centro del mismo (fig. 1.11.13 a) puede deducirse mediante la ecuación.

$$\boxed{\Delta\theta_M = \frac{p_{fe}\,\gamma\,R^2}{4000\,\lambda_y}} \quad (°C) \qquad [1.11.13\ a]$$

y su valor medio

$$\boxed{\Delta\theta_m = \frac{2}{3}\Delta\theta_M} \quad (°C) \qquad [1.11.13\ b]$$

p_{fe} = pérdidas específicas en el hierro en $\frac{W}{kg}$

λ_y = conductividad térmica en sentido paralelo a las laminaciones en $\frac{W \cdot cm}{cm^2 \cdot {}^oC}$

γ = peso específico de la plancha en $\frac{kg}{dm^3}$

En efecto: La potencia perdida p_{Fe} en todo el cilindro de longitud neta L_{Fe} (cm) interior a un radio r (cm) vendrá dada por

$$p_{Fe} = \left(\pi \frac{r^2}{100} \frac{L_{Fe}}{10}\right) \gamma \, p_{fe} \quad \text{(W)}$$

siendo como hemos dicho γ el peso específico en $\frac{kg}{dm^3}$ y p_{fe} la pérdida específica en la chapa en $\frac{W}{kg}$

Supuesta una ventilación exclusivamente periférica, esta potencia atraviesa la corona de espesor dr creando una diferencia de temperatura $d\theta$ entre las superficies concéntricas que la delimitan, tal que, [I.11.07 a],

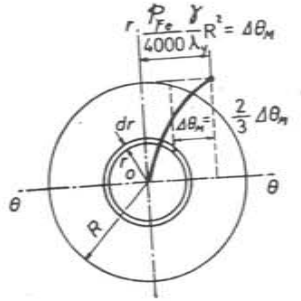


Fig. I.11.13 a. Calentamiento radial de un paquete de chapas.

$$p_{Fe} = -\frac{d\theta}{\frac{dr}{\lambda_y (2 \pi r L_{Fe})}} = -2 \pi r L_{Fe} \lambda_y \frac{d\theta}{dr}$$

o

$$(\pi r^2 L_{Fe} \gamma) \frac{p_{fe}}{1000} = -2 \pi r L_{Fe} \lambda_y \frac{d\theta}{dr}$$

y

$$d\theta = -\frac{p_{Fe} \gamma}{2000 \lambda_y} r \, dr$$

que extendida a todo el espesor R del cilindro nos da, representando por $\Delta\theta_M$ el exceso de temperatura en el eje sobre la de la periferia

$$-\Delta\theta_M = \frac{p_{Fe} \gamma}{2000 \lambda_y} \int_0^R r \, dr = -\frac{p_{fe} \gamma R^2}{4000 \lambda_y}$$

como se trataba de demostrar.

El mismo proceso que en [I.11.10 d] nos llevaría a la expresión [b] del valor medio.

I.11.14. Ejemplo

Sea calcular la elevación de temperatura en el eje, con respecto a la periferia, de un paquete de chapas rotóricas de gran longitud, donde resulta despreciable la disipación de las caras frontales. El radio exterior $R = 7{,}5$ cm, la pérdida específica a la inducción de trabajo $p_{fe} = 20$ W/kg, el coeficiente de conducción térmica en sentido de las laminaciones [1]

$\lambda_y = 0{,}5 \frac{W \cdot cm}{cm^2 \, {}^oC}$ (tabla I.11.01 a) y el peso específico de la plancha $\gamma = 7{,}7 \frac{kg}{dm^3}$

Si despreciamos la disipación de calor por el eje y por las caras frontales, el flujo térmico tendrá un sentido único radial y podemos aplicar la ecuación [I.11.13 a]

$$\Delta\theta_M = \frac{p_{fe} \gamma R^2}{4000 \lambda_y} = \frac{20 \cdot 7{,}7 \cdot 7{,}5^2}{4000 \cdot 0{,}5} = 4{,}3 \ {}^oC$$

prácticamente insignificante. Si se duplica el diámetro del paquete de chapas (30 cm), la diferencia de temperaturas apenas rebasará los 17 °C.

Estas cifras no justificarían la subdivisión de los paquetes de chapas.

I.11.15. Conducción térmica axial del paquete

El flujo circula en este caso por un volumen prismático y si admitimos la simetría de condiciones con respecto al centro del paquete nos hallamos en el mismo caso ya estudiado de las barras conductoras (párr. I.11.10), siendo aplicable la siguiente fórmula esencialmente idéntica a la [I.11.10 a]

$$\boxed{\Delta\theta_M = \frac{p_{fe} \gamma}{2000 \lambda_x} X^2} \quad (C_o) \qquad \text{[I.11.15 a]}$$

donde

p_{fe} = pérdidas específicas en el hierro en $\frac{W}{kg}$

γ = peso específico de la plancha en $\frac{kg}{dm^3}$

λ_x = conductividad térmica axial de las laminaciones en $\frac{W \cdot cm}{cm^2 \cdot {}^oC}$

X = semilongitud del paquete de chapas en cm

Basta escribir la ecuación fundamental [I.11.10 b] en esta forma:

$$p_{Fe} = -\frac{d\theta}{\left(\frac{dx}{\lambda_x s}\right)} \quad \text{(W)}$$

p_{Fe} = pérdidas en el hierro dentro del volumen prismático de altura x en W
s = sección transversal del paquete, en cm²
$d\theta$ = diferencia de temperatura en °C entre las caras del elemento dx, en °C

(1) Tomamos un valor más bien elevado de λ_y para compensar la ausencia de pérdidas en el eje por el cual prácticamente no circula flujo alguno si la máquina es multipolar.

Pero en las unidades indicadas y con el peso específico γ en $\frac{kg}{dm^3}$

$$\dot{p}_{Fe} = (s\,x)\ \gamma\ \frac{\dot{p}_{fe}}{1000}$$

de donde

$$s\,x\,\gamma\,\frac{\dot{p}_{fe}}{1000} = -\lambda_x \frac{s}{dx}\,d\theta$$

$$d\theta = -\frac{\dot{p}_{fe}}{1000}\,\frac{\gamma}{\lambda_x}\,x\,dx$$

y

$$-\Delta\theta_M = -\frac{\dot{p}_{fe}}{1000}\,\frac{\gamma}{\lambda_x}\int_0^X x\,dx = -\frac{\dot{p}_{fe}}{1000}\,\frac{\gamma}{\lambda_x}\,\frac{X^2}{2}$$

como acabamos de escribir.

La diferencia de temperatura longitudinal es independiente de la forma de la sección (compárese con I.II.10 a).

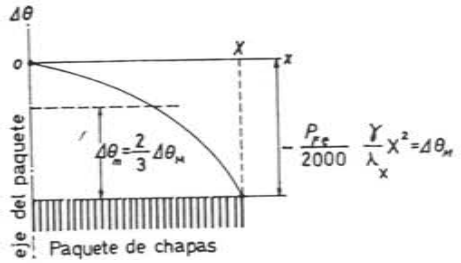


Fig. I.II.15 a. Curva de calentamiento a lo largo del paquete de chapas.

La curva de temperatura $\Delta\theta = f(x)$ es, pues, la que puede verse en la fig. I.II.15 a.

El calentamiento medio, vale

$$\boxed{\Delta\theta_m = \frac{\dot{p}_{fe}}{3000}\,\frac{\gamma}{\lambda_x}\,X^2} \quad (°C) \qquad [I.II.15\ b]$$

siempre igual a $\frac{2}{3}$ del máximo.

I.II.16. Ejemplo

El paquete del ejemplo anterior en chapa barnizada posee una longitud de 24 cm. Suponiendo que toda la disipación de las pérdidas en el hierro tuviese efecto en dirección axial, ¿cuál sería la diferencia de temperatura entre el centro del paquete y las caras laterales?

Ya dijimos que $\dot{p}_{fe} = 20$ W/kg y $\gamma = 7{,}7$ kg/dm³. Si además es $\lambda_x = 0{,}0125\ \frac{W \cdot cm}{cm^2\ °C}$ (tabla I.II.01 a), como $X = \frac{24}{2} = 12$ cm, la ecuación [I.II.15 a] nos daría

$$\Delta\theta_M = -\frac{20}{2000}\,\frac{7{,}7}{0{,}0125}\,12^2 = 890\ °C$$

Es evidente que la conducción radial de las chapas resulta indispensable así como el subdividir el paquete por medio de canales radiales

I.II.17. Radiación y convección térmicas

La disipación superficial de la energía térmica desarrollada en el seno de una sustancia o conducida a través de su masa suele efectuarse mediante la colaboración simultánea de dos efectos físicos bien conocidos; el de radiación y el de convección térmicas, pero para que uno y otro se produzcan es necesario que exista una diferencia de temperaturas entre el cuerpo a refrigerar y el medio ambiente.

La *radiación* sigue la ley de STEFAN-BOLTZMANN

$$\dot{p}_r = c_r\,S_r\,(T_2^4 - T_1^4) \quad (W) \qquad [I.II.17\ a]$$

$\dot{p}_r$ es la potencia radiada en W

S_r la superficie de radiación en cm²

T_2 la temperatura absoluta superficial del cuerpo radiante en °K correspondiente a θ_2 °C

$$T_2 = 273 + \theta_2 \quad (°K)$$

T_1 la temperatura absoluta del medio ambiente en °K correspondiente a θ_1 °C

$$T_1 = 273 + \theta_1 \quad (°K)$$

c_r el *coeficiente de radiación* dependiente de la naturaleza del cuerpo emisor y del estado y color de la superficie. Para un cuerpo térmicamente negro

$$c_r = 5{,}7 \times 10^{-12}\ \frac{W}{cm^2\ (°K)^4}$$

Si la zona de temperaturas T_1 T_2 no es muy amplia, como sucede en las máquinas eléctricas, la ecuación [I.II.17 a] puede sustituirse por esta otra, aproximada, de proporcionalidad directa entre las pérdidas y el calentamiento

$$\boxed{p_r = K_r\, S_r\, \Delta\theta} \quad \text{(W)} \qquad \text{[I.II.17 b]}$$

siendo

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \qquad (^{\circ}\text{C}).$$

El valor del *coeficiente de radiación* K_r en el dominio de las temperaturas superficiales de las máquinas eléctricas en servicio se encuentra alrededor de

$$K_r = 6 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}} = 6\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ {}^{\circ}\text{C}}$$

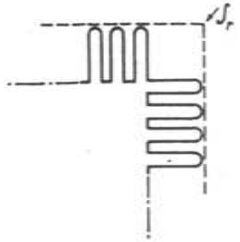


Fig. I.II.17 a. Superficie radiante τ_0 de las paredes de una capa ondulada.

Como superficie radiante S_r sólo interviene la superficie periférica del cuerpo determinado por el contorno libre (fig. I.II.17 a], no debiendo contarse las paredes de radiación enfrentadas entre sí o con otras, próximas, activamente reflectantes. En este último caso, habría que afectar a S_r de un coeficiente de eficacia menor que la unidad y siempre difícil de prever. Para las superficies de fondo, próximas al suelo (por ejemplo, la tapa inferior de las cajas de transformadores), el coeficiente de radiación se toma igual a cero, es decir, que no se computan como superficies activas en la refrigeración.

Dando a la ecuación la forma típica de la ley de OHM.

$$\frac{\Delta\theta}{p_r} = \frac{1}{K_r\, S_r} = R_r \left(\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{W}}\right) = \frac{1}{G_r} \left(\frac{\text{W}}{^{\circ}\text{C}}\right) \qquad \text{[I.II.17 c]}$$

el coeficiente $\frac{1}{K_r\, S_r}$ equivale a una resistencia térmica de radiación R_r y $(K_r\, S_r)$ a una conductancia G_r pero en este caso ambas son independientes de la longitud del circuito radiante.

$$R_r = \frac{1}{K_r\, S_r} \qquad G_r = \frac{1}{K_r\, S_r} \qquad \text{[I.II.17 d]}$$

El fenómeno de *convección* actúa sustrayendo la energía térmica del cuerpo caliente por contacto superficial directo, pero siempre mediante un fluido, líquido o gas, a temperatura más baja y constantemente renovado. Si el medio refrigerante permanece estacionario, nos hallamos nuevamente en el caso de la conducción térmica (películas de aire encerradas entre las capas aislantes, bolsas de colada o «soplados» en el seno de los materiales fundidos.) La ley

que rije el enfriamiento por convección es similar a la de radiación en su forma simplificada, es decir, que la potencia disipada por convección viene dada por

$$\boxed{p_c = K_c\, S_c\, \Delta\theta} \quad \text{(W)} \qquad \text{[I.II.17 e]}$$

con la particularidad de que S_c es aquí toda la superficie en contacto con el medio refrigerante, distinta, y muy superior, por lo general, a S_r. El *coeficiente de convección* K_c no es constante sino que depende de la velocidad relativa v_c entre la superficie caliente y el ambiente de refrigeración y viene a ser proporcional «grosso modo», a la potencia 0,6 ó 0,7 de dicha velocidad; $\Delta\theta$ es la diferencia de temperatura entre la superficie de enfriamiento y el medio ambiente próximo. Para las máquinas eléctricas, poniendo p_c en W, S_c en cm² e $\Delta\theta$ en °C, K_c viene dado en $\frac{\text{W}}{\text{cm}^2 \cdot {}^{\circ}\text{C}}$, como K_r, de tal modo que si las superficies S_c y S_r son idénticas

$$S_c = S_r = S_v$$

K_c y K_r pueden reunirse en un coeficiente único de *ventilación*

$$K_v = K_c + K_r$$

y, en cualquier caso designando por S_v la superficie equivalente de ventilación, con $\Delta\theta$, aumento de temperatura superficial, la potencia disipada

$$\boxed{p = K_v\, S_v\, \Delta\theta} \quad (^{\circ}\text{C}) \qquad \text{[I.II.17 f]}$$

K_v depende ahora *de la naturaleza de la superficie radiante y de la velocidad del medio de refrigeración* y S_v, *de la configuración exterior del cuerpo ventilado y de sus dimenciones.*

El valor K_c viene a ser, para el aire como fluido convectivo, sin circulación forzada (carcasas de máquinas y cajas de transformadores con ventilación natural)

$$K_c = 6 \ldots 7 \cdot 10^{-4}\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2\ {}^{\circ}\text{C}} = 6 \ldots 7\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ {}^{\circ}\text{C}}$$

y para el aceite, también en circulación natural,

$$K_c = 1 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{W}}{\text{cm}^2\ {}^{\circ}\text{C}} = 100\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ {}^{\circ}\text{C}}$$

aplicable a los devanados de transformadores. La ventilación forzada aumenta apreciablemente estos valores.

Para el coeficiente combinado de radiación y convección, K_v que es el que se emplea prácticamente, hay que tener ya en cuenta la disposición constructiva de la máquina y de los elementos parciales cuyo calentamiento interesa calcular, siendo indispensable acudir a la investigación experimental sobre montajes y disposiciones o máquinas similares. Con refrigeración natural y superficies de convección íntegramente radiantes a la vez, tendremos, pues,

$$K_v = K_c + K_r = 12 \ldots 13 \ \frac{\text{W}}{\text{m}^2\ ^\circ\text{C}}$$

Se comprende, que la variedad y dispersión de los datos sea notable en este aspecto según las condiciones que han servido de base para determinarlos, por lo cual deben emplearse con bastante reserva y cierto margen de prudencia.

A igualdad de tipo constructivo, pueden aplicarse fórmulas de este género:

$$\boxed{K_v = K_{vo}\ (1 + a\ \sqrt{v})} \quad \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2\ ^\circ\text{C}}\right) \qquad (1.11.17\ \text{g})$$

siendo v (m/s) la velocidad periférica del ventilador o, en su caso, del aire de refrigeración y K_{vo} el coeficiente de ventilación natural.

Lo más seguro es apoyarse en los resultados obtenidos por mediciones directas del calentamiento sobre máquinas previas de construcción y condiciones análogas. Algunas diferencias imprevisibles en los circuitos interiores de ventilación, sobre todo posibles obstrucciones, «zonas de sombra», zonas de remanso y circuitos de retroceso para la circulación de aire, tienen consecuencias altamente desfavorables. Las corrientes de aire que inciden perpendicularmente sobre las superficies son las más eficaces; las soluciones acertadas siguen exigiendo, hasta el momento presente, bastante experiencia personal por parte del proyectista.

Al tratar de cada tipo de máquina daremos los datos empíricos disponibles para el estudio de conjunto de las mismas en el aspecto de la ventilación, con ejemplos adecuados, ya que, repetimos, el tipo de máquina y sus detalles constructivos son decisivos en los resultados, careciendo de valor práctico toda generalización excesiva.

1.11.18. Proceso de calentamiento de un cuerpo homogéneo Calentamiento de régimen $\hat{\theta}_\Delta$ y constante de tiempo T

La homogeneidad se caracteriza por la propiedad de poseer en toda su masa un calor específico uniforme c y por las condiciones de enfriamiento también uniforme a través de toda la superficie. El fenómeno de calentamiento se supone debido a una fuente interna de energía que provoca el desprendimiento simultáneo de calor en toda la masa del cuerpo en cuestión, sin que intervenga

apreciablemente la resistencia térmica entre puntos distintos de la masa, es decir, sin que existan por tal concepto diferencias de temperatura interna.

Las máquinas eléctricas no se hallan exactamente en las condiciones indicadas, pero el estudio de este proceso es aplicable a las mismas en líneas generales, al menos en su aspecto cualitativo y, dentro de ciertos límites, cuantitativamente, a condición de poder establecer los parámetros por vía de ensayos directos más bien que deduciéndolos del cálculo.

Para el cuerpo homogéneo en cuestión, sea

p la potencia térmica total en W generada en su masa (pérdidas por efecto JOULE o por corrientes de FOUCAULT, en los conductores; por histéresis y corrientes de FOUCAULT en las sustancias ferromagnéticas; por efectos dieléctricos en los aislantes, etc.).

La energía desarrollada durante un tiempo elemental dt segundo es, pues,

$$p\ dt \qquad \text{(J)}$$

Esta energía se acumula en parte en la masa elevando su temperatura primitiva en una cuantía $d\theta$ °C y si c es el calor específico en $\frac{\text{J}}{\text{kg}\ ^\circ\text{C}}$ y G el peso del cuerpo en kg, la energía almacenada por este concepto valdrá

$$c\ G\ d\theta \qquad \text{(J)}$$

El incremento de temperatura sobre el medio ambiente provoca al mismo tiempo una disipación de energía térmica por radiación, convección y, circunstancialmente, por conducción a través de la superficie del cuerpo. Sentaremos la hipótesis de que la energía disipada por unidad de superficie y por grado centigrado de diferencia de temperatura θ_Δ (°C), sobre el ambiente, es decir, el coeficiente de refrigeración $K_v \left(\frac{\text{W}}{\text{m}^2\ ^\circ\text{C}}\right)$ es constante e independiente de la temperatura θ. La potencia disipada en cada instante siendo S_v(m²) la superficie de enfriamiento, vendrá dada por

$$K_v\ S_v\ \theta_\Delta \qquad \text{(W)}$$

y la energía así eliminada durante el tiempo elemental antes considerado dt ascenderá a

$$K_v\ S_v\ \theta_\Delta\ dt \qquad \text{(J)}$$

En el intervalo dt se cumplirá, pues, la igualdad:

Energía producida = Energía acumulada + energía disipada

$$p\ dt = c\ G\ d\theta_\Delta + K_v\ S_v\ \theta_\Delta\ dt \qquad [1.11.18\ \text{a}]$$

De esta ecuación térmica, supuestos conocidos $\dot{p}$, c, G, K_v y S_v podemos deducir la expresión $\theta_\Delta = f(t)$ del aumento de temperatura en función del tiempo. Resolviendo la ecuación anterior se llega a la siguiente solución

$$\theta_\Delta = \hat{\theta}_\Delta \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad (^oC) \qquad [1.11.18\ b]$$

en la cual

θ_Δ es el calentamiento (elevación de temperatura sobre el ambiente) en el instante t

$\hat{\theta}_\Delta$ es el calentamiento máximo a que llegará en las condiciones propuestas, dado precisamente por

$$\boxed{\hat{\theta}_\Delta = \frac{\dot{p}}{K_v\, S_v}} \quad (^oC) \qquad [1.11.18\ c]$$

Es a su vez la diferencia de temperatura *estacionaria* que alcanzaría en *estado de régimen*, es decir: aquella para la cual todo el calor producido se cede ya al ambiente sin provocar, por tanto, ulteriores elevaciones de temperatura. Basta, en efecto, considerar que en dicho estado, que equivale a hacer en la ecuación [a] $d\theta = 0$, se tendrá

$$\dot{p}\, dt = K_v\, S_v\, \theta_\Delta\, dt \qquad [1.11.18\ d]$$

de donde

$$\boxed{\theta_\Delta = \frac{\dot{p}}{K_v\, S_v} = \hat{\theta}_\Delta} \quad (^oC) \qquad [1.11.18\ e]$$

Por su parte

$$\boxed{T = \frac{c\, G}{K_v\, S_v}} \quad (s) \qquad [1.11.18\ f]$$

es un parámetro cuya dimensión resulta ser un tiempo [1] y que en virtud de [e] puede también definirse por

$$\boxed{T} = \frac{c\, G\, \hat{\theta}_\Delta}{\dot{p}} = \boxed{\frac{c}{\dot{p}_G}\, \hat{\theta}_\Delta} \quad (s) \qquad [1.11.18\ g]$$

(1) $$T = \frac{c\, G}{K_v\, S_v} = \frac{\left(\frac{J}{kg.\ ^oC}\right)(kg)}{\left(\frac{W}{m^2\ ^oC}\right)(m^2)} = \frac{J}{W} = s$$

siendo

$$\dot{p}_G = \frac{\dot{p}}{G} \quad \left(\frac{W}{kg}\right)$$

la potencia específica de caldeo. T recibe el nombre de «constante de tiempo» y constituye una característica altamente significativa dentro del proceso del calentamiento. Es el tiempo que tardaría el cuerpo en alcanzar la temperatura $\hat{\theta}_\Delta$, o sea en llegar a la temperatura de estabilización conforme a las condiciones de calentamiento normal, pero admitiendo, en cambio, que la ventilación fuese nula.

En efecto: haciendo en [a] $K_v = 0$ y $\theta_\Delta = \hat{\theta}_\Delta$,

$$\dot{p}\, dt = c\, G\, d\theta_\Delta;\quad \dot{p}T = c\, G\, \hat{\theta}_\Delta \quad y \quad T = \frac{c\, G\, \hat{\theta}_\Delta}{\dot{p}}$$

La potencia $\dot{p}$ desarrollada se acumularía entonces toda ella en la masa elevando su temperatura hasta $\hat{\theta}_\Delta$ al cabo, precisamente del tiempo T.

La solución [b] de la ecuación [a] se halla como sigue. Separemos los términos diferenciales de t y θ_Δ en uno y otro miembro

$$(\dot{p} - K_v\, S_v\, \theta_\Delta)\, dt = c\, G\, d\theta_\Delta$$

$$dt = \frac{c\, G\, d\theta_\Delta}{\dot{p} - K_v\, S_v\, \theta_\Delta} = \frac{d\theta_\Delta}{\frac{\dot{p}}{c\, G} - \frac{K_v\, S_v}{c\, G}\theta_\Delta}$$

pero, [f] y [g],

$$\frac{K_v\, S_v}{c\, G} = \frac{1}{T};\quad \frac{\dot{p}}{c\, G} = \frac{\hat{\theta}_\Delta}{T}$$

luego,

$$dt = \frac{d\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta - \theta_\Delta} T$$

y

$$t = \int dt = T \int \frac{d\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta - \theta_\Delta} = -\,T \cdot \log_e (\hat{\theta}_\Delta - \theta_\Delta) + C \qquad [1.11.18\ h]$$

la constante de integración C se deduce de las condiciones iniciales de funcionamiento; para $t = 0$ el incremento de temperatura $\theta_\Delta = 0$ de donde

$$0 = -\,T \log_e \hat{\theta}_\Delta + C$$

$$C = T \log_e \hat{\theta}_\Delta$$

Sustituyendo en [h],

$$t = -\,T\, [\log_e (\hat{\theta}_\Delta - \theta_\Delta) - \log_e \hat{\theta}_\Delta] = -\,T \log_e \left(1 - \frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta}\right)$$

$$1 - \frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta} = e^{-\frac{t}{T}}$$

$$\frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \qquad [1.11.18\ i]$$

según habíamos anticipado en [b]

Esta ecuación tiene interesantes propiedades:

1.º Para $t = \infty$, θ_Δ llega a su valor máximo y es precisamente igual a $\hat{\theta}_\Delta$; luego, [e],

$$\hat{\theta}_\Delta = \frac{\hat{p}}{K_v S_v} \qquad (^0C)$$

es el incremento máximo de temperatura que alcanzará el cuerpo homogéneo en estado de régimen, [d], cuando la acumulación de calor en el mismo sea nula y este estado, teóricamente, no se logra más que al cabo de un tiempo infinito.

2.º En su forma [i]

$$\frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \quad \text{o} \quad \boxed{\overset{*}{\theta}_\Delta = 1 - e^{-\overset{*}{t}}} \qquad [1.11.18\ j]$$

siendo

$$\overset{*}{\theta}_\Delta = \frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta} \qquad [1.11.18\ k]$$

el valor relativo del incremento de temperatura instantáneo θ_Δ referido al máximo $\hat{\theta} = \frac{\hat{p}}{K_v S_v}$ y $\overset{*}{t}$ el tiempo relativo

$$\overset{*}{t} = \frac{t}{T} \qquad [1.11.18\ l]$$

que resulta de tomar por unidad la constante de tiempo $T = \frac{c}{\hat{p}_G}\hat{\theta}_\Delta = \frac{c\,G}{K_v\,S_v}$, la ecuación térmica tiene un carácter universal independiente de las condiciones particulares del problema. Podemos, pues, trazar de una vez para siempre la curva $\overset{*}{\theta}_\Delta = 1 - e^{-\overset{*}{t}}$ tal como muestra la figura 1.11.18 a. De esta curva universal se deducen a su vez importantes conclusiones, a saber:

3.º El incremento de temperatura que alcanza el cuerpo al cabo de un tiempo igual a T, es decir, para $t = T$ o $\overset{*}{t} = 1$ es justamente el 63 % de su valor máximo $\hat{\theta}_\Delta$ y al cabo de $t = 3\ T$ o $\overset{*}{t} = 3$ el aumento de temperatura llega al 95 % del calentamiento de régimen citado.

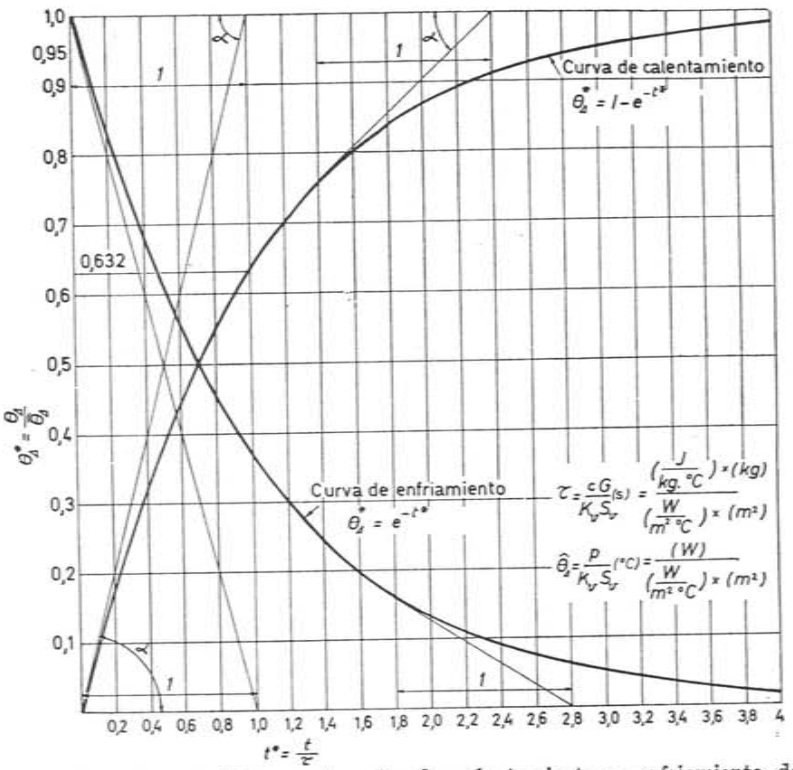


Fig. 1.11.18 a. Características universales de calentamiento y enfriamiento de un cuerpo homogéneo.

En efecto:

para $\overset{*}{t} = 1.$ $\qquad \overset{*}{\theta}_\Delta = 1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2{,}72} = 0{,}632$

para $\overset{*}{t} = 3.$ $\qquad \overset{*}{\theta}_\Delta = 1 - \frac{1}{e^3} = 1 - \frac{1}{20} = 0{,}95$

4.º La constante de tiempo T es precisamente el tiempo que requeriría el cuerpo en cuestión para alcanzar el incremento de temperatura de régimen θ_Δ *al ritmo inicial de calentamiento.*

Derivando respecto a $\overset{*}{t}$ la función [j]

$$\frac{d\,\overset{*}{\theta}_\Delta}{d\,\overset{*}{t}} = e^{-\overset{*}{t}}$$

y para $\overset{*}{t} = 0$, $\frac{d\overset{*}{\theta}}{d\overset{*}{t}} = 1$. Prolongando esta tangente en el origen a la curva es evidente que nos da para $\overset{*}{t} = 1$, $\overset{*}{\theta}_\Delta = 1$, (fig. 1.11.18 a]

5.º Los incrementos de la diferencia de temperatura θ_Δ decrecen linealmente a medida que aumenta la temperatura. De

$$\frac{d\overset{*}{\theta}_\Delta}{d\overset{*}{t}} = e^{-\overset{*}{t}} = 1 - \overset{*}{\theta}_\Delta$$

ecuación lineal que arroja para $\overset{*}{\theta}_\Delta = 0$, $\frac{d\overset{*}{\theta}}{d\overset{*}{t}} = 1$ y para $\overset{*}{\theta}_\Delta = 1$, $\frac{d\overset{*}{\theta}}{d\overset{*}{t}} = 0$.

Dado este carácter de la ecuación anterior, las diferenciales pueden sustituirse con todo rigor por incrementos finitos y escribir

$$\frac{\Delta\overset{*}{\theta}_\Delta}{\Delta\overset{*}{t}} = k\ \frac{\Delta\theta_\Delta}{\Delta t} = 1 - \overset{*}{\theta}_\Delta$$

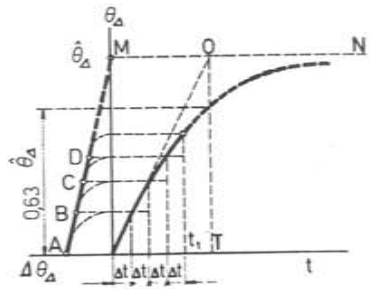


Fig. 1.11.18 b. Determinación del calentamiento de régimen $\hat{\theta}_\Delta$ y de la constante de tiempo T mediante un ensayo parcial.

Este resultado nos permite hallar gráficamente el límite asintótico del calentamiento θ_Δ para cualquier cuerpo, si se han determinado experimentalmente, por ejemplo, los primeros puntos de la curva $\theta_\Delta = f(t)$, sin necesidad de prolongar el ensayo indefinidamente.

Supongamos que se dispone de una parte de dicha curva, fig. 1.11.18 b, entre $t = 0$ y $t = t_1$. Tomando intervalos de tiempo regulares Δt se trasladan sucesivamente sobre el cuadrante de la izquierda los $\Delta\theta_\Delta$ respectivos obteniéndose así correlativamente una serie de puntos alineados A, B, C, D. La recta que los une, prolongada, nos da por su intercesión con el eje de ordenadas la elevación de temperatura de régimen $\hat{\theta}_\Delta$. Prolongando la tangente a la curva, en el punto $t = 0$ nos proporciona también por su intersección con $\hat{\theta}_\Delta$ el valor de T.

Este es el método prescrito por varias Normas nacionales para determinar el calentamiento de las máquinas eléctricas y de los transformadores en la plataforma de ensayos.

NACIONAL

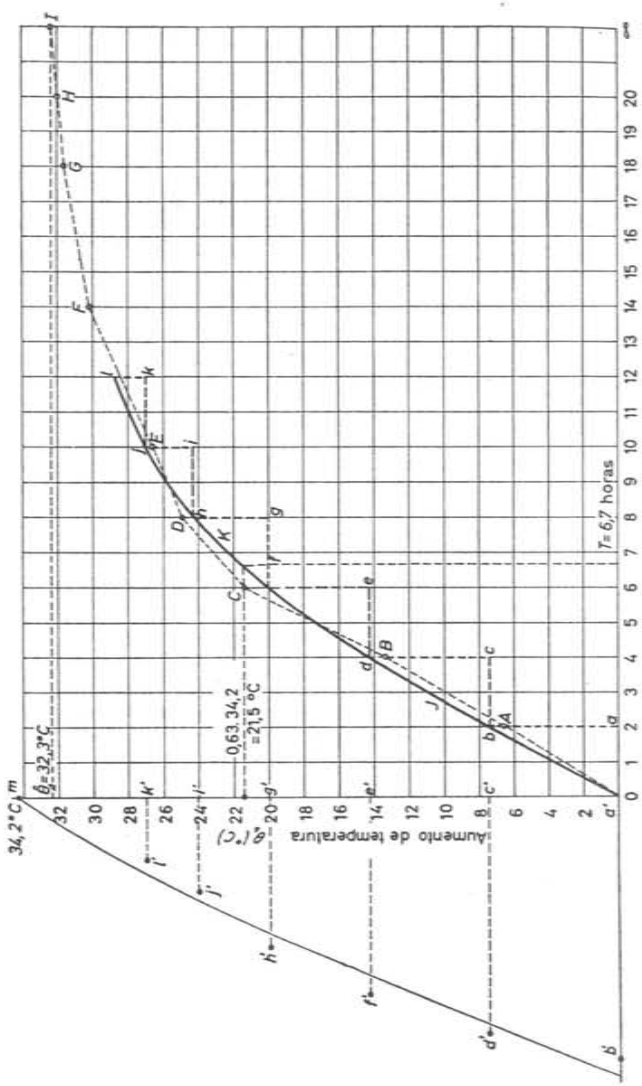


Fig. 1.11.19 a. Curva de calentamiento para el aceite de un transformador de 300 kVA.

I.II.19. Ejemplo

Confrontemos la teoría anterior con los resultados de ensayo sobre el calentamiento del aceite en un transformador americano de 300 kVA para el cual se obtuvieron los siguientes valores [1] (fig. I.II.19 a)

Horas	0	2	4	6	8	10	14	18	20
Elevación de temperatura del aceite sobre el ambiente, en el punto más caliente (°C)	0	6,6	13,3	21,4	26,6	30,2	31,6	32	32,3

Trazar la curva de calentamiento y deducir la elevación de temperatura de régimen $\hat{\theta}_\Delta$ y la constante de tiempo T, según los datos obtenidos en las 12 horas primeras de ensayo, comparándolos con los resultados que se desprenden de la prueba completa.

La línea poligonal de puntos O A B C D E F G H I, a la derecha, señala el curso de la elevación de temperatura del aceite de acuerdo con las pruebas, según la tabla anterior, que conduce a un calentamiento de régimen de 32,3 °C. Interpolando gráficamente entre los puntos O A B C D y E se obtiene la curva continua O J K para el período inicial de 12 horas.

Marcando ahora sobre el eje de abscisas intervalos regulares Δt de 2 horas, dicha curva nos proporciona el escalonado de incrementos sucesivos de temperatura ab, cd, ef, gh, ij, kl. Estos elementos los llevamos en el cuadrante de la izquierda a partir del eje de ordenadas por los puntos correspondientes al comienzo de cada intervalo, aunque a escala doble para hacer la figura menos densa. Así, a'b' = 2ab, c'd' = 2cd..., terminando en el segmento k'l' = 2 kl correspondiente a las 12 horas a las cuales hemos supuesto que pudiera limitarse el ensayo.

Los puntos b' d' f' h' j' l' deberían quedar alineados si las condiciones del aceite correspondieran a las de un cuerpo homogéneo calentando uniformemente en toda su masa. Vemos que no sucede exactamente de este modo lo cual era de esperar. De todas maneras, interpolando entre dichos puntos una línea que no podrá ser exactamente recta nos proporciona en M como calentamiento de régimen 34,2 °C en lugar de los 32,3 medidos experimentalmente.

El 63 % de 34,2 °C es 21,5 °C. Para esta elevación de temperatura la curva continua nos da una constante de tiempo de 6,7 horas, aproximadamente 6 horas y 3/4.

I.II.20. Proceso de enfriamiento de un cuerpo homogéneo

Si alcanzada una cierta elevación de temperatura sobre el ambiente se suprime la aportación térmica y se deja enfriar el cuerpo sometido a un coeficiente de refrigeración constante, $K_v \frac{W}{m^2\,°C}$, la ley que sigue el proceso de enfriamiento pasa a ser

$$\boxed{\theta_\Delta = \hat{\theta}_\Delta\, e^{-\frac{t}{T}}} \quad (°C) \qquad [I.II.20\ a]$$

(1) Blume: Transformer Engineering. John Wiley & Sons Inc. – Nueva York.

θ_Δ = Elevación de temperatura sobre el ambiente al cabo de t segundos de cesar la aportación de calor, en °C

$\hat{\theta}_\Delta$ = Elevación máxima de temperatura a que había llegado el cuerpo en el momento de suprimir dicha aportación, en °C.

$T = \frac{c\,G}{K_v\,S_v}$ = constante de tiempo en s, siendo

c = el calor específico de la sustancia, en $\frac{J}{kg \cdot °C}$

G = el peso de la misma en kg

S_v = la superficie de enfriamiento en m^2 y

K_v = el coeficiente de refrigeración en $\frac{W}{m^2 \cdot °C}$

La ecuación [a] se desprende de la misma anterior, fundamental [I.II.18 a] con sólo hacer p = o. El equilibrio térmico viene expresado entonces, en cada momento por esta igualdad

$$0 = c\,G\,d\theta_\Delta + K_v\,S_v\,\theta_\Delta\,dt,$$

$$\frac{d\theta_\Delta}{\theta_\Delta} = -\frac{K_v\,S_v}{c\,G}\,dt.$$

$$\int \frac{d\theta_\Delta}{\theta_\Delta} = -\frac{K_v\,S_v}{c\,G}\int dt$$

$$\log_e \theta_\Delta = -\frac{K_v\,S_v}{c\,G}\,t + C$$

Teniendo en cuenta que para $t = 0$ es $\theta_\Delta = \hat{\theta}_\Delta$, de donde

$$C = \log_e \hat{\theta}_\Delta$$

y haciendo, como antes

$$\frac{c\,G}{K_v\,S_v} = T$$

podemos escribir

$$\log_e \theta_\Delta = \frac{t}{T} + \log_e \hat{\theta}_\Delta$$

$$\log_e \frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta} = -\frac{t}{T}$$

$$\frac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta} = e^{-\frac{t}{T}}$$

según anunciamos en [a]

La sobretemperatura θ_Δ decrece progresivamente y si la expresamos en valor relativo de la máxima, $\overset{*}{\theta}_\Delta = \dfrac{\theta_\Delta}{\hat{\theta}_\Delta}$, a la vez que hacemos $\dfrac{t}{T} = \overset{*}{t}$, es decir, que tomamos la constante de tiempo por unidad, llegamos a la fórmula universal

$$\boxed{\overset{*}{\theta}_\Delta = e^{-\overset{*}{t}}} \qquad [1.11.20\ b]$$

Para $t = T$ o $\overset{*}{t} = 1$, $\quad \overset{*}{\theta}_\Delta = \dfrac{1}{e} = 0{,}368$ y $\theta_\Delta = 0{,}368\ \hat{\theta}_\Delta$

y la diferencia de temperatura sobre el ambiente habrá caído un 63 %, en cifras redondas, del incremento inicial. Al cabo de un tiempo $t = 3\ T$ el descenso habrá sido de un 95 %, y así sucesivamente.

La característica de este decrecimiento puede verse también en la fig. 1.11.18 a. Ambas curvas, de calentamiento y enfriamiento, son simétricas, y sobre esta última pueden enunciarse una serie de propiedades análogas a las que acompañan a la primera. Así,

1.º El descenso de temperatura sigue una ley asintótica no alcanzándose de nuevo, teóricamente, la temperatura ambiente hasta al cabo de un tiempo t infinito.

2.º La constante de tiempo T es precisamente el intervalo que tardaría en reducirse el calentamiento a cero si el ritmo de enfriamiento inicial se mantuviese invariable.

3.º Los incrementos de temperatura decrecen linealmente en función de la diferencia de temperatura θ_Δ sobre el ambiente. El principio es también aplicable para extrapolar la curva de calentamiento hasta el origen (correspondiente al instante $t = 0$), siempre que se trate de ensayos prácticos, ya que, por regla general, será imposible efectuar la medición en dicho momento preciso (mediante el aumento de resistencia, por ejemplo) y entonces se recurre a obtener una serie de medidas a intervalos sucesivos mientras la temperatura va descendiendo. Este es el método seguido normalmente en las plataformas de ensayos para máquinas eléctricas y transformadores.

1.11.21. Ejemplo

Se trata de determinar el calentamiento alcanzado por el devanado de alta de un transformador en ensayo, de 1000 kVA, 23/5 kV. Las medidas sucesivas del incremento de temperatura sobre el ambiente, realizadas por el método de resistencia, y tomadas en los instantes que se indican a partir del cese de la alimentación de pérdidas, han sido las siguientes:

t (minutos)	5	11	17	23	29
θ_Δ *(alta tensión: °C)*	59,5	51,5	46,5	43	41

Deducir la elevación de temperatura máxima, en el momento de cortar el suministro.

La fig. 1.11.21 a muestra en *A* la curva de enfriamiento para el devanado de alta tensión de acuerdo con la tabla anterior y los decrementos parciales de temperatura a intervalos regulares de 2 minutos. A la izquierda y a escala doble se ha llevado cada

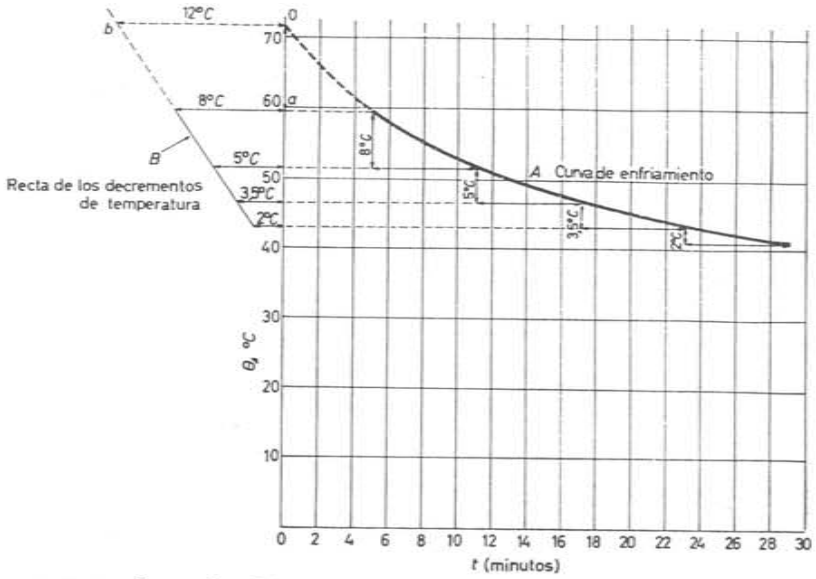


Fig. 1.11.21 a. Curva de enfriamiento para el devanado de A.T. de un transformador en aceite de 1 000 kVA, 23/5 kV.

uno de estos decrementos, a partir de la ordenada correspondiente a la temperatura previa, obteniéndose así la serie de puntos que determinan la recta B, la cual se prolonga como indica el dibujo. Para hallar el origen de la curva A, basta buscar por tanteos un punto o tal que a la escala elegida (doble para el trazado de la recta B) se cumpla oa = ob. Así se deducen para este último decremento, 12 °C y el calentamiento inicial dado por el punto o, 71,5 °C.

No debe sorprender que en este caso la curva A de enfriamiento resulte asintótica a una paralela al eje de abscisas y no al eje mismo por la razón de que el medio de refrigeración para los devanados lo constituye el aceite del transformador en estado caliente.

I.II.22. Transformación anamórfica de la curva de enfriamiento

Volviendo a la ecuación [I.II.20 b]

$$\overset{*}{\theta}_{\Delta} = e^{-\overset{*}{t}}$$

de la cual,

$$\overset{*}{t} = -\log_e \overset{*}{\theta}_{\Delta}$$

se ve que si en lugar de $\overset{*}{\theta}_{\Delta}$ o de θ_{Δ} tomamos su logaritmo, la relación con respecto al tiempo resulta lineal. Bastará, pues, dibujar la función primitiva sobre papel semilogarítmico (escala logarítmica de ordenadas) para que la representación se transforme directamente en una recta de fácil extrapolación. En la práctica, el trazado no resulta absolutamente rectilíneo pero la extrapolación en cualquier caso se hace menos dudosa efectuándola sobre la curva logarítmica. Es el método más usado.

I.II.23. Ejemplo

Resolver el ejemplo anterior I.II.21 en papel semilogarítmico.
La tabla de valores

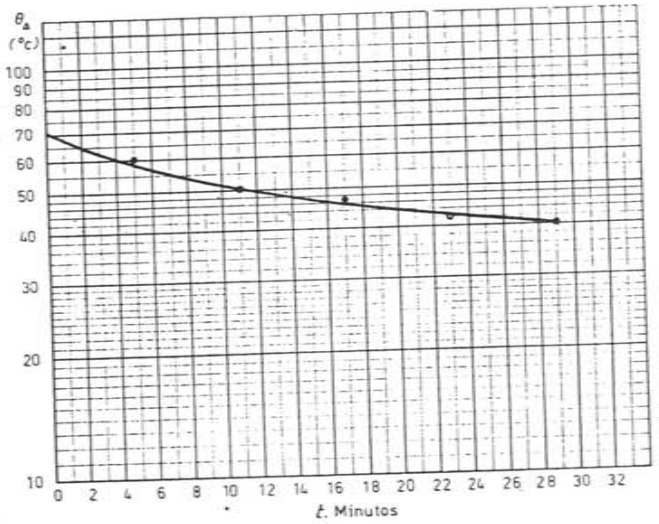


Fig. I.II.23 a. Trazado de la curva de enfriamiento en papel semilogarítmico. Transformador de 1 000 kVA 23/5 kV. Devanado de AT.

t (minutos)	5	11	17	23	29
θ_{Δ} (°C)	59,5	51,5	46,5	43	41

se traduce en el gráfico de la fig. I.II.23 a que proporciona directamente para $t = 0$,

$$\theta_{\Delta} = 71 \text{ °C}$$

I.II.24. Servicio variable. Potencia equivalente

La característica de pérdidas en función del tiempo $p = f(t)$ para una máquina trabajando a régimen de carga constante (Servicio permanente S.P.), es una horizontal fig. I.II.24 a, es decir, las pérdidas permanecen invariables y la máquina llega a adquirir con ello, en todos sus elementos, un calentamiento estable sobre el ambiente o medio refrigerador.

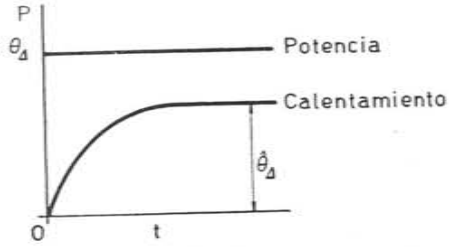


Fig. I.II.24 a. Servicio permanente (SP).

Si la carga es variable lo serán también las pérdidas, y el calentamiento seguirá unas ciertas oscilaciones cuya ley resulta extremadamente difícil de establecer en el caso más general.

Existen determinados regímenes de carga temporal o recurrente que permiten prever hasta cierto punto y, en su caso, medir, a fines de comparación, el calentamiento máximo a que llegarán los elementos activos de la máquina sometida al régimen de carga en cuestión. Hay que tener en cuenta los siguientes principios básicos.

Las pérdidas en los devanados son proporcionales a los cuadrados de las intensidades y, a tensión constante, proporcionales, pues, aproximadamente al cuadrado de la potencia.

Las pérdidas en el hierro vienen a ser proporcionales, a su vez, al cuadrado de las inducciones y, por tanto, a velocidad constante, al cuadrado de las f.e.m. inducidas.

Las pérdidas mecánicas varían con la velocidad; linealmente si se trata de rozamientos entre sólidos (escobillas); según el cuadrado (grosso modo), si el rozamiento es sobre líquidos (cojinetes) y como el cubo de la velocidad si se trata de pérdidas por ventilación (ventiladores).

El calentamiento de cada elemento es proporcional en principio a las pérdidas que aparecen en él e inversamente proporcional al coeficiente de refrigeración que depende, por su parte de varias condiciones entre las cuales la velocidad del medio refrigerante suele ser influyente.

Todo ello, en conjunto, hace sumamente complicado el cálculo del calentamiento de un modo general y aunque puede establecerse una ecuación teóricamente perfecta del calentamiento en cualquier punto o zona de la máquina que interese, esta ecuacion no suele ser de cómoda solución analítica y es mejor recurrir para sustituirla a métodos empíricos sobre los cuales volveremos al estudiar los casos particulares de cada tipo u órgano de máquina.

Por el momento nos limitaremos a definir la «potencia equivalente» a un servicio dado, o «potencia de tipo», como la carga constante que originaría en la máquina *las mismas pérdidas de energía* que aparecen en servicio durante un ciclo o intervalo previamente definido. Estas pérdidas pueden afectar, según interese, al conjunto de la máquina o a un elemento determinado de la misma, al devanado inducido, por ejemplo.

El calentamiento *medio* de la máquina o aparato, trabajando con la potencia equivalente, no se diferenciará mucho del que tomarían en las condiciones reales de servicio, pero el calentamiento instantáneo y, por tanto, el máximo pueden diferir notablemente en uno y en otro caso.

I.II.25. Regímenes variables normalizados. Potencia equivalente de los devanados inducidos

Para unificar los criterios sobre cargas variables se han establecido los siguientes regímenes normales.

a) *Servicio temporal* (S.T.). Generalmente unihorario (de 1 hora de duración); a veces, de 1/2 hora. Durante todo este tiempo la carga de la máquina permanece constante y al terminar el mismo permanece en reposo hasta alcanzar de nuevo la temperatura ambiente, fig. I.II.25 a.

En este caso, la potencia continua equivalente, es la que produciría el mismo calentamiento final a que se llega en régimen temporal. Depende de la constante de tiempo y es tanto menor cuanto mayor T. En los motores de

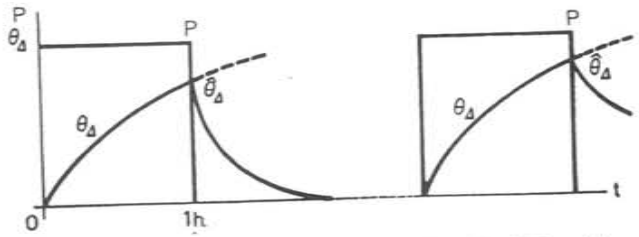


Fig. I.II.25 a. Servicio temporal unihorario (ST. 1 h.).

tracción, que es donde más suele usarse como potencia nominal la potencia unihoraria, la potencia de tipo, que define precisamente el tamaño constructivo de la máquina viene a ser un 75 a 80 % de la nominal unihoraria

b) *Servicio intermitente* (SI), fig. I.II.25 b. La máquina se halla sometida a ciclos de servicio en número indefinido, fijados normalmente en 10 minutos de duración por ciclo; una fracción de este período funciona a plena carga y el resto permanece parada sin tiempo bastante para reducir su tempe-

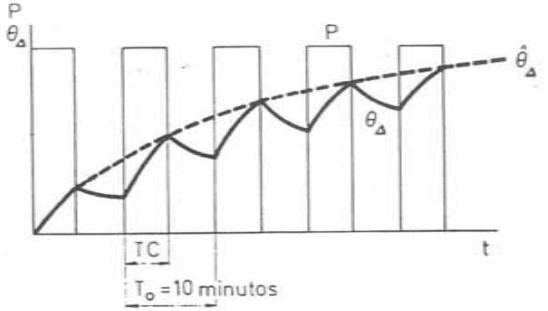


Fig. I.II.25 b. Servicio intermitente (SI).

ratura a la del ambiente. Dicha fracción se suele expresar en % del tiempo del ciclo seguida de la sigla T.C., tiempo de conexión[1]. Por ejemplo: «motor SI de 30 CV, 40 % T.C.».

Es el régimen típico asignado a los motores de grúa y ascensores. Los T.C. más comunes son 15, 25 y 40 % (Plena carga durante 1,5, 2,5 y 4 minutos, respectivamente, cada 10 minutos).

Como guía aproximada del anteproyecto para hallar la potencia de tipo equivalente, basta atenerse a las pérdidas en el devanado inducido, proporcionales al cuadrado de la carga, y entonces se deduce fácilmente, fig. I.II.25 b,

$$P_{eq} = \sqrt{\frac{\text{T.C.}}{T_0}}\, P \qquad [\text{I.II.25 a}]$$

En efecto. Si I es la corriente de carga, I_{eq} la equivalente de iguales pérdidas de energía durante el ciclo, T.C. el tiempo de conexión en minutos y T_0 la duración del ciclo, en la misma unidad de tiempo, tendremos de acuerdo con el significado de I_{eq}

$$k\ I^2 \times \text{T.C.} = k\ I_{eq}^2 \times T_0$$

y con tensión constante

$$k'\ P^2 \times \text{T.C.} = k'\ P_{eq}^2 \times T_0$$

de donde

(1) A veces se encuentra también en nuestra literatura técnica la sigla alemana ED (Einschaltung Dauer: tiempo de conexión).

$$P_{eq} = P\sqrt{\frac{T.C.}{T_0}}$$

Si, por ejemplo, T.C. = 40 % de T_0, $P_{eq} = \sqrt{0{,}4}\ P = 0{,}632\ P$

Como complemento de estas dos clases de servicio no permanentes se establecen también las variantes según las cuales durante el intervalo en que la máquina se halla sin carga, en vez de quedar parada continúe funcionando *en vacío*. El enfriamiento suele ser entonces más rápido. Estos regímenes se denominan respectivamente

c) *Servicio temporal* y *marcha en vacío* (ST-MV): fig. 1..11.25 c,

d) *Servicio intermitente* y *marcha en vacío* (SI-MV): fig 1.11.25 d.

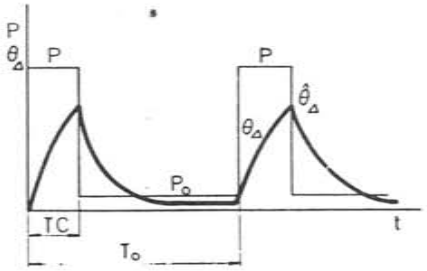


Fig. 1.11.25 c. Servicio temporal y de marcha en vacío (ST-MV).

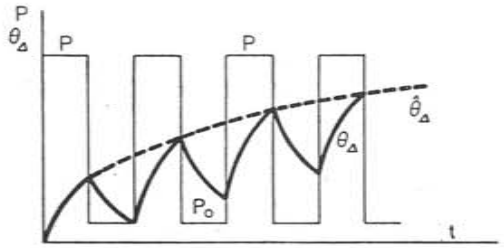


Fig. 1.11.25 d. Servicio intermitente y de marcha en vacío (SI-MV).

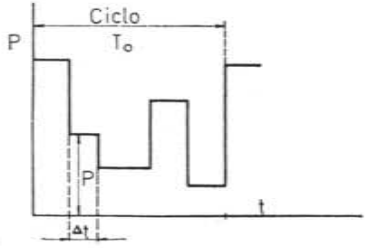


Fig. 1.11.25 e. Servicio cíclico cualquiera $P_{eq} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P^2\ \Delta t}{T_0}}$

De cualquier servicio con carga instantánea P variable cíclicamente puede deducirse una potencia teórica equivalente para el devanado inducido,

$$P_{eq} = \sqrt{\frac{\int_0^{T_0} P^2\ dt}{T_0}} \qquad [1.11.25\ b]$$

y asimilando la curva de carga a una línea escalonada, fig. 1.11.25 e,

$$P_{eq} = \sqrt{\frac{\Sigma\ P^2\ \Delta t}{T_0}} \qquad [1.11.25\ c]$$

De todos modos, estas fórmulas puramente teóricas, no deben tomarse más que con carácter informativo y es imprescindible deducir la verdadera relación de potencias por medio de ensayos sistemáticos para cada tipo de construcción.

1.11.26. Ejemplo

A fin de distinguir bien entre la potencia media de un motor en servicio y su potencia equivalente, o de tipo constructivo, deducida de las pérdidas en los bobinados del inducido, vamos a obtener ambos valores para un motor de ascensor S.I. 25 % T.C.

Trabajando solamente 25 % del tiempo correspondiente a cada ciclo, la *potencia media* desarrollada por el motor es, evidentemente, tan solo igual a 0,25 P, siendo P la potencia que ejerce cuando trabaja. En cambio, la *potencia de tipo* es

$$P_{eq} = \sqrt{0{,}25} \qquad P = 0{,}5\ P$$

justamente el doble de la potencia media. Para el 40 % T.C. la potencia media sería 0,4 P y la equivalente $\sqrt{0{,}4}\ P = 0{,}632\ P$, o sea un 58 % superior y así, siempre mayor que la potencia media aunque la diferencia sea tanto menos notable cuanto más largo el tiempo de conexión. Para 100 % T.C. (servicio permanente) la potencia P de servicio, la media P_m y la equivalente P_{eq} son idénticas.

$$P = P_m = P_{eq}.$$

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

BIBLIOTECA
FACULTAD REGIONAL ROSARIO
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

			Págs.
A	=	Amplitud de la onda polar rectangular	336
A_d	=	Superficie de la curva de inducción para los dientes	112
A_h	=	— del ciclo de histéresis	121
A_n	=	— de la curva de inducción para el núcleo	112
A_p	=	— — — — — — — — los polos	112
A_y	=	— — — — — — — — el yugo	112
A_1	=	Amplitud de la fundamental de una onda rectangular	336
a	=	Fracción de la tensión disruptiva independiente de t y de f	30
a	=	Altura de un prisma aislante	86
a	=	Número de pares de vías de una máquina de continua	137
a	=	Anchura de ranura	149
a	=	Longitud axial de una bobina	213
a	=	Coeficiente del término lineal en las pérdidas por histéresis	418
a	=	Distancia entre caras límites de dos bobinas, primera y segunda	486
a'	=	Anchura de ranura en la base de la cuña	265
a_c	=	Anchura total del cobre en una ranura	247
$a_{c(2)}$	=	— — — — — — — — rotórica	273
$a_{M(1)}$	=	— máxima de ranura estatórica	412
$a_{M(2)}$	=	— — — — rotórica	412
a_m	=	— media	261
$a_{m(1)}$	=	— — de ranura estatórica	412
$a_{m(2)}$	=	— — — — rotórica	412
a_δ	=	— de ranura en el entrehierro	150
$a_{\delta(1)}$	=	— — — estatórica en el entrehierro	255
$a_{\delta(2)}$	=	— — — rotórica en el entrehierro	255
a_ν	=	Amplitud de la función seno del ν^{mo} armónico	315
a_o	=	Anchura de la ranura en el fondo	248
$a_{o(1)}$	=	— — — — estatórica en el fondo	412
$a_{o(2)}$	=	— — — — rotórica en el fondo	412
a_1	=	— — — — trapecial en el plano exterior de los conductores	249
a_1	=	— — — — en el estator	269
$_1a_3\ a_5$	=	Amplitud de la función seno de los armónicos 1.º, 3.º, 5.º	315
$_1''a_3''\ a_5''$	=	Amplitud de la función de los armónicos 1.º, 3.º, 5.º para el segundo peldaño de la onda escalonada	324
a_2	=	Anchura del cuerpo de ranura en el rotor	273

			Págs.
B	=	Inducción	90
B	=	— que aparecería en un entrehierro liso bajo la f.m.m. $\theta_{ib}/\cos\alpha$	389
$\hat{B}$	=	— máxima	99
$\hat{B}_a$	=	— sobre el eje polar, en el aire, alrededor del diente	171
$\hat{B}_c$	=	— máxima en la corona del inducido	180
$\underset{\sim}{\hat{B}_c}$	=	— — — — — con onda senoidal en el entrehierro liso	182
B_{cp}	=	— en la corona polar	192
$\hat{B}_d$	=	— equivalente en los dientes del eje polar	110
$\hat{B}_d$	=	— real equivalente en los dientes del eje polar	171
$\hat{B}'_d$	=	— aparente en los dientes del eje polar	169
$\underset{\Omega}{\hat{B}'_d}$	=	— — — — — — — — — — con la onda de flujo concentrada bajo la expansión polar	170
$\underset{\sim}{\hat{B}'_d}$	=	— aparente en los dientes del eje polar con onda de campo senoidal a igualdad de f.e.m. eficaz	170
$\hat{B}_{dM}$	=	— máxima real en los dientes bajo el eje polar	178
$\hat{B}'_{dM}$	=	— — aparente en los dientes bajo el eje polar	178
$\hat{B}_{dm}$	=	— real a media altura de los dientes bajo el eje polar	178
$\hat{B}'_{dm}$	=	aparente a media altura de los dientes bajo el eje polar	178
$\hat{B}_{do}$	=	— mínima real en los dientes bajo el eje polar	178
$\hat{B}'_{do}$	=	— — aparente en los dientes bajo el eje polar	178
$\hat{B}_k$	=	— correspondiente a la altura total del conductor	442
$\hat{B}_i$	=	— instantánea	104
$\hat{B}_{M(1)}$	=	Inducción máxima real en los dientes del estátor bajo el eje polar	415
$\hat{B}'_{M(1)}$	=	— — aparente en los dientes del estator bajo el eje polar	415
$\hat{B}_{M(2)}$	=	— — real en los dientes del rotor bajo el eje polar	415
$\hat{B}'_{M(2)}$	=	— aparente en los dientes del rotor bajo el eje polar	415
$\hat{B}_{m(1)}$	=	— real a media altura de los dientes del estator bajo el eje polar	415
$\hat{B}'_{m(1)}$	=	— aparente a media altura de los dientes del estátor bajo el eje polar	415
$\hat{B}_{m(2)}$	=	— real a media altura de los dientes del rótor bajo el eje polar	415
$\hat{B}'_{m(2)}$	=	— aparente a media altura de los dientes del rótor bajo el eje polar	415
$\hat{B}_n$	=	— máxima en el núcleo	110
$\hat{B}_{na}$	=	— en el núcleo de los polos auxiliares	360
$\hat{B}_p$	=	— — los polos principales	185
$\underset{\sim}{\hat{B}_p}$	=	— — — — con campo senoidal en el entrehierro a igualdad de f.e.m. eficaz	186
$\hat{B}_t$	=	— — el entrehierro ranurado y con canales de ventilación radial, debida a $\theta_t/\cos\alpha$	389
$\underset{\sim}{\hat{B}_t}$	=	— — — — debida a una onda senoidal que indujera la misma f.e.m. eficaz $U_t/\cos\alpha$ que induce $\hat{B}_t$	389
$\hat{B}_x$	=	— temporal máxima sobre la cota radial x de un conductor en la ranura	442

			Págs.
B_y	=	— en el yugo	110
B_δ	=	— máxima local con entrehierro variable	430
$\bar{B}_\delta$	=	— media en el entrehierro	120
$\hat{B}_\delta$	=	— máxima efectiva en el entrehierro	110
$\underset{\Omega}{\hat{B}_\delta}$	=	Inducción máxima en el entrehierro liso supuesta la onda de campo rectangular limitada al arco de las piezas polares	144
$\underset{\sim}{\hat{B}_\delta}$	=	— — en el entrehierro liso supuesta la onda de campo senoidal, a igualdad de f.e.m. eficaz	145
$B_{\delta a}$	=	— media en el entrehierro de los polos auxiliares	356
$\hat{B}_{\delta I}$	=	— máxima en el entrehierro con distorsión del campo en carga	306
$\hat{B}_{\delta o}$	=	— — — el entrehierro liso con onda de campo senoidal para inducir una f.e.m. eficaz igual a la T.N	390
$\hat{B}_o$	=	Amplitud de la pulsación de la inducción en las superficies polares	428
$\hat{B}_{od(1)}$	=	— — — — — — — — — los dientes del estátor	435
$\hat{B}_{od(2)}$	=	— — — — — — — — — los dientes del rótor	437
$\hat{B}_{ox}$	=	— local de la pulsación de la inducción en el entrehierro de altura variable	429
$\hat{B}_{o(1)}$	=	Inducción real mínima en los dientes del estátor bajo el eje polar	415
$\hat{B}'_{o(1)}$	=	— aparente en los dientes del estátor bajo el eje polar	415
$\hat{B}_{o(2)}$	=	— real en los dientes del rótor bajo el eje polar	415
$\hat{B}'_{o(2)}$	=	— aparente en los dientes del rótor bajo el eje polar	415
$\hat{B}_{o(1)max.}$	=	Amplitud de la pulsación de la inducción para el estátor en el punto de entrehierro mínimo, con campo senoidal, debida a las ranuras del rótor	432
$\hat{B}_{o(1)x}$	=	— local de la pulsación de la inducción en el estátor con campo senoidal, debida a las ranuras del rótor	432
$\hat{B}'_{1/3}$	=	Inducción aparente a 1/3 de la altura del diente bajo el eje polar	179
b	=	Presión barométrica en mm de mercurio	49
b	=	Profundidad de un prisma aislante	86
b	=	Coeficiente del término cuadrático en las pérdidas por histéresis	418
b_c	=	Anchura tangencial neta de conductores en una ranura	451
b_{c1}	=	Altura de un conductor primitivo paralelo a las líneas del campo general de dispersión	473
b_e	=	Arco de escobilla	338
b'_e	=	— — — referido al entrehierro	350
b_{na}	=	Anchura del núcleo de los polos auxiliares	360
b_{np}	=	— — — — — — principales	185
b_p	=	Arco geométrico de la expansión polar	141
b_p	=	— abrazado por todas las espiras de un polo inductor de rótor cilíndrico	141
b_{pa}	=	— polar geométrico de los polos auxiliares	190
b_β	=	— de decalaje de las escobillas	311
b_ν	=	Amplitud de la función cos del ν^{mo} armónico	315
b_1	=	Distancia media circular entre expansiones polares	185
b_1	=	Arco de escobilla sobre la delga de entrada	338
$b_1\ b_3\ b_5$	=	Amplitud de la función cos para los armónicos 1.º, 3.º, 5.º	315
$b_1''\ b_3''\ b_5'''\ldots$	=	Amplitud de la función cos de los armónicos, 1.º, 3.º, 5.º... para el segundo peldaño de la onda escalonada	324

			Págs.
b_2	=	Arco de escobillas sobre la delga de salida	338
b_3	=	Distancia media circular entre núcleos polares	185
C	=	Capacidad electrostática	56
C	=	— combinada de un sistema de dieléctricos	58
C_e	=	Pérdidas totales en las escobillas por A de corriente de línea	494
C_i	=	Capacidad individual de una serie de condensadores	57
C_r	=	Coeficiente absoluto de radiación térmica	527
c	=	Constante de resistencia-temperatura	9
c	=	Calor específico	505
c_a	=	— — del aire	496
c_l	=	Coeficiente de adaptación de la f.m.m. longitud a la excitación principal	334
c_t	=	— de adaptación de la f.m.m. transversal a la excitación principal	334
D	=	Desplazamiento o densidad de carga electrostática	56
D	=	Diámetro del entrehierro	152
D	=	— circunscrito al núcleo de un transformador	277
D_a	=	— medio de los anillos de corto circuito	450
$D'_{b1}\ D''_{b1}\ D'''_{b1}$...	=	Diámetros medios de las bobinas sucesivas concéntricas del devan. (1) con entrecaras muertas	285
$D'_{b2}\ D''_{b2}\ D'''_{b2}$...	=	Diámetros medios de las bobinas sucesivas concéntricas del devanado (2) con entrecaras muertas	285
D_c	=	— máximo de la corona inducida	181
D_{cp}	=	— — — — — polar	181
D_g	=	— del colector	359
D_M	=	— máximo de los dientes	177
$D_{M(1)}$	=	— — — — — del estátor	412
$D_{M(2)}$	=	— — — — — rótor	412
D_m	=	— medio de los dientes	177
D_m	=	— — del devan. central de un transformador biconcéntr.	281
$D_{m(1)}$	=	— — de los dientes del estátor	271
$D_{m(1)}$	=	— — del prim. en un trasnformador acorazado	473
$D_{m(2)}$	=	— — de los dientes del rotor	412
D_{nM}	=	— máximo del núcleo	481
D_{no}	=	— mínimo del núcleo	181
D_p	=	— de las superficies polares	190
D_v	=	— exterior del ventilador	498
D_{yM}	=	— máximo del yugo	181
D_{ym}	=	— medio del yugo	190
D_{yo}	=	— mínimo del yugo	190
D_o	=	— medio de la entrecara activa de un transformador	277
D_o	=	— mínimo de los dientes	177
D_{o1}	=	— medio de la entrecara muerta del devanado (1)	286
$D_{o(1)}$	=	— mínimo de los dientes del estátor	412
$D'_o\ D''_o$	=	— medios de las entrecaras activas interior y exterior de un transformador biconcéntrico	281
$D_{o1}'\ D''_{o1}\ D'''_{o1}$ ...	=	Diámetros medios de las entrecaras muertas del devanado (1)	285
D_{o2}	=	Diámetro medio de la entrecara muerta del devanado (2)	286
$D_{o(2)}$	=	— mínimo de los dientes del rotor	412
$D_{o2}'\ D_{o2}''\ D_{o2}'''$ ...	=	Diámetros medios de las entrecaras muertas del devanado (2)	285
D_1	=	Diámetro del electrodo exterior de un condensador cilíndrico	67
D_1	=	— de la bobina primera de un transformador en zig-zag	289
D_1	=	— medio del primario único	473

			Págs.
$D_1\ D_2$	=	Diámetros medios de las bobinas de un transformador	277
$D_1'\ D_1''$	=	— — — — semibobinas, interior y exterior, de un bobinado biconcéntrico	281
$D_1'\ D_1''$	=	— — — — bobinas sucesivas a partir de la entrecara para el devanado (1) con entrecaras muertas	286
$D_{1/3}$	=	Diámetro a 1/3 de la altura mínima del diente	179
D_2	=	— de la entrecara entre dos semibobinas de un devanado en zig-zag	289
D_2	=	— medio del secundario único	473
$D_2'\ D_2''\ D_2'''$ ...	=	Diámetros medios de las bobinas sucesivas a partir de la entrecara activa para el devanado (2) con entrecaras muertas	286
d	=	Diámetro del electrodo interior de un condensador cilíndrico	67
d	=	— — polígono de f.e.m. por ranura	157
d_c	=	— — cojinete	491
Δd	=	Incremento de diámetro debido al aislamiento	33
E	=	Intensidad de campo electrostático	55
E	=	F.e.m. eficaz	99
E	=	— de una máquina de continua	138
E	=	— por fase de una máquina de alterna	139
E	=	F.e.m. en general	195
E	=	— de una dínamo en carga	367
E	=	— — un motor de continua en carga	368
E	=	— en los circuitos elementales de las c.d.F.	419
E	=	Módulo de elasticidad	506
$\bar{E}$	=	F.e.m. media	102
$\bar{E}$	=	— — por vía de una máquina de continua	138
$\hat{E}$	=	— máxima	113
E_b	=	— por barra de un rótor de jaula	240
E_{cc}	=	— de un alternador en corto circuito	407
E_i	=	Intensidad individual de campo electrostático en una serie de dieléctricos	58
E_{iM}	=	— máxima de campo electrostático en la capa i^{ma}	70
$E_{iM\ admis}$	=	— — admisible de campo electrostático en la capa i^{ma}	70
E_M	=	— — de campo electrostático	66
E_m	=	F.e.m. de inducción mutua sobre las dos semibobinas de una fase en zig-zag	288
E_m	=	Intensidad media de campo electrostático	58
E_x	=	F.e.m. de reactancia por fase	238
E_{xb}	=	— — — — bobina	237
E_{x1}	=	— — a.i. en una de las bobinas de un transformador	278
$E_{x(1)}$	=	— — reactancia por fase estatórica de un motor	272
E_{x2}	=	— — a.i. e inducción mutua en una fase completa de un devanado en zig-zag	289
E_Δ	=	Rigidez dieléctrica de un aislante	27
E_λ	=	— límite no disruptiva	37
E_σ	=	— dieléctrica superficial	51
$E_{\sigma 2}$	=	F.e.m. de a.i. en las dos semibobinas de una fase en zig-zag	288
E_ϕ	=	— en un alternador de polos salientes excluída la componente longitudinal	388
E_0	=	— — vacío	310
E_0	=	— — — con la corriente de excitación de P.C.	385
E_1	=	— eficaz primaria	207
E_1	=	— por fase estatórica de un motor asíncrono en carga	409
E_{10}	=	— — — — — — — — — vacío	409
E_2	=	— eficaz secundaria	207

			Págs.
e	=	Base de los logaritmos neperianos	86
e	=	F.e.m. instantánea	99
e	=	— por ranura	153
e	=	Saliente recto de las bobinas en doble capa	266
e	=	F.e.m. instantáneo de a.i. en la bobina que conmuta	350
e	=	— eficaz de a.i. para la capa del fondo en un conductor	443
$\bar{e}$	=	— media por espira	137
e_c	=	— dinámica en la bobina que conmuta debida al campo principal, con las escobillas decaladas	347
e_r	=	— resultante en el circuito de conmutación	347
e_t	=	— dinámica de la bobina que conmuta, debida al campo transversal	346
e_x	=	— media de a.i. en el circuito de conmutación	344
e_x	=	— eficaz para el plano de cota radial x en un conductor	442
$\mathring{e}_x$	=	— total de reactancia de un transformador referida a la tensión en bornes	344
$\mathring{e}_{xa}$	=	Caída relativa de reactancia con los arrollamientos de un transformador descentrados axialmente	118
$\mathring{e}_{xb}$	=	— relativa de reactancia con los arrollamientos de un transformador centrados axialmente	118
e'_2	=	F.e.m. en una bobina debida al flujo total de dispersión propia y al de otra bobina próxima	223
$\mathring{e}_{x1}$	=	— de reactancia primaria referida a esta tensión en bornes del transformador	294
$\mathring{e}_{x(1)}$	=	— de reactancia estatórica referida a la tensión primaria en bornes de un motor asíncrono	272
$\mathring{e}_{x2}$	=	— de reactancia secundaria referida a esta tensión en bornes del transformador	295
e_1	=	— instantánea primaria	207
e_2	=	— — secundaria	207
Δe_x	=	Diferencia de f.e.m. eficaz de a.i. entre dos planos de un conductor a distinto nivel radial	442
$\mathcal{E}$	=	F.m.m.	89
$\mathcal{E}$	=	— entre expansiones polares	187
$\mathcal{E}_l$	=	— de reacción longitud por polo	312
$\hat{\mathcal{E}}_t$	=	— — — transversal por polo	306
$\mathcal{E}_t$	=	— — — — sobre un extremo del polo	308
$\hat{\mathcal{E}}_t$	=	— máxima sobre una línea local del flujo de dispersión de ranura	441
F_μ	=	Fuerza en un campo magnético	116
$F_{\mu x}$	=	— — — — — según la dirección x	116
f	=	Frecuencia	30
f_a	=	Presión del aire, creada por un ventilador	497
f_e	=	— admisible en las escobillas	23
f_F	=	Factor de aumento de las pérdidas por c.d.F. debido a la concentración autoinductiva del flujo	421
f_h	=	— de aumento de las pérdidas por histéresis debido a la concentración del flujo	421
f_n	=	Frecuencia de la pulsación de ranura	429
$f_{n(2)}$	=	— — — — — flujo debida a las ranuras rotóricas	432
$f_{S\ med}$	=	Relación de las pérdidas específicas medias a las máximas en las superficies polares	430
f_v	=	Presión teórica creada por un ventilador	497

			Págs.
f_ε	=	Fuerza normal por unidad de superficie en un campo electrostático	116
f_μ	=	— — — — — — — — campo magnético	116
f_2	=	Frecuencia de las corrientes rotóricas	273
G	=	Conductancia	4
G	=	Peso de un conductor	17
G	=	— — la chapa magnética	100
G	=	— — un cuerpo	507
G_d	=	— — los dientes	422
G_{Fe}	=	— — la chapa magnética de un transformador	439
G_r	=	Conductancia de radiación térmica	528
G_x	=	Peso parcial de un conductor entre el centro y un plano a la distancia x del mismo	520
G_y	=	Peso del yugo	422
G_λ	=	Conductancia térmica	516
$G_{\lambda i}$	=	— — individual de una serie de materiales	516
g	=	Parámetro para el cálculo de la dispersión en los aros de corto circuito.	261
g	=	Distancia desde el devanado interior de un transformador hasta el núcleo.	486
g	=	Aceleración de la gravedad	499
H	=	Intensidad de campo magnético	90
H	=	Distancia radial entre las caras extremas de los conductores de una ranura	247
$\hat{H}$	=	Intensidad máxima de campo magnético	99
H_c	=	Altura radial de conductores por ranura	247
$\hat{H}_c$	=	Intensidad de campo máxima en la corona del inducido	180
H_{cp}	=	— — — en la corona polar	192
$H_{c(2)}$	=	Altura radial de conductores rotóricos por ranura	273
$\hat{H}_d$	=	Promedio de las intensidades de campo en los dientes bajo el eje polar	177
$\hat{H}_{dM}$	=	Intensidad de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio mínimo	176
$\hat{H}_{dm}$	=	— de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio medio	176
$\hat{H}_{d(1)}$	=	Promedio de las intensidades de campo en los dientes del estátor bajo el eje polar	416
$\hat{H}_{d(2)}$	=	Promedio de las intensidades de campo en los dientes del rótor bajo el eje polar	416
$\hat{H}_{d(0)}$	=	Intensidad de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio máximo	176
H_i	=	Intensidad de campo instantáneo	104
$\hat{H}_{M(1)}$	=	— de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio mínimo para el estátor	415
$\hat{H}_{M(2)}$	=	— de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio mínimo para el rótor	415
$\hat{H}_{m(1)}$	=	— de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio medio para el estátor	415
$\hat{H}_{m'2)}$	=	— de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio medio parael rótor	415
$\hat{H}_n$	=	— máxima de campo en el núcleo	183
H_p	=	— de campo en los polos	184
H_y	=	— — — — el yugo	194
$\bar{H}_\delta$	=	— — — media en el entrehierro	120

			Págs.
$\hat{H}_\delta$	=	— — — máxima en el entrehierro	151
$\hat{H}_{o(1)}$	=	— — — en los dientes bajo el eje polar sobre el radio máximo para el estátor	415
$\hat{H}_{o(2)}$	=	— de campo en los dientes bajo el eje polar sobre el radio máximo para el rótor	415
H_2	=	Distancia radial entre las caras extremas de los conductores de una ranura rotórica	273
h	=	Grosor radial de una bobina	247
h	=	Altura radial por conductor	247
h_a	=	— — de un aro de corto circuito	262
h_c	=	— — — la corona del inducido	180
h_c	=	— conjunta de los dos lados de bobina en una ranura	227
h_c	=	— radial de conductores en la ranura	244
h_{ce}	=	— — — — — — — bobina exterior	250
h_{ci}	=	— — — — — — — — interior	250
h_{cp}	=	— — — la corona polar	193
$h_{c(1)}$	=	— — — conductores en la ranura del estátor	269
h_{crit}	=	— crítica de un conductor para las pérdidas adicionales	463
h_c'	=	— radial de varios conductores en paralelo	460
h_n	=	— — del núcleo	183
h_{np}	=	Altura radial del núcleo polar	185
h_s	=	— de los flancos paralelos de ran. por encima de los conductores	242
h_t	=	— radial de un diente	176
$h_{t(1)}$	=	— — — — — — del estátor	271
$h_{t(2)}$	=	— — — — — — — rótor	412
h_v	=	— de los flancos trapeciales de ranura por encima de los conductores	242
h_y	=	— radial del yugo	194
h_δ	=	— de los flancos paralelos de salida de ranura en el entrehierro	242
$h_{\delta(1)}$	=	— — — — paralelo de salida de ranura estatórica en el entrehierro	169
h_ψ	=	— — — las expansiones polares en sus extremos	189
$h_{\psi eq}$	=	— — equivalente de la expansión polar	189
h_o	=	— — de la expansión polar en el centro	185
h_o	=	Distancia radial entre conductores de las dos capas en una ranura	250
h_1	=	Altura radial de la bobina interior de una ranura	227
h_1	=	— de conductor primario perpendicular a las líneas del campo de dispersión	474
h_2	=	— radial de la bobina interior de un juego de dos bobinas concéntricas	218
h_2	=	— radial de un conductor rotórico	273
h_2	=	— de un conductor secundario perpendicular a las líneas del campo de dispersión	474
I	=	Intensidad de corriente	4
I	=	Corriente de línea	307
I	=	— total en la escobilla	338
I_b	=	— por barra de la jaula rotórica	239
I_{ba}	=	— en la bobina de un polo auxiliar	358
I_{bp}	=	— por bobina polar	402
I_{bs}	=	— — — de excitación serie	371
$I_{b\,sh}$	=	— — — — — shunt	372
I_c	=	— capacitiva en un condesador	83
I_c	=	— por conductor	307
I_c	=	— — vía	338

			Págs.
$\hat{I}_c$	=	Amplitud de la corriente por fase	319
I_{cc}	=	Corriente eficaz de corto circuito	119
$\hat{I}_{cc}$	=	Amplitud de la corriente de corto circuito	119
I_{dc}	=	Corriente en las barras del devanado de compensación	365
I_{eq}	=	— equivalente para el tipo constructivo	545
I_f	=	— por fase	267
I_{f1}	=	— — — de uno de los devanados de un transformador	278
$I_{f(1)}$	=	— — — estatórica	272
I_p	=	— en el p^{mo} estrato de conductores	451
I_r	=	— resultante en cada plano conductor según la cota radial del mismo	443
I_{sh}	=	— de excitación shunt	368
I_u	=	— en la fase u	288
I_v	=	— — — — v	288
I_w	=	— de pérdidas en un condensador	83
I_w	=	— en la fase w	288
$I_{w\mu}$	=	— de pérdida en el hierro, por fase	409
I_z	=	— — los estratos inferiores al p^{mo}	451
I_μ	=	Corriente magnetizante	91
I_μ	=	— — eficaz	99
I_μ	=	— — — por fase de un mot. asíncrono	409
$\hat{I}_\mu$	=	Amplitud de la corriente magnetizante	99
$I_{o\mu}$	=	Corriente magnetizante y de pérdida en el entrehierro por fase, en carga	409
I_1	=	— primaria de un transformador	118
I_1	=	— eficaz en el circuito (1)	207
I_1	=	— estatórica por fase	409
I_2	=	— eficaz en el circuito (2)	207
I_2	=	— por fase de un devanado en zig-zag	289
I'_2	=	— primaria compensadora de la f.m.m. secundaria	207
$I_{\mu 1}$	=	— magnetizante primaria	207
i	=	Indice de orden numérico	57
i	=	Corriente instantánea	200
i	=	— — en la bobina que conmuta	338
i_c	=	— circulatoria elemental	443
i_μ	=	— magnetizante instantánea	99
$i_{\mu 1}$	=	— — primaria	205
$i_{\mu 2}$	=	— — — referida al secundario	205
i_1	=	— instantánea en el circuito (1)	202
i_1	=	— — — la delga de entrada	338
i_2	=	— — — el circuito (2)	202
i_2	=	— — — la delga de salida	338
i_I	=	— — — — fase I	339
i_{II}	=	— — — — — II	339
i_{III}	=	— — — — — III	339
J	=	Energía mecánica	82
J_d	=	— acumulada en el circuito magnético de los dientes	112
J_{Fe}	=	— — — — — — del hierro	112
J_n	=	— — — — — — — núcleo	112
J_p	=	— — — — — — de los polos	112
J_y	=	— — — — — — del yugo	112
J_δ	=	— — — — — — — entrehierro	112
J_ϵ	=	— — — — campo de un dieléctrico	76

			Págs.
J_μ	=	— — — — — magnético	103
J_θ	=	— térmica comunicada a un cuerpo	507
j	=	Juego entre cobres de dos capas en las cabezas de bobina	261
j_h	=	Energía perdida por ciclo de histéresis y unidad de volumen	121
j_μ	=	— magnética acumulada por unidad de volumen	104
K	=	Constante de Fischer-Hinnen	31
K	=	Coeficiente de calentamiento por acumulación térmica	509
K_C	=	— — Carter	150
K_{Ca}	=	— — — para los polos auxiliares	357
$K_{C(1)}$	=	— — — — el estátor	170
$K_{C(2)}$	=	— — — — — rótor	171
K_c	=	— — convección	529
K_{cp}	=	— — corrección axial para la corona polar	193
K_{crit}	=	Relación crítica de pérdidas por concentración de corriente en las máquinas de continua	470
$\underset{\sim}{K}$	=	— de pérdidas por concentración de corriente en las ranuras	447
K_f	=	Factor relativo de forma	141
K_{Fe}	=	— de espacio axial para el inducido de plancha	171
K_L	=	Coeficiente de corrección para la longitud axial del entrehierro	149
K_{La}	=	— — — — — — — de los polos auxiliares	357
$K_{L(1)}$	=	— — — — — — — del estátor	255
$K_{L(2)}$	=	— — — — — — — — rótor	258
K_M	=	Factor relativo de amplitud	144
$\underset{\sim}{K_m}$	=	Relación de pérdida por concentración de corriente para el devanado completo	454
K_p	=	Coeficiente de corrección para la longitud axial de los polos	186
$\underset{\sim}{K_p}$	=	Relación de pérdidas por concentración de corriente para el p^{mo} estrato de conductores en la ranura	453
$\underset{\sim}{K_q}$	=	— de pérdidas por concentración de corriente para la q^{ma} bobina a partir del núcleo	475
K_r	=	Coeficiente práctico de radiación térmica	528
K_t	=	— de aumento de la inducción máxima por efecto de la distorsión en carga	306
K_v	=	— práctico de ventilación	529
K_{vo}	=	— — — — natural	530
$\underset{\sim}{K_y}$	=	Relación de pérdidas por concentración de corriente para el estrato más desfavorable	465
K_1	=	Coeficiente de corrección para la inducción mutua por desfase de corriente	292
$\underset{\sim}{K_1}$	=	Relación de pérdidas por concentración de corriente para el primario de un transformador	474
k	=	Coeficiente para las pérdidas elementales por c.d.F.	419
k	=	— de acumulación térmica	511
$\underset{\sim}{k}$	=	Incremento relativo de pérdidas por concentración de corriente para las ranuras	447
$\underset{\sim}{k'}$	=	— relativo de pérdidas por concentración de corriente a la temperatura θ'	448
k_a	=	Coeficiente de corrección de la permeancia de ranuras por acortamiento del paso para el espacio por encima de los conductores	232
$k_{a(1)}$	=	— de corrección de la permeancia de ranuras por acortamiento del paso, para el espacio por encima de los conductores estatóricos	255
$k_{a(2)}$	=	— de corrección de la permeancia de ranura por acortamiento del paso para el espacio por encima de los conductores rotóricos	274
k_c	=	— de corrección de la permeancia de ranura por acortamiento del paso para el espacio ocupado por los conductores	232
k_c	=	Relación de la f.e.m. resultante en el circuito de conmutación a la caída de tensión en el contacto de la escobilla	348
$k_{c(1)}$	=	Coeficiente de corrección de la permeancia de ranura por acortamiento del paso para el espacio ocupado por los conductores estatóricos	269
$k_{c(2)}$	=	— de corrección de la permeancia de ranura por acortamiento del paso para el espacio ocupado por los conductores rotóricos	274
k_e	=	Relación de la f.e.m. de a.i. a la caída de tensión en el contacto de escobilla	344
k_F	=	Coeficiente de pérdidas por c.d.F. y unidad de peso	122
k_{Fe}	=	Factor de empilado	170
k_f	=	— — forma de la onda de f.e.m.	122
k_h	=	Coeficiente de pérdidas por histéresis y unidad de peso	122
k_i	=	Fracción del número total de espiras del bobinado biconcéntrico correspondiente a la bobina interior	283
$\underset{\sim}{k_m}$	=	Incremento relativo de pérdidas por concentración de corriente en el devanado completo	449
$\underset{\sim}{k'_m}$	=	— adicional relativo de pérdidas por concentración de corriente con los conductores en paralelo	461
$\underset{\sim}{k_p}$	=	— relativo de pérdidas para el p^{mo} estrato de conductores en una ranura	468
$\underset{\sim}{k_q}$	=	— relativo de pérdida para el q^{mo} devanado a partir del núcleo	475
k_R	=	Relación de la resistencia óhmica de la bobina a la de contacto de la escobilla	340
k_s	=	Coeficiente de saturación	141
k_S	=	— — pérdidas adicionales en las superficies polares	429
k_T	=	Factor de corrección de pérdidas adicionales por la forma de onda en las máquinas de continua	468
k_t	=	Parámetro para el cálculo de la inducción real en los dientes	172
k_{tM}	=	— — — — — — — — — el radio máximo de los dientes	178
$k_{tM(1)}$	=	— — — — — — — — — la raíz de los dientes estatóricos	412
$k_{tM(2)}$	=	— — — — — — — — — testa de los dientes rotóricos	412
k_{tm}	=	— — — — — — — — — el radio medio de los dientes	178
$k_{tm(1)}$	=	— — — — — — — — — — — — — — — — estatóricos	412
$k_{tm(2)}$	=	— — — — — — — — — — — — — — — — rotóricos	412
k_{to}	=	— — — — — — — — — — — mínimo de los dientes	178
$k_{to(1)}$	=	— — — — — — — — — — la testa de los dientes estatóricos	412
$k_{to(2)}$	=	— — — — — — — — — — raíz de los dientes rotóricos	412
k_{tr}	=	Incremento relativo de pérdidas por concentración de corriente debido a la componente transversal del flujo de dispersión en los transformadores	488
k_y	=	Factor de corrección por acortamiento del paso para las pérdidas por concentración de corriente	457
k_y	=	Coeficiente de corrección por acortamiento del paso para las pérdidas en las superficies polares en carga	487
k_α	=	— — circulación local para el cálculo de la altura equivalente con barras en paralelo	247
$k_{\alpha(2)}$	=	— — — — — — — — — — de las barras rotóricas en paralelo	273
k_ϵ	=	Indice de pérdidas en un condensador	83

			Págs.
$k_{c\theta}$	=	— — — — — — a la temperatura θ	86
k_{c0}	=	— — — — — — — — — — θ_0	86
k_λ	=	Coeficiente de corrección de la permeancia de ranura por concentración de corriente	247
$k_{\lambda(1)}$	=	— — — — — — — — — — — — — para el estátor	269
$k_{\lambda(2)}$	=	— — — — — — — — — — — — — — — rótor	273
$\underset{\sim}{k_y}$	=	Incremento relativo de pérdidas por concentración de corriente para el estrato más desfavorable	465
k_θ	=	Coeficiente de corrección de la resistividad a $\theta°$ con respecto a la de 75 °C	16
k'_θ	=	— — — — — — — $\theta'°$ con respecto a la de 75 °C	448
k_1	=	— — pérdidas por histéresis con respecto a la superficie del ciclo	121
k_1	=	Fracción del número de espiras para el devanado con entrecaras muertas más próximo a la entrecara activa	286
k_1	=	Coeficiente de proporcionalidad para la f.e.m. máxima según la altura de una barra	442
$\underset{\sim}{k_1}$	=	Incremento relativo de pérdidas por concentración de corriente para el primario de un transformador	478
k_2	=	Coeficiente de pérdidas por histéresis y unidad de volumen	122
k_2	=	Fracción del número de espiras para el devanado con entrecaras muertas más alejado de la entrecara activa	286
k_2	=	Coeficiente de proporcionalidad para la inducción máxima, según la altura de una barra	442
$\underset{\sim}{k_2}$	=	Incremento relativo de pérdidas por concentración de corriente para la capa exterior de una máquina de continua	471
$\underset{\sim}{k_2}$	=	— — — — — — — — — el secundario de un transformador	479
k_3	=	Coeficiente de proporcionalidad para la f.e.m. eficaz de a.i. y el flujo de dispersión según la altura de una barra	442
$k_{1/3}$	=	Parámetro de los dientes para la anchura a 1/3 de la altura	179
$\underset{\sim}{\Delta k_{tr}}$	=	Incremento del aumento relativo de pérdidas por concentración de corriente debido a la componente transversal del flujo de dispersión en los transformadores	487
L	=	Coeficiente de auto inducción	105
L	=	Longitud total geométrica del inducido	144
L	=	— axial por columna de un transformador	277
$L_{(a)}$	=	C.d.a.i. de la semibobina(a) de un devanado en zig-zag	288
$L_{(-c)}$	=	— — — — (-c) de un devanado en zig-zag	288
L_{cb}	=	Longitud de una cabeza de bobina	259
$L_{cb(1)}$	=	— — — — — — estatórica	269
L_{cp}	=	— axial bruta de la corona polar	193
L_{eq}	=	C.d.a.i. equivalente con ondas no senoidales	211
L_{Fe}	=	Longitud axial neta de la plancha magnética	169
L_h	=	— bruta de hierro en la ranura	170
L_i	=	C.d.a.i. instantáneo	106
L_J	=	— energético	107
L_{M2}	=	Inductancia mutua sobre una fase de un devanado en zig-zag referida al n.º total de espiras por fase N_2	291
L_m	=	C.d.a.i. medio	106
L_n	=	Longitud axial magnética de una bobina para el flujo de dispersión	214
L_n	=	— — — para el flujo de dispersión de ranura	244

			Págs.
L_{na}	=	— — — de ranura para el flujo de dispersión en el cuerpo de aquélla	249
L_{na}	=	— — — del núcleo de los polos auxiliares	360
L'_{na}	=	— — — para el flujo de dispersión en la base de la cuña	263
$L_{na\delta}$	=	— — — — — — — — — — salida de ranura	249
L_{na0}	=	— — — — — — — — — el fondo de la ranura	249
L_{na1}	=	— — — — — — — — — — la zona exterior a los conductores de la ranura	249
L_{np}	=	— — del núcleo polar	185
L_{nr}	=	— — magnética para el flujo de dispersión correspondiente a la luz r de una cuña semicircular	250
$L_{n(1)}$	=	— — — — — — — — — de ranura del estator	269
L_p	=	— — — de la expansión polar	185
L_{pa}	=	— — — — los polos auxiliares en el entrehierro	356
L_{tr}	=	— — del circuito magnético computable para la componente transversal del flujo dispersivo	486
L_z	=	Inductancia combinada de a.i. e inducción mutua	223
L_z	=	— de la bobina en conmutación	344
L_z	=	— por fase	238
L_{za}	=	— de dispersión con los arrollamientos descentrados axialmente	118
L_{zb}	=	— — — — — — centrados axialmente	118
L_{zb}	=	— — — por bobina	237
L_{z1}	=	— combinada de a.i. e inducción mutua para la bobina (1)	223
L_{z1}	=	— de dispersión de uno de los arrollamientos de un transformador	278
$L_{z(1)}$	=	— — — por fase estatórica	272
L_{z2}	=	— combinada de a.i. e inducción mutua para la bobina (2)	225
L_{z2}	=	— — — — — — — — por fase de un devanado en zig-zag referente al número total de espiras N_2	291
L_y	=	Longitud axial neta del yugo	190
L_δ	=	— magnética del entrehierro	149
$L_{\delta a}$	=	— — — — para los polos auxiliares	357
$L_{\sigma 1}$	=	C.d.a.i. debido al flujo de dispersión $\phi_{\sigma 1}$	204
$L_{\sigma 1}$	=	Inductancia propia autoinductiva	223
$L_{\sigma 2}$	=	C.d.a.i. debido al flujo de dispersión $\phi_{\sigma 2}$	204
$L_{\sigma 2}$	=	— por fase de un secundario en zig-zag referido al número total de espiras N_2	290
$L_{\mu 1}$	=	— primario debido al flujo común ϕ_μ	206
$L_{\mu 2}$	=	— secundario debido al flujo común ϕ_μ	206
L_1	=	Longitud equivalente del circuito magnético de dispersión primario	473
L_2	=	— — — — — — — secundario	479
${}_1L_1$	=	C.d.a.i. del circuito (1) debido al flujo propio ${}_1\phi_1$	204
${}_1L_2$	=	— — — (1) debido al flujo que va de (1) a (2), ${}_1\phi_2$	204
${}_2L_2$	=	— — — (2) debido al flujo propio ${}_2\phi_2$	204
${}_2L_1$	=	— — — '2) debido al flujo que va de (2) a (1) ${}_2\phi_1$	204
l	=	Longitud de un conductor	5
l	=	— — — circuito magnético	90
l_a	=	— axial de un aro de corto circuito	262
l_b	=	— geométrica de una barra de la jaula	450
l_c	=	— de la línea media de inducción en la corona del inducido, por polo	180
l_c	=	— de un cojinete	491
l_{cp}	=	— — la línea media de inducción en la corona polar	181

			Págs.
l_{c1}	=	— neta de conductores primarios paralelos al flujo de dispersión	473
l_{c2}	=	— — — — secundarios paralelos al flujo de dispersión	479
l_m	=	Desarrollo medio de un tubo de inducción	213
l_m	=	Longitud media por conductor	247
l_m	=	Espira media del devanado central en un transformador biconcéntrico	281
l_{mp}	=	Espira media de los polos principales	402
l_{ms}	=	— — — las bobinas de excitación serie	378
$l_{m\,sh}$	=	— — — — — — — — shunt	372
l_{mo}	=	Desarrollo medio de la entrecara activa de un transformador	276
$l'_{mo}\,l''_{mo}$	=	Desarrollos medios de las entrecaras activas interior y exterior de un transformador biconcéntrico	280
l_{mo1}	=	Desarrollo de la entrecara muerta en el devanado (1) de un transformador con división desigual del número de espiras	285
$l'_{mo1}\,l''_{mo1}\,l'''_{mo1}\ldots$	=	Desarrollos de las entrecaras muertas del devanado (1) de un transformador	284
l_{mo2}	=	Desarrollo de la entrecara muerta en el devanado (2) de un transformador con división desigual del número de espiras	285
$l'_{mo2}\,l''_{mo2}\,l'''_{mo2}\ldots$	=	— — las entrecaras muertas del devanado (2) de un transformador	284
l_{m1}	=	Espira media del devanado (1) de un transformador	276
$l'_{m1}\,l''_{m1}$	=	— — de las semibobinas interior y exterior de un devanado biconcéntrico	280
$l'_{m1}\,l''_{m1}\,l'''_{m1}\ldots$	=	Espiras medias sucesivas del devanado (1) de un transformador	284
l_{m2}	=	Espira media del devanado (2) de un transformador	276
l_{m2}	=	Desarrollo de la entrecara entre las dos semibobinas de un devanado en zig-zag	288
$l'_{m2}\,l''_{m2}$	=	Espiras medias ficticias del devanado central de un transformador biconcéntrico	282
$l'_{m2}\,l''_{m2}\,l'''_{m2}\ldots$	=	— — sucesivas del devanado (2) de un transformador	284
l_n	=	Longitud de la línea media de inducción en el núcleo, por polo	181
l_p	=	— radial de un polo	181
l_v	=	— axial de un ventilador	498
l_y	=	— de la línea media de inducción en el yugo, por polo	181
l_1	=	— axial del devanado primario	118
$l_1\,l_2$	=	— de los devanados de un transformador paralelamente al flujo de dispersión	277
l_2	=	— axial del devanado secundario	479
ΔL	=	Variación de la inductancia según la dirección x	117
Δl	=	Incremento de la longitud por dilatación térmica	504
Δl_b	=	— equivalente de longitud para las barras de una jaula debido a los anillos de corto circuito	449
M	=	C.d.i.m.	204
M	=	Número de entrecaras por columna de un transformador de bobinas alternadas	278
M'	=	C.d.i.m. referido a la bobina (1)	215
M_a	=	Masa de aire impulsada	496
$M_{(-a)(a)}$	=	C.d.i.m. entre las bobinas $(-a)$ y $(+a)$ de un devanado en zig-zag	288
$M_{(c)(-c)}$	=	— — — — $(+c)$ y $(-c)$ de un devanado en zig-zag	288
${}_1M_2$	=	— del circuito (1) sobre el (2)	204
${}_2M_1$	=	— — — (2) sobre el (1)	204

			Págs.
m	=	Número de fase	139
m_1	=	— — — del estátor	261
N	=	Número de espiras	90
N	=	— — r/m	138
N	=	Velocidad síncrona	269
N_a	=	Número de espiras por vía	137
N_B	=	— — — — sección de un devanado de continua	350
N_b	=	— — — de las bobinas de una ranura	214
N_b	=	— — — por bobina	237
N_{ba}	=	— — — de un polo auxiliar	352
N_{bp}	=	— — — — — — principal	402
N_{bs}	=	— — — — una bobina de excitación serie	371
$N_{b\,sh}$	=	— — — — — — — — — shunt	372
N_{b1}	=	— — — por bobina del devanado (1) de un transformador con bobinas alternadas	278
N_{b2}	=	— — — — — — devanado (2) de un transformador con bobinas alternadas	278
N_f	=	— — — — fase	139
N_o	=	— — — idéntico por capa de una ranura	229
N_1	=	— — — de la bobina (1)	202
N_1	=	— — — del devanado (1) de un transformador	277
N_2	=	— — — — devanado (2) de un transformador	202
N_2	=	— — — por fase de un devanado en zig-zag	289
n	=	Exponente de la frecuencia en la fórmula de Montsinger	30
n	=	Número total de ranuras del inducido	152
n	=	— variable de espiras	212
n_b	=	— de ranuras bobinadas por polo	156
n_c	=	— — canales de ventilación radial	148
$n_{c(1)}$	=	— — — — — — del estátor	149
$n_{c(2)}$	=	— — — — — — — rótor	149
n_p	=	— — ranuras por polo	156
$n_{p(1)}$	=	— variable de ranuras por polo del estátor	269
$n_{p(2)}$	=	— — — — — — — — rótor	274
n_{pf}	=	— — — — — — — y fase	154
$n_{p(1)}$	=	— — — — — — — — — del estátor	
n_1	=	— — — espiras sobre la bobina (1)	218
n_1	=	— — — ranuras del estátor	269
n_2	=	— — — espiras sobre la bobina (2)	218
n_2	=	— — — — del rótor	261
$(NI)_\delta$	=	Av. para el entrehierro (valor medio)	120
P	=	Potencia	21
P	=	— útil de un motor	269
P	=	— — en general	491
P	=	— variable	546
P_c	=	— condensiva	84
P_{eq}	=	— constante equivalente con carga variable	545
P_g	=	— aparente del q^{mo} devanado a partir del núcleo	475
P_w	=	— activa	84
P_μ	=	— magnetizante	99
P_o	=	— de marcha en vacío	546
P_μ	=	— de excitación	6

			Págs.
p	=	Número de pares de polos de una máquina	137
p	=	Pérdida en un circuito elemental de c.d.F.	419
p	=	Orden de un estrato de conductores en la ranura	445
p	=	Potencia térmica disipada superficialmente	529
p	=	— — total desarrollada en la masa de una sustancia	531
p_a	=	— eliminada por el aire de ventilador	496
p_{ac}	=	— para acelerar el aire de ventilador	497
$p_{b\,sh}$	=	Pérdida por bobina shunt	373
p_c	=	— disipada por convección	529
$p^*_{cj\mu}$	=	— en los cojinetes referida a la potencia en bornes	493
$p_{do(1)\,med}$	=	— específicas medias por ondulación del flujo en los dientes del estátor	435
$p_{do(2)\,med}$	=	— — — — — — — — — — — rótor	436
p_e	=	— totales en las escobillas	494
p_{eJ}	=	— por efecto JOULE en los contactos de las escobillas	25
p^*_{eJ}	=	— relativas por efecto JOULE en los contactos de las escobillas	25
$p_{e\mu}$	=	— por rozamiento en las escobillas	493
p_F	=	— total por c.d.F.	124
p_{Fe}	=	— totales en el hierro	423
p_{Fed}	=	— — — los dientes	423
p_{Fey}	=	— — — el yugo	423
p_f	=	— específicas por c.d.F.	122
p_{fd}	=	— — — — en los dientes	423
p_{fy}	=	— — — — — el yugo	423
p_{Fe}	=	— — en el hierro	126
$p_{Fe\,d}$	=	— — — los dientes	423
$p_{Fe\,y}$	=	— — — el yugo	423
p_G	=	Potencia específica de caldeo	533
p_h	=	Pérdida específica por histéresis	121
p_{hd}	=	— — — — en los dientes	423
p_{hy}	=	— — — — — el yugo	423
p_J	=	— por efecto JOULE	17
p_J	=	Potencia térmica por efecto JOULE que fluye a través de una sección transversal de conductor	520
p^*_J	=	Pérdidas relativas por efecto JOULE	21
p'_J	=	— por efecto JOULE a la temperatura θ'	448
$p_{J\theta}$	=	— específicas por efecto JOULE a la temperatura θ	518
p_r	=	Potencia disipada por radiación	527
p_S	=	Pérdidas superficiales en las expansiones polares	429
p_{SI}	=	— — — — — — por efecto de la carga	487
p_s	=	— en la excitación serie	379
p_s	=	— por unidad de superficie en las expansiones polares	429
$p_{s\,max}$	=	— máxima por unidad de superación en las expansiones polares	430
$p_{s\,med}$	=	— medias por unidad de superación en las expansiones polares	430
$p_{s(1)}$	=	— por unidad de superficie en los dientes del estátor	432
$p_{s(1)\,max}$	=	— máxima por unidad de superficie en los dientes del estátor	432
$p_{s(1)\,med}$	=	— medias por unidad de superficie en los dientes del estátor	432
$p_{s(1)\,x}$	=	— locales por unidad de superficie en los dientes del estátor	432
p_t	=	— totales	507
p_v	=	— provocadas por la ventilación	496
p_ϵ	=	— en un condensador	83
$p_{\epsilon x}$	=	— dieléctricas en la capa de abscisa x	86
p_2	=	Potencia térmica transmitida por conducción	515

			Págs.
p_μ	=	— específica magnetizante	100
ΣP_o $>_q$	=	Suma de todas las potencias aparentes de los devanados exteriores al q^{mo} proyectadas sobre el eje de P_q	475
ΣP_j $>_q$	=	— de todas las potencias aparentes de los devanados exteriores al q^{mo} proyectadas sobre el eje perpendicular a P_q	475
Q	=	Carga electrostática	56
Q_a	=	Caudal de aire de ventilación	496
Q_1 Q_2	=	Número de bobinas parciales de los devanados (1) y (2) con entrecaras muertas	285
q	=	Carga lineal específica de un inducido	307
q_{cc}	=	— — — en corto circuito	408
q_μ	=	— — — debida a la corrección magnetizante	331
R	=	Resistencia eléctrica	4
R	=	— del devanado inducido	368
R	=	— de los circuitos elementales de las c.d.F.	419
$\underline{R}$	=	— en corriente continua	447
$\underset{\sim}{R}$	=	— — — alterna	447
R_a	=	— de una aleta del colector	339
R_B	=	— — la bobina que conmuta	340
R_{bs}	=	— por bobina serie	378
$R_{b\,sh}$	=	— — — shunt	372
R_{dc}	=	— del devanado de compensación	368
R_e	=	— de contacto de una escobilla	338
R_{pa}	=	— — los polos auxiliares	368
R_r	=	— — radiación térmica	528
R_s	=	— — excitación serie	368
R_{sh}	=	— — — shunt	381
R_λ	=	— térmica, combinada, de conducción	516
$R_{\lambda a}$	=	— — de conducción de una película de aire	519
$R_{\lambda c}$	=	— — — — — — — cinta de micanita	519
$R_{\lambda i}$	=	— — — — individual	516
R_θ	=	— óhmica a la temperatura $\theta°$	13
R'_θ	=	— — — — — θ'	13
R_o	=	— a la temperatura de O °C	13
R_1	=	— del circuito (1)	203
R_1	=	— por fase estatórica	409
R_2	=	— del circuito (2)	203
R_2	=	— por fase rotórica	273
r	=	Radio en general	66
r	=	— de la cuña de ranura	242
r_i	=	— interior de la i^{ma} capa aislante	69
r_{i+1}	=	— exterior de la i^{ma} capa aislante	70
r_1	=	— del electrodo interior	66
r_1	=	Resistencia de contacto en la delga de entrada	338
r_2	=	Radio del electrodo exterior	66
r_2	=	Resistencia de contacto en la delga de salida	338
$\mathcal{R}$	=	Reluctancia	89
Δr	=	Incremento del radio debido al aislamiento	40
S	=	Superficie de una placa de condensador	56
S	=	Sección de un circuito magnético	90

			Págs.
S_a	=	— — — anillo de corto circuito	450
S_a	=	— normal de salida para el aire de un ventilador	498
S_b	=	— por barra de un rotor de jaula	429
S_c	=	— neta de la corona del inducido	180
S_{cp}	=	— — — — — polar	192
S_e	=	Superficie de contacto de una escobilla	342
S_e	=	— total de escobilla	493
S_n	=	Sección neta del núcleo	183
S_{na}	=	— — — — de un polo auxiliar	360
S_p	=	— — — polo principal	184
S_r	=	Superficie de radiación	527
S_v	=	— — ventilación	529
S_y	=	Sección neta del yugo	194
S_δ	=	Superficie geométrica del entrehierro	120
S_1	=	— de contacto de entrada a la escobilla	341
S_2	=	— — — — salida de la escobilla	341
s	=	Sección del conductor	5
s	=	Anchura de la zona de pulsación en el entrehierro	428
s_a	=	Sección del conductor de las bobinas en los polos auxiliares	358
s_{bp}	=	— — — — — — inductoras	401
s_{bs}	=	— — — — — — serie	372
$s_{b\,sh}$	=	— — — — — — Shunt	
s_{de}	=	— — — del devanado de compensación	365
s_λ	=	— transversal al paso del flujo térmico	515
ΔS	=	Incremento de superficie por dilatación térmica	504
T	=	Temperatura eléctrica absoluta para la resistencia	13
T	=	Duración de un período	136
T	=	Constante térmica de tiempo	530
T_c	=	Duración de la conmutación	338
T_o	=	Temperatura eléctrica absoluta para la resistencia a 0 °C	13
T_o	=	Duración de un ciclo de carga recurrente	545
T_ρ	=	Temperatura eléctrica absoluta para la resistividad	12
$T_{\rho o}$	=	— — — — — — — a 0 °C	12
$T_{\rho\vartheta}$	=	— — — — — — — ϑ °C	12
T_1	=	Duración de un semiperíodo	468
T_1	=	Temperatura inicial absoluta de un conductor	509
T_1	=	— Kelvin del cuerpo radiante	527
T_2	=	— final absoluto de un conductor	509
T_2	=	— Kelvin del medio ambiente	527
T'	=	eléctrica absoluta para la resistencia a ϑ' °C	13
t	=	Tiempo de aplicación del voltaje	30
t	=	— en general	111
t	=	Grosor variable del diente	169
t^*	=	Tiempo tomando por unidad la constante de tiempo	534
t_M	=	Grosor máximo del diente	178
$t_{M(1)}$	=	— — — — en el estátor	412
$t_{M(2)}$	=	— — — — — — rótor	412
t_m	=	— medio del diente	178
$t_{m(1)}$	=	— — — — en el estátor	412
$t_{m(2)}$	=	— — — — — — rótor	412
t_d	=	Tiempo de aplicación del voltaje de prueba	28
$t_{\delta(1)}$	=	Grosor del diente estatórico en el entrehierro	257

			Págs.
$t'_{\delta(1)}$	=	Arco efectivo del diente estatórico para el flujo de dispersión en zig-zag	258
t_o	=	Grosor mínimo del diente	178
$t_{o(1)}$	=	— — — — estatórico	412
$t_{o(2)}$	=	— — — — rotórico	242
$t_1/_3$	=	— — — — a 1/3 de su altura	179
Δt	=	Intervalo de calentamiento	509
U	=	Tensión	4
U	=	— en bornes	367
U	=	— eficaz	99
$\hat{U}$	=	— máxima	103
$U_{b\,sh}$	=	— por bobina shunt	372
U_f	=	— — fase	267
$U_{f(1)}$	=	— — — estatórica	272
U_i	=	— individual	58
U_i	=	Componente de la tensión para vencer la reacción antagónica	388
U_{lim}	=	Tensión límite de descarga térmica	88
U_n	=	— nominal	60
U_t	=	Componente de la tensión para vencer la reacción transversal	388
U_Δ	=	Tensión disruptiva	27
$U_{\Delta tf}$	=	— — en t seg. a la frecuencia f	30
$U_{\Delta o}$	=	— — a 60 Hz y en 1 minuto	30
U_λ	=	— límite no disruptiva	37
U_σ	=	— disruptiva superficial	51
U_π	=	— de prueba	60
U_o	=	— en vacío	195
U_o	=	— — — con la excitación de P.C.	370
U_1	=	— eficaz primaria	207
U_2	=	— — secundaria	207
u	=	— instantánea	99
u	=	Número de secciones por ranura	352
u^*	=	Coeficiente interno de regulación	371
u_c	=	Caída de tensión por carbón	348
u_e	=	— — — — escobilla	23
u_{de}	=	— — — en el devanado de compensación	367
u_I	=	— — — aparente debida a la reacción de inducido	385
u_{pa}	=	— — — en los polos auxiliares	367
u_R	=	— — — por resistencia	21
u_R	=	— — — en la resistencia del devanado inducido	367
u^*_R	=	— — — óhmica relativa	21
u_s	=	— — — en el devanado serie	367
u_1	=	Tensión instantánea en los bornes del circuito (1)	203
u_2	=	— — — — — — circuito (2)	203
ΔU	=	Variación de la tensión de vacío a P. C. con la excitación de P. C.	370
V	=	Volumen de un dieléctrico	79
V	=	— — — circuito magnético	104
V_d	=	— — los dientes bajo la expansión polar	110
V_n	=	— del núcleo	110
V_p	=	— de los polos	110
V_y	=	— del yugo	110
v	=	Velocidad tangencial del inducido	350

			Págs.
v	=	— del medio refrigerante	530
v_a	=	— de salida del aire en un ventilador	496
v_K	=	— periférica del colector	23
v_v	=	— — — ventilador	496
Δ_v	=	Incremento del volumen por dilatación térmica	504
w	=	Distancia desde el centro de los anillos de corto circuito al centro de las cabezas de bobina estatóricos	262
w_{10}	=	Pérdidas específicas en el hierro a 50 Hz. y 10 kG	95
w_{15}	=	— — — — — — — — — 15 kG	96
X	=	Reactancia de dispersión por fase	238
X	=	Semilongitud de una barra	520
X_b	=	Reactancia de dispersión por bobina	237
X_{M2}	=	— — — de inducción mutua por fase de un devanado en zig-zag referida al número total de espiras por fase N_2	291
$X_{\sigma 1}$	=	— — dispersión del devanado (1)	207
$X_{\sigma 2}$	=	— — — — devanado (2)	207
$X_{\sigma 2}$	=	— autoinducción por fase de un devanado en zig-zag referida al número total de espiras por fase N_2	290
X_1	=	— por fase de uno de los bobinados de un transformador	278
X_1	=	— — — estatórica	272
X_1	=	— combinada de a.i. e i.m. por fase de un devanado en zig-zag referida al número de espiras N_2	291
x	=	Relación entre la permeancia de un medio y la del vacío	90
x	=	— del número de ranuras bobinadas, al total de ranuras	156
x	=	Anchura variable de una ranura por encima de los conductores	232
x	=	— periférica variable para el flujo de dispersión en zig-zag	257
x	=	Altura del plano local dentro de una barra	441
x	=	Estratos de conductores inferiores al de orden p^{mo} en la ranura	445
x	=	Fracción del bobinado sometida a la componente transversal del flujo de dispersión	486
x	=	Distancia axial hasta el centro de una barra	520
x_o	=	Cota radial de mínima densidad de corriente en un conductor	443
y	=	Altura variable por encima de los conductores en la ranura	242
y	=	Estratos superiores al de orden p^{mo}	445
y	=	Anchura periférica variable para el flujo de dispersión en zig-zag	257
y^*	=	Paso de bobina referido al paso polar	165
y_n	=	— — — medido en ranuras	139
$y_{n(1)}$	=	— — — en el estátor	271
Z	=	Número total de conductores del inducido	137
Z_a	=	Desarrollo tangencial de la zona de conmutación	358
Z_n	=	Número de conductores por ranura	160
$Z_{n(1)}$	=	— — — — — estatórica	272
Z_s	=	Impedancia síncrona	387
Z_1	=	Número total de conductores del estátor	411
z_{dc}	=	— — — barras por polo del devanado de compensación	365

ESCUELA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

			Págs.
α	=	Parámetro de variación de la constante dieléctrica	86
α	=	Angulo magnético de acortamiento del paso de bobina	163
α	=	— geométrico variable en el espacio de la cuña circular	242
α	=	Parámetro para el cálculo de la «altura equivalente»	247
α	=	Angulo de progresión de la fundamental rotatoria	319
α	=	Desfase entre la f.e.m. del campo principal y la corriente de carga	333
α	=	Angulo característico de la densidad de corriente en la superficie de entrada a la escobilla	342
α	=	Desfase entre la f.e.m. en vacío, con la corriente de excitación de P.C., y la corriente de carga	385
α	=	Factor activo sobre la concentración del flujo por efecto autoinductivo	420
α	=	Factor activo sobre la concentración de corriente por efecto autoinductivo	447
α'	=	— activo sobre la concentración de corriente para conductores en paralelo	461
α_{be}	=	Número de vías en paralelo del devanado de excitación serie	371
$\alpha_{b\,sh}$	=	— — — — — — — — — shunt	381
α_E	=	Desfase entre la f.e.m. en carga y la corriente de carga	385
α_{tr}	=	Factor activo sobre la concentración de corriente para la componente transversal de flujo de dispersión	486
α_0	=	Coeficiente de temperatura para la resistencia con temperatura inicial de 0°C	13
α_0	=	Angulo límite en el espacio de la cuña circular	243
α_0	=	Constante térmica de integración	511
α_1	=	Coeficiente de reducción para la dispersión de la bobina (1) más alejada de la entrecara activa	286
α_1	=	Factor activo sobre la concentración de corriente para los conductores del primario	473
α_2	=	Coeficiente de reducción para la dispersión de la bobina (2) más próxima a la entrecara activa	286
α_2	=	Factor activo sobre la concentración de corriente para los conductores del secundario	479
β	=	Parámetro de variación del índice de pérdidas dieléctricas	86
β	=	Angulo magnético de decalaje de las escobillas	311
β	=	— característico de la densidad de corriente en la sección de salida de la escobilla	342

			Págs.
β	=	Relación entre la amplitud de la pulsación en las superficies polares y la inducción máxima frente a los dientes	428
β	=	Coeficiente de dilatación térmica	504
β_{max}	=	Relación entre la amplitud de la pulsación en la superficie polar y la inducción máxima frente a los dientes de entrehierro mínimo	430
β_p	=	Arco polar magnético de los polos principales	144
β_{pa}	=	— — — — — — auxiliares	359
$\beta_{t(1)}$	=	Amplitud relativa de la ondulación en los dientes del rótor referente a la inducción máxima en el entrehierro	437
$\beta_{t(2)}$	=	— relativa de la ondulación en los dientes del estátor referida a la inducción máxima en el entrehierro	435
β_ν'	=	Desfase entre las funciones sen y cos de las componentes armónicas para el primer peldaño de la onda escalonada	324
β_0	=	Coeficiente de dilatación térmica del cobre a partir de 0 °C	13
β_1	=	— — reducción para la dispersión de la bobina (1) más alejada de la entrecara activa	286
$\beta_1\ \beta_3\ \beta_5$	=	Desfase entre las funciones de las componentes armónicas	315
$\beta_1''\ \beta_3''\ \beta_5''$	=	— entre las funciones de las componentes armónicas para el segundo peldaño de la onda escalonada	324
β_2	=	Coeficiente de reducción para la dispersión de la bobina (2) más próxima a la entrecara activa	286
β_2	=	Amplitud relativa de la pulsación debida a las ranuras rotóricas para el punto de máxima inducción en el entrehierro	438
$\beta_{2(x)}$	=	— local relativa de la pulsación debida a las ranuras rotóricas	332
γ	=	Peso específico del Cu	17
γ	=	— — de la chapa magnética	101
γ	=	Angulo magnético entre ranuras	154
γ	=	Relación de la anchura de la zona pulsante en el entrehierro al paso de ranura	428
γ	=	Angulo de desfase entre la corriente I_p de la capa p^{ma} y la corriente I_z de las capas inferiores	456
γ	=	Peso específico	505
$\mathring{\gamma}$	=	Densidad relativa del aire referida a 20 °C y 760 mm	49
γ_a	=	Peso por unidad de volumen del aire	496
γ_{Fe}	=	— específico de la chapa magnética	422
γ_ν	=	Desfase del ν^{mo} armónico	318
γ_1	=	Factor de contracción para la pulsación del estátor debida a los dientes del rótor	436
γ_2	=	— de contracción para la pulsación del rótor debida a los dientes del estátor	435
Δ	=	Densidad de corriente	17
$\hat{\Delta}$	=	— máxima de corriente instantánea uniforme en una barra	442
Δ_a	=	— de corriente en las bobinas de los polos auxiliares	358
Δ_{bs}	=	— — — — — — serie	372
Δ_{bsh}	=	— — — — — — shunt	373
Δ_{dc}	=	— — — — — las barras del devanado de compensación	365
Δ_e	=	— — — — la superficie de las escobillas	23
Δ_e	=	— — — — el bobinado exterior de un devanado biconcéntrico	284
Δ_i	=	— — — — — bobinado interior de un devanado biconcéntrico	284

			Págs.
Δ_r	=	— — — eficaz resultante en cada plano radial de conductor	443
Δ_o	=	— lineal de corriente en las escobillas	342
Δ_1	=	— de corriente en la sección de entrada a las escobillas	342
Δ_2	=	— — — — — — — — salida de las escobillas	342
δ	=	Angulo de pérdidas de un condensador	83
δ	=	Entrehierro	113
δ_a	=	— de los polos auxiliares	357
δ_{b1}	=	Grosor de la bobina (1) de un transformador con entrecaras muertas	285
δ_{b2}	=	Grosor de la bobina (2) de un transformador con entrecaras muertas	285
δ_{c1}	=	Grosor de conductores del bobinado (1) perpendicularmente al flujo de dispersión, por entrecara	473
δ_{c2}	=	— de conductores del bobinado (2) perpendicularmente al flujo de dispersión por entrecara	479
δ_{e1}	=	— del bobinado (1), perpendicular al flujo de dispersión, por entrecara	473
δ_{e2}	=	— del bobinado (2), perpendicular al flujo de dispersión, por entrecara	479
δ_m	=	Entrehierro medio	266
δ_{min}	=	— mínimo	430
δ_x	=	— variable	334
δ_o	=	Grosor de la entrecara activa de un transformador	272
δ_o'	=	— — — — entre las dos semibobinas de un devanado en zig-zag	289
$\delta_1'\ \delta_1''$	=	— de las bobinas exterior e interior de un devanado biconcéntrico	283
$\delta_1'\ \delta_1''$	=	— de las bobinas del devanado (1) con entrecaras muertas, sucesivamente a partir de la entrecara activa	286
$\delta_1\ \delta_2$	=	— de las bobinas de un transformador perpendicular al flujo de dispersión	277
δ_2	=	— total de las dos semibobinas de un devanado en zig-zag	289
$\delta_2'\ \delta_2''$	=	Grosores ideales del devanado central de un transformador biconcéntrico, proporcionales a las espiras de las semibobinas enfrentadas	283
$\delta_2'\ \delta_2''$	=	Grosor de las bobinas del devanado (2) con entrecaras muertas, sucesivamente a partir de la entrecara activa	286
ε	=	Constante dieléctrica relativa	55
ε	=	Contracción elástica	506
ε_c	=	Anchura de un canal de ventilación radial	148
$\varepsilon_{c(1)}$	=	— — — — — — —, estatórico	412
$\varepsilon_{c(2)}$	=	— — — — — — —, rotórico	412
ε_i	=	Constantes dieléctricas individuales de una serie de aislantes	57
$\hat{\varepsilon}_K$	=	Tensión máxima por delga	306
ε_{Km}	=	— media por delga	306
ε_n	=	Anchura perdida por canal de ventilación, para el flujo de dispersión	245
ε_{na}	=	— — — — — — frente al cuerpo de ranura	249
ε_{na}	=	— — — — — — — a la base de la cuña	265
$\varepsilon_{na\delta}$	=	— — — — — — en los bordes de salida de la ranura	249
ε_δ	=	— — — — — — para el flujo principal	148
$\varepsilon_{\delta(1)}$	=	— — — — — — — — — — en el estátor	149
$\varepsilon_{\delta(2)}$	=	— — — — — — — — — — en el rótor	149
$\varepsilon_{\delta a}$	=	— — — — — — — — de los polos auxiliares	357
ε_0	=	Constante dieléctrica absoluta	56
ε_0	=	— — relativa a la temperatura θ_o	86
ε_0	=	Anchura del corte entre las ranuras de un motor de doble jaula	243
ε_1	=	El menor ángulo entre los de dos vectores componentes y la resultante	292

			Págs.
ζ	=	Altura equivalente de un conductor simple	247
ζ	=	Coeficiente de Pichelmacher	351
ζ	=	Parámetro debido a la concentración autoinductiva del flujo	420
ζ	=	Factor de pérdidas en las superficies polares debidas a corrientes de carga	487
ζ'	=	«Altura equivalente» para conductores en paralelo	461
ζ_{crit}	=	— — crítica	463
ζ_q	=	— — para el q^{mo} devanado a contar desde el núcleo	475
ζ_{tr}	=	— — para la componente transversal del flujo de dispersión	486
ζ_1	=	— — para los conductores primarios	473
ζ_2	=	— — — — — secundarios	449
ζ_r	=	— — — la barra rotórica	274
ζ_{10}	=	— — con el 10 % de pérdidas adicionales	464
η	=	Rendimiento global	269
η_f	=	— de presión del ventilador	497
η_m	=	— mecánico	269
η_v	=	— en potencia de un ventilador	498
θ	=	Temperatura centigrada	9
θ	=	— inicial	10
θ	=	— de salida del aire del ventilador	499
θ	=	F.m.m. según el desarrollo de Fourier	315
$\hat{\theta}$	=	Amplitud de la f.m.m. de reacción	334
θ'	=	Temperatura final	10
θ_A	=	en el extremo axial de una barra	519
θ_a	=	— ambiente	88
θ_B	=	— — en el centro longitudinal de una barra	519
θ_{ba}	=	Excitación por polo auxiliar	358
θ_{bp}	=	— — — en carga	369
θ_{bs}	=	— serie por polo	370
$\theta_{b\,sh}$	=	— shunt por polo	369
θ_{bo}	=	para vencer la reluctancia por polo del circuito magnético en vacío	197
$\hat{\theta}_c$	=	para la corona del inducido, por polo	176
θ_{cc}	=	— de corto circuito con la corriente de P.C.	408
$\hat{\theta}_{cp}$	=	— para la corona polar, por polo	188
$\hat{\theta}_d$	=	— — los dientes, por polo	176
$\hat{\theta}_{d(1)}$	=	— — — — del estátor por polo	142
$\hat{\theta}_{d(2)}$	=	— — — — — rótor, por polo	142
θ_E	=	— — la f.e.m. en carga	385
θ_{E+1}	=	— — — — — — incluido el efecto de la reacción transversal	388
$\hat{\theta}_l$	=	Amplitud de la componente de reacción longitudinal	333
θ_{lb}	=	Excitación necesaria para compensar la reacción longitudinal	312
θ_{lM}	=	— máxima posible para compensar la reacción longitudinal	312
$\hat{\theta}_n$	=	— para el núcleo inducido por polo	183
$\hat{\theta}_t$	=	Amplitud de la componente de f.m.m. transversal	333
θ_{tb}	=	Excitación necesaria para compensar la reacción transversal	309
θ_U	=	— para inducir la T.N. en vacío	385
θ_x	=	Temperatura de la capa aislante de abscisa x	87
θ_y	=	Excitación para el yugo, por polo	195
θ_Δ	=	Incremento variable de temperatura sobre el ambiente	531

			Págs.
$\hat{\theta}_\Delta$	=	Calentamiento en estado de régimen	530
$\dot{\theta}_\Delta$	=	Incremento variable de temperatura referido al calentamiento de régimen	534
$\hat{\theta}_\delta$	=	Excitación para el entrehierro, por polo	142
$\theta_{\delta a}$	=	Excitación para el entrehierro de los polos auxiliares	357
$\hat{\theta}_{\delta o}$	=	— — — — con la T.N. en vacío	390
θ_μ	=	— — vencer la reluctancia del circuito magnético	135
θ_μ	=	— de un motor asíncrono en carga	411
$\theta_{\mu a}$	=	— para el circuito magnético de los polos auxiliares, por polo	357
$\theta_{\mu b}$	=	— — — — — — — — — principales por polo	195
$\hat{\theta}_\nu$	=	Amplitud del ν^{mo} armónico	315
$\theta_{\sigma p}$	=	F.m.m. de dispersión polar, por polo	187
$\hat{\theta}'_\nu$	=	Amplitud del ν^{mo} armónico para el primer peldaño de la onda escalonada	324
θ_0	=	Temperatura de referencia para un dieléctrico	86
$\hat{\theta}_0$	=	Amplitud de la onda rectangular de f.m.m. monofásica	314
θ_1	=	Temperatura ambiente inicial	14
θ_1	=	— inicial de un conductor	509
$\theta_1\ \theta_3\ \theta_5 \ldots$	=	Valores variables de los armónicos 1.º, 3.º, 5.º	326
$\hat{\theta}_{(1)}\ \hat{\theta}_{(2)}$	=	Amplitud de la onda escalonada de f.m.m. en los instantes (1) y (2)	321
$\hat{\theta}_1\ \hat{\theta}_3\ \hat{\theta}_5 \ldots$	=	— — los armónicos 1.º, 3.º, 5º	315
$\hat{\theta}_1'\ \hat{\theta}_3'\ \hat{\theta}_5' \ldots$	=	— de los armónicos 1.º, 3.º, 5.º del primer peldaño de una onda escalonada	325
$\theta_1''\ \theta_3''\ \theta_5'' \ldots$	=	— de los armónicos 1.º, 3.º, 5.º del segundo peldaño de una onda escalonada	324
θ_2	=	Temperatura ambiente final	14
θ_2'	=	— final de un conductor	509
$\Delta\theta$	=	Diferencia de temperatura entre las superficies interior y exterior de un aislante	87
$\Delta\theta$	=	Incremento de temperatura	504
$\Delta\theta$	=	Diferencia de temperatura entre el centro y el extremo de una barra	521
$\Delta\theta_a$	=	Calentamiento del aire de ventilación	496
$\Delta\theta_{bp}$	=	Excitación suplementaria por polo para mantener la T.N. a P.C.	369
$\Delta\theta_l$	=	F.m.m. suplementaria de dispersión polar en carga	187
$\Delta\theta_{lim}$	=	Diferencia límite de temperatura entre las superficies interior y exterior de un aislante	87
$\Delta\theta_M$	=	Diferencia de temperatura entre el centro y el extremo de una barra	520
$\Delta\theta_M$	=	— — — — — eje y la superficie de un cilindro	523
$\Delta\theta_m$	=	— media de temperatura a lo largo del eje de una barra	522
$\Delta\theta_m$	=	— — — — — — — — radio de un cilindro	523
$\Delta\theta_\Delta$	=	Aumento de temperatura durante un tiempo t	536
$\dot{\Delta\theta}_\Delta$	=	— — — — — — — referido a la temperatura final	536
$\Delta\theta_\lambda$	=	Diferencia de temperatura por conducción térmica	515
Λ	=	Permeancia	89
Λ_L	=	— del circuito magnético autoinductivo	213
Λ_M	=	— de inducción mutua	216
Λ_{M2}	=	— — — — en zig-zag	290
Λ_n	=	— — una ranura	213

			Págs.
Λ_z	=	– media de dispersión por ranura	238
Λ_z	=	– del circuito magnético de conmutación	350
Λ_{zb}	=	– de dispersión por bobina	237
Λ_{zb1}	=	– – una bobina parcial en un transformador con devanados alternados	278
Λ_{z1}	=	– combinada de a.i. e i.m. para la bobina (1)	225
$\Lambda_{z(1)}$	=	– total de dispersión por ranura estatórica	272
$\Lambda_{z1}\ \Lambda_{z2}$	=	– de dispersión de los devanados (1) y (2) de un transformador	277
Λ_{z2}	=	– combinado de a.i. e i.m. para la bobina (2)	226
Λ_{z2}	=	– de a.i. e i.m. del devanado en zig-zag referida al número total de espiras N_2	291
Λ_μ	=	– del circuito magnético común a las bobinas (1) y (2)	204
Λ_σ	=	– de dispersión autoinductiva	235
$\Lambda_{\sigma p}$	=	– total de dispersión polar	189
$\Lambda_{\sigma 1}$	=	– de a.i. para la bobina (1)	226
$\Lambda_{\sigma 2}$	=	– autoinducción del devanado en zig-zag referente al número total de espiras N_2	290
Λ_1	=	– lateral entre expansiones polares	187
Λ_2	=	– frontal entre expansiones polares	187
Λ_3	=	– lateral entre núcleos polares	188
Λ_4	=	– frontal entre núcleos polares	188
λ	=	Conductividad térmica	86
λ	=	Permeancia específica de ranuras por unidad de longitud del paquete de chapas	239
λ_a	=	Conductividad térmica del aire	519
λ_c	=	– – de la cinta de micanita	519
λ_{cb}	=	Permeancia específica de las cabezas de bobina referida a las ranuras	259
$\lambda_{cb(1)}$	=	– – – – – – – del estátor referida a las ranuras	272
λ_i	=	Conductividades individuales de una serie de conductores térmicos	517
λ_M	=	Permeancia específica equivalente al circuito magnético de inducción mutua	220
λ_M	=	– – de inducción mutua entre las bobinas (1) y (2)	226
λ_n	=	– – – una bobina	214
λ_r	=	– – media de ranura	246
$\lambda_{r(1)}$	=	– – – – – estatórica	269
$\lambda_{r(2)}$	=	– – – – – rotórica	273
λ_t	=	– – de cabeza de dientes	251
λ_z	=	– – media de las ranuras en un devanado acortado	231
λ_z	=	– – de un devanado referido a la ranura	239
λ_z	=	– – del circuito de conmutación	350
λ_z	=	Conductividad térmica axial del paquete de chapas	523
λ_{z1}	=	Permeancia específica combinada para la bobina (1)	226
$\lambda_{z(1)}$	=	– – para la ranura (1) de un devanado acortado	230
$\lambda_{z(1)}$	=	– – de ranura estatórica	272
λ_{z2}	=	– – combinada para la bobina (2)	226
$\lambda_{z(2)}$	=	– – para la ranura (2) de un devanado acortado	230
$\lambda_{z(3)}$	=	– – – – ranura (3) de un devanado acortado	231
$\lambda_{z(4)}$	=	– – – – ranura (4) de un devanado acortado	231
λ_z	=	– – de zig-zag	253
$\lambda_{z(1)}$	=	– – – – para el estátor	255
$\lambda_{z(2)}$	=	– – – – – – rótor	257
$\lambda_{\sigma 1}$	=	– – – a.i. de la bobina (1)	226
$\lambda_{\sigma 2}$	=	– – – – – – bobina (2)	226

			Págs.
λ_1	=	– – del estátor referida a la ranura	272
$\Delta\Lambda$	=	Variación de la permeancia según la dirección x	117
μ	=	Permeabilidad relativa	23
μ_e	=	Coeficiente de rozamiento de los carbones	90
μ_o	=	Permeabilidad absoluta	92
ν	=	Orden de un armónico	154
ν	=	Número de estratos radiales de conductores por ranura	247
ν'	=	– – – – – – en paralelo por ranura	459
ν_{e2}	=	– – – equivalente según las transposiciones	475
ν_{e1}	=	– – – del devanado (1) de un transformador por entrecara	474
ν_{e2}	=	– – – – devanado (2) de un transformador por entrecara	479
ν_f	=	Factor de corrección para las pérdidas en el hierro según la frecuencia	129
ν_{tr}	=	Número de estratos para la componente transversal del flujo de dispersión	486
ν_v	=	Coeficiente de pérdidas por ventilación	496
ν_2	=	Número de estratos conductores por ranura rotórica	274
ξ	=	Factor de bobinado	139
ξ_d	=	– – distribución	139
$\xi_{d(1)}$	=	– – – para el estátor	412
$\xi_{d\nu}$	=	– – – para el ν^{mo} armónico	154
ξ_y	=	– – acortamiento del paso	137
$\xi_{y(1)}$	=	– – – – – para el estátor	412
$\xi_{y(2)}$	=	– – – – – – – rótor	163
ξ_ν	=	– – bobinado para el ν^{mo} armónico	253
ξ_1	=	– – – – – estátor	411
$\xi_1\ \xi_3\ \xi_5 \ldots$	=	Factores de bobinado para los armónicos 1.º, 3.º, 5.º	253
ϱ	=	Resistividad	5
ϱ	=	Radio del polígono vectorial de f.e.m. por ranura	154
ϱ_m	=	Resistividad media	520
ϱ_θ	=	– a la temperatura θ	9
ϱ_θ'	=	– – – – θ'	10
ϱ_2	=	– del rótor	273
ϱ_{20}	=	– a 20 °C	9
ϱ_{75}	=	– – 75 °C del Cu 56	16
σ	=	Deslizamiento del rótor	273
σ	=	Parámetro sobre las pérdidas adicionales en las máquinas de continua	468
σ	=	Coeficiente de trabajo (esfuerzo)	506
σ_p	=	– – dispersión polar	184
σ_{pa}	=	– – – – para los polos auxiliares	360
τ	=	Grosor de un aislante	27
τ	=	Constante de tiempo de un circuito	112
τ	=	Grosor de una plancha magnética	122
τ	=	Recorrido del flujo térmico	515
τ_a	=	Grosor de una película de aire	519
τ_c	=	– – – capa de cinta micanita	519
τ_i	=	– individual de un aislante	57
τ_i	=	– – – – conductor térmico	517

			Págs.
τ_K	=	Paso de delgas	338
τ_M	=	— máximo de ranura	177
$\tau_{M(1)}$	=	— — — — estatórica	412
$\tau_{M(2)}$	=	— — — — rotórica	412
τ_m	=	— medio de ranura	177
$\tau_{m(1)}$	=	— — — — estatórica	412
$\tau_{m(2)}$	=	— — — — rotórica	412
τ_n	=	— variable de ranura	171
τ_p	=	— polar	141
τ_{pK}	=	— — sobre el colector	468
τ_δ	=	— de ranura en el entrehierro	150
$\tau_{\delta(1)}$	=	— — — — — — para el estátor	257
$\tau_{\delta(2)}$	=	— — — — — — — — rótor	255
τ_o	=	— mínimo de ranuras	177
$\tau_{o(1)}$	=	— — — — estatórico	412
$\tau_{o(2)}$	=	— — — — rotórico	419
$\tau_{1/3}$	=	— de ranura a 1/3 de su altura	172
			89
Φ	=	Flujo magnético	143
Φ	=	— máximo por columna de un transformador	192
Φ_{cp}	=	— en la corona polar	442
$\hat{\Phi}_h$	=	— Autoinductivo para la altura h de un conductor	103
Φ_i	=	— instantáneo	360
Φ_{na}	=	— en el núcleo del polo auxiliar	110
Φ_p	=	— — — — — — principal	111
Φ_p	=	— polar instantáneo	111
Φ_{max}	=	— — antes de su extinción	389
$\hat{\Phi}_t$	=	— en el entrehierro con onda senoidal de inducción máxima $\hat{B}_t$	442
$\hat{\Phi}_z$	=	— más de dispers. paro el plano de cota radial x	110
Φ_y	=	— en el yugo	110
$\hat{\Phi}_\delta$	=	— efectivo en el entrehierro	140
$\hat{\Phi}_\delta$	=	— senoidal en el entrehierro a igualdad de f.e.m. eficaz	360
$\Phi_{\delta a}$	=	— en el entrehierro de un polo auxiliar	202
Φ_μ	=	Resultante los flujos recíprocos de inducción mutua	184
$\Phi_{\sigma p}$	=	Flujo de dispersión polar	179
$\Phi_{\sigma r}$	=	— — — de ranura	187
$\Phi_{\sigma 1}$	=	— — — lateral entre expansiones polares	202
$\Phi_{\sigma 1}$	=	— — — del circuito (1)	188
$\Phi_{\sigma 1}$	=	— — — frontal entre expansiones polares	202
$\Phi_{\sigma 2}$	=	— — — de la bobina (2)	202
$\Phi_{\sigma 2}$	=	— — — lateral entre núcleos polares	188
$\Phi_{\sigma 3}$	=	— — — frontal entre núcleos polares	188
$\Phi_{\sigma 4}$	=		442
$\hat{\Phi}_0$	=	— máximo de dispersión para el plano de cota radial 0	202
Φ_1	=	— — — resultante abrazado por la bobina (2)	202
${}_1\Phi_1$	=	— total creado por la bobina (1)	202
${}_1\Phi_2$	=	Parte del flujo creado por la bobina (1) abrazado por la (2)	203
Φ_2	=	Flujo resultante abrazado por la bobina (2)	202
${}_2\Phi_2$	=	— total creado por la bobina (2)	202
${}_2\Phi_1$	=	Parte del flujo creado por la bobina (2) abrazado por la (1)	83
φ	=	Desfase entre corriente y tensión	

			Págs.
φ	=	— interno entre las f.e.m. y las corrientes circulatorias	444
φ_1	=	— entre la corriente y la tensión estatórica	409
$\varkappa$	=	Conductividad eléctrica	7
$\varkappa_{20}$	=	— — a 20 referida a la del cobre patrón	11
$\varkappa_\theta$	=	— — — $\theta°$	9
$\varkappa_{20}$	=	— — — 20 °C	9
$\varkappa_{75}$	=	— — — 75 °C	16
$\varkappa_{135}$	=	— — — 135 °C	513
$\varkappa_{255}$	=	— — — 255 °C	514
ψ	=	Recubrimiento polar	120
ψ	=	Concatenaciones espiras-flujo	210
ω	=	Pulsación	111